

# 各向异性等离子体中的静电屏蔽

陆全康 陈之范

(复旦大学物理系)

1981年4月27日收到

## 提 要

首先证明在各向异性等离子体中,任意分布函数对于静止试验电荷的静电屏蔽总是完全的. 其次用计算机算出双麦克斯韦等离子体中的静电屏蔽势. 当距离 $R$ 充分大时,静电屏蔽势与 $R^{-3}$ 成比例地衰减. 在一定条件下,还会出现超屏蔽(即正试验电荷周围的电势出现负值)的区域.

## 一、引 言

在均匀各向同性等离子体中,试验电荷(带电量为 $Q$ )周围包围着异号电量的屏蔽电荷分布,电势函数符合指数衰减规律:  $\phi(R) = \frac{Q}{R} \exp(-K_D R)$ , 其特征长度为德拜长度  $K_D^{-1} = (kT/4\pi n e^2)^{1/2}$ , 这里 $T$ 是温度,  $n$ 与 $e$ 是电子的密度与电量,  $k$ 是玻耳兹曼常数.

很多作者对各向同性等离子体中的运动试验电荷的静电屏蔽作了研究,还对碰撞与非均匀等离子体的情况进行了分析,得出电势函数中除了指数衰减项外,还含有与 $R^{-1}$ ,  $R^{-3}$ 等成比例的缓慢衰减项<sup>[1-9]</sup>. 作者在文献[9]中曾指出:在双麦克斯韦等离子体中,静止试验电荷周围的电势函数中除了指数衰减项外,还含有与 $R^{-3}$ 成比例的项.

这些结果表明,当存在各向异性与非均匀的因素时,非电中性区域与德拜屏蔽预示的区域有差异. 在某些条件下,有负幂的缓慢衰减项将使非电中性区域的范围扩大.

由于静电屏蔽是等离子体最基本的物理性质之一,正如文献[6]指出,这些基本研究对等离子体物理的进一步发展是预先非有不可的.

## 二、静电屏蔽的完全性

考虑由电子与 $N$ 种离子组成的等离子体,试验电荷(带电量为 $Q$ )以速度 $\mathbf{v}_0$ 运动,描述静电屏蔽的基本方程为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{R}) = & -4\pi Q \delta(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) \\ & - 4\pi \sum_{i=1}^{N+1} q_i \int f_i(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

这里

$$\tilde{f}_i(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) = f_i(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) - n_i f_{0i}(\mathbf{v}), \quad (1)$$

式中  $f_i(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$  为等离子体中第  $i$  类带电粒子的分布函数,  $f_{0i}(\mathbf{v})$  与  $n_i$  为其相应的恒定态几率分布函数与浓度;  $q_i$  与  $m_i$  为第  $i$  类带电粒子的粒子荷电量与质量.

$\tilde{f}_i(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$  符合线性伏拉索夫方程

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \mathbf{R}} - \frac{q_i}{m_i} \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_i \frac{\partial \tilde{f}_{0i}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2)$$

由(1)至(2)式得

$$\phi(\mathbf{R}, t) = \frac{Q}{2\pi^2} \int \frac{\delta(\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} + i\omega t]}{k^2 - \sum_{j=1}^{N+1} \omega_{pj}^2 \mathbf{k} \cdot \int \frac{\partial f_{0j}(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}} d\mathbf{k} d\omega. \quad (3)$$

现在从(3)式证明, 对于一组任意的分布函数  $f_{0j}(\mathbf{v})$  ( $j = 1, 2, \dots, N+1$ ), 等离子体对于静止试验电荷的静电屏蔽总是完全的.

取  $\mathbf{v}_0 = 0$ , 并引入

$$F_j(u) = \int d\mathbf{v} f_{0j}(\mathbf{v}) \delta(u - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / k). \quad (4)$$

(3)式化成

$$\phi(\mathbf{R}) = \frac{Q}{2\pi^2} \int \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{k^2 - \sum_{j=1}^{N+1} \omega_{pj}^2 \int \frac{F'_j(u) du}{u}} d\mathbf{k}. \quad (5)$$

取极坐标  $\mathbf{k} = (k, \theta, \varphi)$ , 由(4)式可见,  $F_j(u)$  中包含的参量可依赖于  $(\theta, \varphi)$ . 令

$$\tilde{K}^2(\theta, \varphi) = - \sum_{j=1}^{N+1} \omega_{pj}^2 \int \frac{F'_j(u) du}{u}, \quad (6)$$

(5)式化成

$$\phi(\mathbf{R}) = \frac{Q}{2\pi^2} \int \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{k^2 + \tilde{K}^2(\theta, \varphi)} d\mathbf{k}. \quad (7)$$

屏蔽电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{R}) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 [\phi(\mathbf{R}) - Q/R] \\ &= -\frac{Q}{(2\pi)^3} \int \frac{\tilde{K}^2(\theta, \varphi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{k^2 + \tilde{K}^2(\theta, \varphi)} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8)$$

因而总屏蔽电量为

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{R}) d\mathbf{R} &= -Q \int \frac{\delta(\mathbf{k}) \tilde{K}^2(\theta, \varphi)}{k^2 + \tilde{K}^2(\theta, \varphi)} d\mathbf{k} \\ &= -Q \int \delta(\theta) \delta(\varphi) d\theta d\varphi = -Q. \end{aligned} \quad (9)$$

在文献中曾有人指出, 在运动电荷的屏蔽问题中, 某些分布函数的屏蔽不完全. 我们在这里证明: 对于静止电荷情况, 任意分布函数的屏蔽都是完全的. 换句话说, 屏蔽问题对分布函数并无任何约束.

### 三、双麦克斯韦等离子体

现代等离子体物理中常采用的一种各向异性分布为双麦克斯韦分布. 处于外磁场中的等离子体, 或由于形成等离子体的实验条件各向异性而趋于平衡的弛豫时间大于实验的特征时间, 即使无外磁场时也能使动力温度成为各向异性<sup>[10]</sup>. 由于在讨论静电屏蔽, 多种质元与一种质元的情况无本质区别, 由后者推广到前者是直截了当的, 本节把离子作为本底, 而对于电子分布函数, 一个显然而简单的选择是采用张量来表征具有两个主温度  $T_{\perp}$  与  $T_{\parallel}$  的各向异性,  $T_{\parallel}$  为沿  $z$  方向的动力温度,  $T_{\perp}$  则为垂直于  $z$  方向的动力温度. 双麦克斯韦分布为

$$f(\mathbf{v}) = \pi^{-3/2} |\det \mathbf{A}|^{1/2} \exp(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{A} = \frac{m}{2K} \begin{pmatrix} 1/T_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 1/T_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 1/T_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

式中  $m$  为电子质量.

既然垂直于  $z$  方向的动力温度均为  $T_{\perp}$ , 不失一般性, 可令  $\mathbf{R}$  位于  $xz$  平面中, 设  $\mathbf{R}$  与  $z$  轴的交角为  $\alpha$ . 在此情况, 由(5)式得

$$\phi(\mathbf{R}) = \frac{Q}{2\pi^2} \int \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}(\sin\theta \sin\alpha \cos\phi + \cos\theta \cos\alpha)]}{k^2 + K_{D\perp}^2(1 + \epsilon \cos^2\theta)} d\mathbf{k}, \quad (12)$$

式中

$$\epsilon = \frac{(T_{\parallel} - T_{\perp})}{T_{\perp}}, \quad (13)$$

$$K_{D\perp}^2 = \frac{4\pi n e^2}{KT_{\perp}}. \quad (14)$$

引入无量纲量:  $\tilde{R} = RK_{D\perp}$ ,  $\tilde{k} = k/K_{D\perp}$ , (12)式可化成

$$\phi(\mathbf{R}) = (QK_{D\perp})I, \quad (15)$$

其中

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\tilde{k} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin\theta J_0(\tilde{k}\tilde{R} \sin\theta \sin\alpha) \exp(i\tilde{k}\tilde{R} \cos\theta \cos\alpha)}{\tilde{k}^2 + \frac{1}{1 + \epsilon \cos^2\theta}}, \quad (16)$$

式中  $J_0$  为零阶贝塞尔函数. 由计算机得到的  $I$  值如表 1 所示.

由表 2 中左方第一列的值乘以  $QK_{D\perp}$  得出  $QR^{-1}\exp(-K_{D\perp}R)$ , 其后四列的值乘以  $QK_{D\perp}$  得出  $QR^{-1}\exp(-K_{D\parallel}R)$ . 通过比较表 1 与表 2 的值可见,  $\phi(\mathbf{R})$  的值并非全部界于这二者之间.

从表 1 还看到, 在  $T_{\parallel} > T_{\perp}$  的情况,  $\phi$  会出现负值, 这表明由于分布函数各向异性的统计效应, 会使屏蔽的负电荷在某些区域过多地聚集. 这相应于“超屏蔽效应”.

$\alpha = 0$  方向电势函数值的上下界可由解析公式表示. 在此情况, (12)式化成

$$\phi(\mathbf{R}) = \phi(R, 0) = \frac{Q}{R} \left[ 1 - K_{D\perp}R \int_0^{1/\sqrt{1+\epsilon}} \frac{\exp(-K_{D\perp}R\xi)}{1 - \epsilon\xi^2} d\xi \right]. \quad (17)$$

表 1  
 $\alpha = 0^\circ$ 

| $\tilde{R} \backslash \theta$ | 10                    | $10^2$                | $10^3$               | $-10^{-1}$           |
|-------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| 1                             | $5.2 \times 10^{-1}$  | $7.2 \times 10^{-1}$  | $8.7 \times 10^{-1}$ | $3.7 \times 10^{-1}$ |
| 3                             | $-3.2 \times 10^{-4}$ | $9.4 \times 10^{-2}$  | $2.1 \times 10^{-1}$ | $1.8 \times 10^{-2}$ |
| 5                             | $-3.8 \times 10^{-2}$ | $-6.1 \times 10^{-3}$ | $8.5 \times 10^{-2}$ | $2.4 \times 10^{-3}$ |

 $\alpha = 30^\circ$ 

| $\tilde{R} \backslash \theta$ | 10                    | $10^2$               | $10^3$               | $-10^{-1}$           |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1                             | $5.4 \times 10^{-1}$  | $7.5 \times 10^{-1}$ | $8.9 \times 10^{-1}$ | $3.6 \times 10^{-1}$ |
| 3                             | $4.0 \times 10^{-2}$  | $1.4 \times 10^{-1}$ | $2.4 \times 10^{-1}$ | $1.7 \times 10^{-2}$ |
| 5                             | $-3.6 \times 10^{-3}$ | $4.9 \times 10^{-2}$ | $1.2 \times 10^{-1}$ | $2.0 \times 10^{-3}$ |

 $\alpha = 60^\circ$ 

| $\tilde{R} \backslash \theta$ | 10                   | $10^2$               | $10^3$               | $-10^{-1}$           |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1                             | $5.7 \times 10^{-1}$ | $7.7 \times 10^{-1}$ | $8.9 \times 10^{-1}$ | $3.6 \times 10^{-1}$ |
| 3                             | $7.8 \times 10^{-2}$ | $1.7 \times 10^{-1}$ | $2.5 \times 10^{-1}$ | $1.5 \times 10^{-2}$ |
| 5                             | $2.4 \times 10^{-2}$ | $7.6 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-1}$ | $1.1 \times 10^{-3}$ |

 $\alpha = 90^\circ$ 

| $\tilde{R} \backslash \theta$ | 10                   | $10^2$               | $10^3$               | $-10^{-1}$           |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1                             | $5.9 \times 10^{-1}$ | $7.7 \times 10^{-1}$ | $8.9 \times 10^{-1}$ | $3.6 \times 10^{-1}$ |
| 3                             | $8.9 \times 10^{-2}$ | $1.8 \times 10^{-1}$ | $2.5 \times 10^{-1}$ | $1.4 \times 10^{-2}$ |
| 5                             | $3.2 \times 10^{-2}$ | $8.3 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-1}$ | $6.5 \times 10^{-4}$ |

表 2

| $\tilde{R} \backslash \theta$ | $\tilde{R}^{-1} \exp(-\tilde{R})$ | $\tilde{R}^{-1} \exp(-\tilde{R}/\sqrt{1+\theta})$ |                      |                      |                      |
|-------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|                               |                                   | 10                                                | $10^2$               | $10^3$               | $-10^{-1}$           |
| 1                             | $3.7 \times 10^{-1}$              | $7.4 \times 10^{-1}$                              | $9.1 \times 10^{-1}$ | $9.7 \times 10^{-1}$ | $3.5 \times 10^{-1}$ |
| 3                             | $1.7 \times 10^{-2}$              | $1.3 \times 10^{-1}$                              | $2.5 \times 10^{-1}$ | $3.0 \times 10^{-1}$ | $1.4 \times 10^{-2}$ |
| 5                             | $1.3 \times 10^{-3}$              | $4.4 \times 10^{-2}$                              | $1.2 \times 10^{-1}$ | $1.7 \times 10^{-1}$ | $1.0 \times 10^{-3}$ |

对于任意的  $\theta$  值, 容易证明

$$\int_0^{\sqrt{1+\theta}} \exp(-K_{D\perp} R \xi) d\xi \geq \int_0^{\sqrt{1+\theta}} \frac{\exp(-K_{D\perp} R \xi)}{1 - \theta \xi^2} d\xi$$

$$\geq (1 + \epsilon) \int_0^{1/\sqrt{1+\epsilon}} \exp(-K_{D\perp} R \xi) d\xi. \quad (18)$$

因而由(17)式,有

$$\begin{aligned} \frac{Q}{R} \exp(-K_{D\parallel} R) - \epsilon \frac{Q}{R} [1 - \exp(-K_{D\parallel} R)] \\ \geq \phi(R, 0) \geq \frac{Q}{R} \exp(-K_{D\parallel} R). \end{aligned} \quad (19)$$

在(18)至(19)式中,当  $\infty > \epsilon > 0$  时取  $<$ , 当  $0 > \epsilon > -1$  时取  $>$ .

令

$$B = \frac{1}{\tilde{R}} e^{-\tilde{R}/\sqrt{1+\epsilon}} - \frac{\epsilon}{\tilde{R}} [1 - e^{-\tilde{R}/\sqrt{1+\epsilon}}], \quad (20)$$

则(19)式的左端可写成  $Q K_{D\perp} B \cdot B$  的值由表 3 给出.

表 3

| $\tilde{R} \backslash \epsilon$ | 10    | $10^2$ | $10^3$            | $-10^{-1}$           |
|---------------------------------|-------|--------|-------------------|----------------------|
| 1                               | -1.86 | -8.59  | $-3.01 \times 10$ | $4.1 \times 10^{-1}$ |
| 3                               | -1.85 | -8.39  | $-2.98 \times 10$ | $4.6 \times 10^{-2}$ |
| 5                               | -1.51 | -7.72  | $-2.91 \times 10$ | $2.1 \times 10^{-2}$ |

表 3 说明,当  $\epsilon > 0$  时,(19)式的下界是负值. 这表明超屏蔽效应是可能出现的. 反之,当  $\epsilon < 0$  时,(19)式给出的下界恒正,这时不会出现超屏蔽效应.

当  $|\epsilon| < 1$  时,利用下述积分公式:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{i z \cos \theta \cos \alpha} J_{p-1/2}(z \cos \theta \sin \alpha) C_n^p(\cos \theta) \sin^{p+1/2} \theta d\theta \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} i^n \sin^{p-1/2} \alpha C_n^p(\cos \alpha) J_{p+n}(z), \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $C_n^p$  为广义勒让德多项式;当  $p = 1/2$  时  $C_n^{1/2} = P_n(\cos \theta)$ , 即为勒让德多项式;(16)式的积分可求出,此时

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{R}) = \phi(R, \alpha) = \exp(-K_{D\perp} R) \left\{ \frac{Q}{R} + \frac{1}{2} \epsilon Q K_{D\perp} \cos^2 \alpha \right. \\ \left. + \epsilon Q P_2(\cos \alpha) \left[ \frac{1}{R} + \frac{2}{R^2 K_{D\perp}} + \frac{2}{R^3 K_{D\perp}^2} \right] \right\} \\ - \epsilon \frac{2 P_2(\cos \alpha) Q}{R^3 K_{D\perp}^2} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (22)$$

由(22)式可见,对于任意方向,势函数中除了指数衰减项外,同时含有与  $R^{-3}$  成比例的缓慢衰减项. 这样,势函数值将比德拜指数势更缓慢地衰减.

作者谨向西德 Buchen, Ruhr 大学等离子体物理研究所 M. Y. Yu (郁明阳) 博士对这一课题的关心,并寄来有关参考资料,深致谢忱.

## 参 考 文 献

- [1] Q. Montgomery, G. Joyce, R. Sugihara, *Plasma Physics*, **10**(1968), 681.
- [2] C. R. James, F. Vermeulen, *Can. J. Phys.*, **48** (1970), 349.
- [3] G. Cooper, *Phys. Fluids*, **12** (1969), 2707.
- [4] L. Stenflo, M. Y. Yu, *Physica Scripta*, **8** (1973), 301.
- [5] J. R. Kan, *J. Plasma Phys.*, **6**(1971), 223.
- [6] M. Y. Yu, L. Stenflo, P. K. Shukla, *Radio Science*, **7** (1972), 1151.
- [7] L. Stenflo, M. Y. Yu, P. K. Shukla, *Phys. Fluids*, **16** (1973), 450.
- [8] P. K. Shukla, K. H. Spatschek, M. Y. Yu, *Can. J. Phys.*, **52** (1974), 281.
- [9] Q. K. Lu (陆全康), Z. F. Chen (陈之范), *Journal de Physique (France)*, **C-7** (1979), 667.
- [10] S. R. Sharma, T. N. Bnatnagar, *Plasma Physics*, **18** (1976), 95.

## ELECTROSTATIC SHIELDING OF A TEST PARTICLE IN AN ANISOTROPIC PLASMA

LU QUAN-KANG      CHEN ZHI-FAN

(Department of Physics, Fudan University)

### ABSTRACT

In an anisotropic plasma, the electrostatic shielding of a static test particle is always complete for an arbitrary distribution function. In this paper the analytical formula and the numerical values of the electrostatic shielding potential in a bi-Maxwellian plasma are given. When the distance  $R$  is large, the potential is proportional to  $R^{-3}$ . Under certain conditions, there might appear some supershielding regions about the test particle.