

Kerr 度规中的 Bose 子束缚态

章 世 伟 苏 汝 铿
(上海市化工学校) (复旦大学物理系)
1981 年 4 月 3 日收到

提 要

本文讨论在 Kerr 度规中带质量和无质量 Bose 子的束缚态。结果指出: 1) 无质量 Bose 子不能形成 Kerr 黑洞束缚态, 在极端黑洞情形和角量子数 l 很大的条件下, 这与 deFelic 的结论相符。但我们将他的结论推广到任意 l 及非极端 Kerr 黑洞的情形。2) 对于有质量 Bose 子, 若满足束缚态条件, 则可能和极端 Kerr 黑洞组成束缚态。本文给出了束缚态的能量模式, 波函数和束缚态条件。

近年来, 不少作者探讨了 Kerr 度规中 Klein-Gordon 方程的求解问题。deFelic^[1] 指出, 在大 l 条件下, 当黑洞角动量 a 等于质量 M 时, (极端 Kerr 黑洞) 满足 K-G 方程的无质量 Bose 子的波函数集中在视界面上, 粒子被视界面吸收, 即不存在束缚态。Rowan-Stephenson^[2] 则给出了 Kerr 度规中 K-G 方程在一系列特殊条件下的近似解, 比较仔细地研究了散射态。Adler^[3] 等人则进一步分析了无质量 ϕ^4 场在 Kerr 背景中的束缚态问题。他们的结果都表明无质量 Bose 子在 Kerr 度规中没有束缚态。但有质量 ($\mu \neq 0$) Bose 子能否与 Kerr 黑洞组成束缚态的问题, 则迄今未有明确的结论。本文试图对此问题作比较详细的讨论, 着重分析 $\mu \neq 0$ 的情况。结果表明: Kerr 黑洞不能有无质量 Bose 子 ($\mu = 0$) 束缚态, 这与 deFelic^[1] 的结论一致, 但我们将其结果推广至任意 l 的情形。但当 $\mu \neq 0$ 时, 对极端 Kerr 黑洞, 证明了有可能形成束缚态。本文给出了束缚态能级, 波函数, 以及形成束缚态的条件。

一、 $a=0$ (Schwarzschild 黑洞)

弯曲空时背景中的 Klein-Gordon 方程为

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \mu^2\phi = 0, \quad (1.1)$$

式中 μ, ϕ 分别是 Bose 子静质量及波函数。当 $a = 0$ 时, 取 Schwarzschild 度规, 则径向方程为^[4]

$$z(z-1)R'' + (2z-1)R' + \left\{ 4E^2M^2 \frac{z^3}{(z-1)} - [4\mu^2M^2z^2 + l(l+1)] \right\} R = 0, \quad (1.2)$$

式中 $z=r/2M$, M 是黑洞质量, r 是径向坐标, E 是能量, l 是轨道角动量量子数 ($c =$

$G = \hbar = 1$) 按通常规定,若存在解 $R(z)$, 它在 $r = 2M$ 处正则, 在无穷远处为零, 则称 $R(z)$ 为束缚态波函数. 取 (1.2) 式中 z 的定义域为 $1 \leq z < \infty$. 易见当 $E < \mu$ 时, (1.2) 式在 $z \rightarrow \infty$ 处的渐近解为 $R = \exp[-2M\sqrt{\mu^2 - E^2}z] \rightarrow 0$. 当 $z \rightarrow 1$, 若 $E \neq 0$, 则 (1.2) 式的渐近形式为

$$(z-1)R'' + R' + \frac{4E^2M^2}{(z-1)}R = 0. \quad (1.3)$$

其解为 $R(z) = \exp[\pm i2EM \ln(z-1)]$, 这是具有无限个节点的共振态解.

但当 $E = 0$, 则 $z \rightarrow 1$ 时 (1.2) 式的渐近形式为

$$(z-1)R'' + R' - L^2R = 0, \quad (1.4)$$

式中 $L^2 = l(l+1) + 4\mu^2M^2$, 作坐标变换 $y = \sqrt{z-1}$ ($0 \leq y < \infty$), 则 (1.4) 式化为

$$d^2R/dy^2 + \frac{1}{y} dR/dy - 4L^2R = 0. \quad (1.5)$$

(1.5) 式是零阶虚宗量 Bessel 方程^[5]. 独立解为

$$R = \begin{cases} I_0(2L\sqrt{z-1}), \\ K_0(2L\sqrt{z-1}). \end{cases}$$

因 $K_0(0) \rightarrow -\infty$, 故束缚态在 $z \rightarrow 1$ 处须取 $I_0(2L\sqrt{z-1})$ 为渐近解. 又 $I_0(0)=1$; $I_0(z>1) > 1$, 因此在 $z=1$ 的近邻 $R(z)$ 是随 z 增加而上升的函数. 但要形成束缚态又必须满足 $R(\infty) = 0$, 这就要求在 $1 < z < \infty$ 的区间中至少存在某个 z_0 , 使 $R(z_0)$ 达到极大值, 满足 $R'(z_0) = 0$; $R''(z_0) < 0$. 但这是不可能的. 因为由 (1.2) 式知 $R''(z_0) = \frac{1}{z_0(z_0-1)} [l(l+1) + 4\mu^2M^2z_0^2] > 0$. 可见 $I_0(2L\sqrt{z-1})$ 不能和 $R(\infty)$ 相联接, 这就证明了束缚态不存在. 必须指出, 此结论无论对 $\mu = 0$ 和 $\mu \neq 0$ 都成立. K-G 方程在 Schwarzschild 度规中不存在束缚态解, 这和现有的结论一致^[3,4].

二、 $0 < a < M$ (Kerr 黑洞)

Kerr 度规在 Boyer-Lindquist 坐标中的线元为^[2]

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2\theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (2.1)$$

其中 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)(r - r_-)$,
 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$.

将 (2.1) 式代入 (1.1) 式, 并取 ϕ 为

$$\phi = \Sigma R(x) S_{l,m}(\theta) e^{im\varphi} e^{-iEt}, \quad (2.2)$$

有

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) + \left[\lambda + a^2(E^2 - \mu^2) \cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] S(\theta) = 0,$$

$$\Delta \frac{d}{dr} \left[\Delta \frac{dR}{dr} \right] + [E^2(r^2 + a^2)^2 - 4MamEr - \mu^2 \Delta r^2 + m^2 a^2 - (\lambda + E^2 a^2) \Delta] R = 0, \quad (2.3)$$

式中 m 是磁量子数, λ 是扁球谐函数 $S_{l,m}(\theta)$ 的本征值^[6]. 由(2.1)式定义的 r_+ 是 Kerr 黑洞的外事件地平. 取无量纲径向坐标

$$x \equiv (r - r_+)/M, \quad (2.4)$$

定义域取 $0 \leq x < \infty$, 并记

$$d \equiv \frac{1}{2M} (r_+ - r_-) = \frac{1}{M} \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.5)$$

则(2.3)式化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x(x+2d) \frac{dR}{dx} \right] + \left\{ E^2 M^2 \frac{[(x+d+1)^2 + (1-d^2)]^2}{x(x+2d)} - \frac{4maE(1+x+d)}{x(x+2d)} - \mu^2 M^2 (1+x+d)^2 + \frac{m^2 a^2}{M^2 x(x+2d)} - (\lambda + E^2 a^2) \right\} R(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

由(2.5)式知 $a=0$ 时 $d=1$; $a=M$ 时 $d=0$. 本节讨论 $0 < a < M$ 的 Kerr 黑洞, 取 $0 < d < 1$. 将(2.6)式中 $R(x)$ 的系数按 x 的幂次整理后, 得

$$x(x+2d)R'' + 2(x+d)R' + Q(x)R = 0, \quad (2.7)$$

其中

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x(x+2d)} [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4], \\ a_0 &= \left[2(1+d)EM - \frac{ma}{M} \right]^2, \\ a_1 &= 4E[2(1+d)^2 EM^2 - ma] - 2d(1+d)^2 \mu^2 M^2 - 2d(\lambda + E^2 a^2), \\ a_2 &= 4(1+d)(2+d)E^2 M^2 - (1+d)(1+5d)\mu^2 M^2 - (\lambda + E^2 a^2), \\ a_3 &= 4(1+d)E^2 M^2 - 2(1+2d)\mu^2 M^2, \\ a_4 &= (E^2 - \mu^2)M^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

现在来研究 r_+ 附近的渐近行为. 在 $\mu \neq 0$ 的条件下, 当 $x \rightarrow 0$, (2.7) 式的渐近形式为

$$xR'' + R' + \frac{1}{4d^2} \left[\frac{a_0}{x} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \right] R = 0. \quad (2.9)$$

现在分别就 $a_0 = 0$ 及 $a_0 \neq 0$ 两种情况讨论.

(i) $a_0 \neq 0$, 在 $x \rightarrow 0$ 时(2.9)式中 a_1, a_2, a_3, a_4 诸项可略去, 积分得

$$R(x) = \exp \left[\pm i \frac{\sqrt{a_0}}{2d} \ln x \right]. \quad (2.10)$$

(2.10)式与 Schwarzschild 情形一样, 代表具有无限多节点的共振态.

(ii) $a_0 = 0$, 由(2.8)式得 $E = \frac{ma}{2M^2(1+d)}$, 这时在(2.9)式中略去 a_2, a_3, a_4 诸项,

保留 a_1 项. 则 (2.9) 式形式上与 (1.4) 式一致. [在附录中证明了 $a_1 < 0$ 及 $a_2 < 0$] 故 $x \rightarrow 0$ 时 (2.9) 式的渐近解同样只能取 $R(x) \sim I_0\left(\frac{1}{d}\sqrt{-a_1x}\right)$. 存在束缚解的必要条件是至少在某个 x_0 处 $R(x_0)$ 取极大值. 另一方面由 (2.7) 式得

$$R''(x_0) = \frac{-x_0}{x_0^2(x_0 + 2d)^2} [a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3].$$

因 a_1 及 a_2 小于零, 束缚态要求 $E < \mu$, 即 $a_4 < 0$. 故若 $a_3 < 0$, 则 $R''(x_0) > 0$, 这与 $R(x_0)$ 极大相矛盾. 换言之, 当 $a_3 < 0$, 必无束缚态. 由 (2.7) 式知, $a_3 < 0$ 的条件为

$$2(1+d)E^2 < (1+2d)\mu^2. \quad (2.11)$$

现在来研究 $\mu=0$ 的情况. 注意这时 (2.7) 式在 $x \rightarrow \infty$ 处的渐近形式为 $R'' + E^2 M^2 R = 0$, 其解为

$$R = \exp(\pm iEMx). \quad (2.12)$$

因此, 要有束缚态必须取 $E = 0$. 将 $\mu = E = 0$ 代入 (2.8) 式, 得 $a_3 = a_4 = 0$; 由 (2.10) 式, 为避免在 $x \rightarrow 0$ 处出现共振态又需 $a_0 = 0$, 即 $m = 0$. 于是系数 a_i 中只有 $a_1 = -2d\lambda$ 及 $a_2 = -\lambda$ 不为零. 又因扁球函数的本征值 $\lambda > 0$, 因此 $I_0\left[\frac{1}{d}\sqrt{-a_1x}\right]$ 必不能和 $R(\infty) = 0$ 相联接. 这就证明了当 $\mu = 0$ 时, $0 < a < M$ 的 Kerr 黑洞必无束缚态解.

三、 $a=M$ (极端 Kerr 黑洞)

这时 $r_+ = r_- = M$; $a = M$; $d = 0$. (2.7) 式及 (2.8) 式化为

$$x^2 R'' + 2xR' + P(x)R = 0, \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= b_{-2}x^{-2} + b_{-1}x^{-1} + b_0 + b_1x - b_2x^2, \\ b_{-2} &= (2EM - m)^2, \quad b_{-1} = 4EM(2EM - m), \\ b_0 &= 7E^2M^2 - \mu^2M^2 - \lambda, \quad b_1 = 4E^2M^2 - 2\mu^2M^2, \\ b_2 &= (\mu^2 - E^2)M^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.1) 式和磁力场中的 Schrödinger 方程的形式十分类似, 但具有禁闭势 $b_1x - b_2x^2$. 现在分两种情况讨论.

(1) $2EM \neq m$, 此时 $b_{-2} \neq 0$. 将 (3.2) 式中只保留 $b_{-2}x^{-2}$ 项代入 (3.1) 式, 求得 $x \rightarrow 0$ 时 (3.1) 式之渐近解为

$$R(x) = \begin{cases} \sin\left[(2ME - m)\frac{1}{x}\right], \\ \cos\left[(2ME - m)\frac{1}{x}\right]. \end{cases} \quad (3.3)$$

这显然也对应共振态. 事实上 (3.1) 式的有效势为 $-(2EM - m)^2x^{-4}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时以四次幂发散. Landau^[7] 曾指出只要有效势 $-Ax^{-2}$ ($A > 0$) 中 $S > 2$, 将出现 Landau 陨落. (Landau fall) 这和共振态粒子以一定几率被 r_+ 吸收的图象一致.

(2) $2EM = m$

1) $\mu = 0$ 的情形. deFelic^[1] 曾在大 l 近似下讨论了当由 $a > M$ 向 $a = M$ 过渡时, 束缚态波函数 $R(x)$ 及能级 E 的变动行为. 结论是 E 趋于单一模式 $E = m/2M$, 同时 $R(x)$ 渐渐为 r_+ 面吸收, 即束缚态波函数在 $r > r_+$ 的外空间消失. 现在我们将此结论推广到任意 l 的情形. 注意到当 $\mu = 0$ 时, 系数中只有 $b_0 = -\lambda \neq 0$, 其余 b_i 均为零. 故 (3.1) 式化为

$$x^2 R'' + 2xR' - \lambda R = 0. \quad (3.4)$$

同时 (2.3) 式中 $S(\theta)$ 及 λ 分别退化为球谐函数及 $\lambda = l(l+1)$, 故 (3.4) 式的两个独立解为

$$R(x) = \begin{cases} x^{l+} & S_{\pm} = [-1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}] \frac{1}{2}; \\ x^{l-} & S_{\pm} \geq 0, \quad S_2 < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

显然当 $l = 0$ 时, x^{l+} 在全空间为零, 是平庸解. x^{l-} 在 r_+ 处发散. 而当 $l \neq 0$ 时, x^{l+} 在无限远处发散, x^{l-} 在 r_+ 处发散. 所以 x^{l+} 及 x^{l-} 都不是束缚态解.

2) $\mu \neq 0$ 的情形. 现在 (3.2) 式中 $b_{-2} = b_{-1} = 0$, (3.1) 式化为

$$R'' + \frac{2}{x} R' - \left\{ \frac{(-b_0)}{x^2} - \left[(-b_2) + \frac{b_1}{x} \right] \right\} R = 0. \quad (3.6)$$

(3.6) 式相当于“能量”为 $(-b_2)$, 中心力场势能为 $(-b_1)/x$, 轨道有效势为 $(-b_0)/x^2$ 的 Schrödinger 方程, 可以按标准方法求解^[7]. 令

$$\begin{aligned} \rho &= 2\sqrt{b_2} x & b_2 &= \mu^2 M^2 - m^2/4, \\ R(x) &= \rho^A e^{-\rho/2} W(\rho) & A &= \frac{1}{2} [-1 + \sqrt{1 - 4b_0}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

则 (3.1) 式化为

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} W + (2A + 2 - \rho) \frac{d}{d\rho} W - (1 + A - B)W = 0, \quad (3.8)$$

其中

$$B = \frac{b_1}{2\sqrt{b_2}} = \frac{m^2 - 2\mu^2 M^2}{2\sqrt{\mu^2 M^2 - m^2/4}}. \quad (3.9)$$

(3.8) 式的解 $W(\rho)$ 是汇合超几何级数, 仅当 $W(\rho)$ 自某项开始截断才能保证 $R(\infty) \rightarrow e^{-\rho/2} \rightarrow 0$, $W(\rho)$ 退化为多项式的条件是 $(B - A - 1) = 0$ 及正整数, 即

$$\frac{m^2 - 2\mu^2 M^2}{\sqrt{\mu^2 M^2 - m^2/4}} - \sqrt{1 + 4\lambda + 4\mu^2 M^2 - 7m^2} = N = \text{奇正整数}. \quad (3.10)$$

(3.10) 式就是束缚态条件. μM 满足此式的极端 Kerr 黑洞存在束缚态. 束缚态波函数为

$$R(\rho) = \rho^A e^{-\rho/2} F(1 + A - B, 2A + 2, \rho). \quad (3.11)$$

与通常不同的是, (3.10) 式并非给出能谱, 给出的是主量子数 N , 轨道量子数 λ 及磁量子数 m 之间的约束关系. 而束缚态的能级只有一个模式, 即 $E = \frac{m}{2M}$. 现在来证明 (3.10)

式的解确实存在. 显然, 要满足 (3.10) 式必须有

$$2\mu^2 M^2 < m^2 < 4\mu^2 M^2. \quad (3.12)$$

这表明给定 μM 后并非任何 m 都有束缚态. 但可证明只要 l 充份大, 总可找到满足 (3.10) 式的 m, λ 及 N . 当 l 充份大时^[4],

$$\begin{aligned}\lambda &= l(l+1) - \frac{1}{2} a^2(E^2 - \mu^2) + o(l^{-2}) \\ &= l(l+1) + \frac{1}{2} [\mu^2 M^2 - m^2/4] + o(l^{-2}).\end{aligned}\quad (3.13)$$

引入参数 α :

$$(\mu^2 M^2 - m^2/4) = \frac{1}{4} m^2 \alpha^2 \quad (\alpha \geq 0, m \neq 0), \quad (3.14)$$

由(3.12)式,有

$$0 < \alpha < 1. \quad (3.15)$$

将(3.13), (3.14)式代入(3.10)式,得

$$m^2 \alpha^4 - 4mN\alpha^3 + 8l(l+1)\alpha^2 + 4mN\alpha - 2m^2 = 0. \quad (3.16)$$

取 $\alpha = 0$, (3.16) 式的左端 $= -2m^2 < 0$ (注意 $m \neq 0$). 取 $\alpha = 1$, (3.16) 式的左端 $= 8l(l+1) - m^2 > 0$, 由此可知(3.16)式必有 $0 < \alpha < 1$ 的根存在. 这就证明了极端 Kerr 黑洞有可能和 $\mu \neq 0$ 的 Bose 子形成束缚态.

应该指出, (3.10)式对 μM 值提供了一个限制. 若取 Hawking 假设的小黑洞和 π 介子为例, $2\mu M \sim 10^{-3}$, (3.12) 式不能满足, 故不能形成束缚态. 而对于太阳质量的黑洞及 π 介子, $2\mu M \sim 10^{15}$, 由(3.12)式知束缚态的 m 及 l 均极大.

四、结 论

总结本文,我们得出

1) 对 Schwarzschild 黑洞 ($a = 0$), 无论是 $\mu = 0$ 或 $\mu \neq 0$ 的 Bose 子, 均不能形成束缚态.

2) 对 Kerr 黑洞 ($0 < a < M$), 当 $\mu = 0$ 时没有束缚态, 当 $\mu \neq 0$ 时, 在 (2.11) 式给出的能量范围内, 也没有束缚态.

3) 对极端 Kerr 黑洞 ($a = M$), 没有 $\mu = 0$ 的束缚态. 这个结论与 deFelic^[1] 的相一致. 但本文将他的结论推广到任意 l 的情况. 对于 $\mu \neq 0$ 的 Bose 子, 可能存在束缚态. 能级只有单一模式 $E = m/2M$, 波函数和束缚态条件分别由 (3.11) 及 (3.10) 式给出.

最后, 作者对方励之教授的宝贵意见表示感谢.

附 录

(2.8)式中当 $a_0 = 0$, 必使 $a_1 < 0$ 及 $a_2 < 0$. 证明如下. 由(2.5)式得 $a^2 = M^2(1 - d^2)$, 又 $a_0 = 0$ 导致 $EM = \frac{ma}{2M(1+d)} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{1-d}{1+d}}$. 由此式又可推得三个关系式: $E^2 M^2 = \frac{m^2}{4} \frac{1-d}{1+d}$; $E^2 a^2 = \frac{m^2}{4} (1-d)^2$ 及 $maE = \frac{m^2}{2} (1-d)$. 代入 a_i 并整理后就有

$$a_1 = d[m^2(1-d) - 2\lambda] + 2d(1+d)^2 M^2 (E^2 - \mu^2).$$

因 $\lambda > m^2$, $E < \mu$, 故 $a_1 < 0$. 同样, a_2 整理后化为

$$a_2 = (1 + d)(1 + 5d)M^2(E^2 - \mu^2) + \frac{3}{2} m^2(1 - d) - \lambda < 0.$$

参 考 文 献

- [1] F. deFelic, *Phys. Rev. D*, **19**(1979), 451.
- [2] D. J. Rowan, G. Stephenson, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10**(1977), 15; *ibid.*, **9**(1976), 1261.
- [3] S. L. Adler, R. B. Pearson, *Phys. Rev. D*, **18**(1978), 2798.
- [4] Misner, G. C., ed. *Gravitation*, San Francisco (1973).
- [5] 郭敦仁著, 数学物理方法, 人民教育出版社, (1978).
- [6] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (1953).
- [7] Landau, Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (1977).

THE BOSON BOUND STATES IN KERR METRIC

ZHANG SHI-WEI

(Shanghai Chemical Engineering School)

SU RU-KENG

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

The massive and massless boson bound states in Kerr metric are discussed. It is found that the massless boson cannot be attracted by Kerr black hole to form bound states. In extreme Kerr geometry and large l cases, our results are in agreement with that of deFelic's, but we extend his result to arbitrary l and non-extreme Kerr geometry. For massive bosons, if the bound state conditions are satisfied, it is possible to form bound states in the extreme Kerr metric. Its energy mode, wave functions and bound states conditions are given.