

研究简报

用全息术获得单片广义变换掩膜板的方案

程 路

(南开大学物理系)

1981 年 4 月 6 日收到

提 要

本文提出了用多次曝光全息方法制作单片掩膜板以实现一类么正变换的方案,从统计观点分析了这种掩膜板所施行变换的信噪比,并给出了对复位精度的要求。

一、引 言

近年来,霍裕平、杨国桢、顾本源等对于用全息透镜(多片或单片)实现广义光学变换的可能性进行了理论分析,并预示或试验了用计算机产生相应掩膜板的程序方案(见文献[1—7])。然而,解矩阵的计算量是很大的,尤其是多片系统的迭代求解。若将二维图象之取样点数增至 $N \times N = N^2$ (本文中的 N^2 相当于文献[2]和[5]中的 N),则矩阵元数随 N^4 增加,以此推断,对于 $N^2 = 64$ 的情况已难以实现,更不要说迭代。所以,在已发表的文章中,只做了 $N = 9^{[2]}$ 和 $N = 8^{[5]}$ 的情况。

本文根据全息曝光相当于一次光计算机运算的观点,提出一种用多次曝光(或分区多次曝光)全息术制作单片广义变换掩膜板的方案,导出了信噪比公式,并对一定的条件参数指出了物、象取样点数目的上限。

二、原 理

设有 N 个 N 维矢量 $\mathbf{F}^{(i)} (i = 1, 2, \dots, N)$ 构成一组基矢,每一矢量可表为一个列矩阵

$$\mathbf{F}^{(i)}: [F]_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \vdots \\ f_{iN} \end{bmatrix}. \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

以 $[F]^+$ 表 $[F]$ 的转置共轭矩阵。讨论正交归一基矢,即

$$[F]^+ [F]_j = \delta_{ij}, \quad (2)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

当图象用 N^2 个方阵取样点上的值表示时,矩阵的乘积

$$[F]_i[F]_j^T = \begin{bmatrix} f_{i1}f_{j1} & f_{i1}f_{j2} \cdots f_{i1}f_{jN} \\ f_{i2}f_{j1} & f_{i2}f_{j2} \cdots f_{i2}f_{jN} \\ \vdots & \vdots \\ f_{iN}f_{j1} & f_{iN}f_{j2} \cdots f_{iN}f_{jN} \end{bmatrix} \quad (3)$$

可代表一幅图象,该图象在归一化坐标 $x=s, y=t$ 点的值为 $f_{is}f_{jt}$. (3) 式中 $[]^T$ 表示 $[]$ 的转置. 用 O_{ij} 表示 $[F]_i[F]_j^T$ 对应的图象,称 O_{ij} 为一图卡 ($i, j=1, 2, \cdots, N$), 共有 N^2 个图卡.

由(2)式的正交归一性可以推知,这 N^2 个图卡也是正交归一的,即

$$\sum_{s,t=1}^N f_{is}f_{jt}^* f_{ms}^* f_{nt} = \delta_{im}\delta_{jn}, \quad (4)$$

或写为矩阵形式

$$[F]_m^+ [F]_i [F]_j^T [F]_n^* = \delta_{im}\delta_{jn}. \quad (5)$$

一个任意的 $N \times N$ 阶方阵(图象) $[W]$ 可展为各图卡之线性组合:

$$[W] = \sum_{i,j=1}^N v_{ij} [F]_i [F]_j^T, \quad (6)$$

其中诸系数 v (例如 v_{st}) 的求法如下. 将(6)式两端左乘 $[F]_t^+$ 、右乘 $[F]_s^*$ (星号表示取复共轭), 得

$$[F]_t^+ [W] [F]_s^* = \sum_{i,j=1}^N v_{ij} [F]_t^+ [F]_i ([F]_j^T [F]_s)^* = v_{st}.$$

我们将由阵元

$$v_{st} = [F]_t^+ [W] [F]_s^* \quad (7)$$

($s, t=1, 2, \cdots, N$) 构成的矩阵 $[V]$ 称为 $[W]$ 按基矢 $[F]$ 的二维度展开谱.

设一线性光学系统的物平面与象平面之间的总变换系统(包括一片全息透镜及其两侧的自由空间传播)为 S (图1). 若 S 能够执行下述 N^2 对物、象变换:

$$\text{将 } O_{ij} \text{ 变换为 } \delta_{is}\delta_{jt}. \quad (8)$$

(其中 s, t 为象面上离散点的整型化 x', y' 坐标), 则当物面上置任一物图象 $[W]$ 时, 在象面上将得到 $[W]$ 的二维度谱.

设 S 的作用相当于 N 阶方阵 $[G]$, 则由(8)式可以建立 N^2 个线性方程:

$$([G][F]_i[F]_j^T)_{st} = \delta_{is}\delta_{jt} \quad (s, t=1, 2, \cdots, N), \quad (9)$$

式中 $(\cdot)_{st}$ 表示取第 s 行 t 列的阵元. 由(9)式可以解出 $[G]$ 的 N^2 个阵元 g_{mn} ($m, n=1, 2, \cdots, N$).

现在我们不采取对(9)式的线性方程组上机求解 g_{mn} 的办法, 而采用下节的多次曝光全息法来完成(8)式所要求的变换.

三、方案概述

方案示于图2. L 为激光源, P 为分束镜, L_1 为扩束透镜. 光波射在透射型物图卡

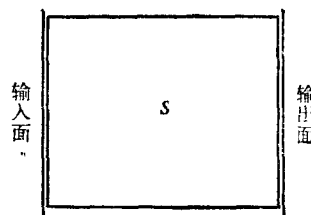


图 1

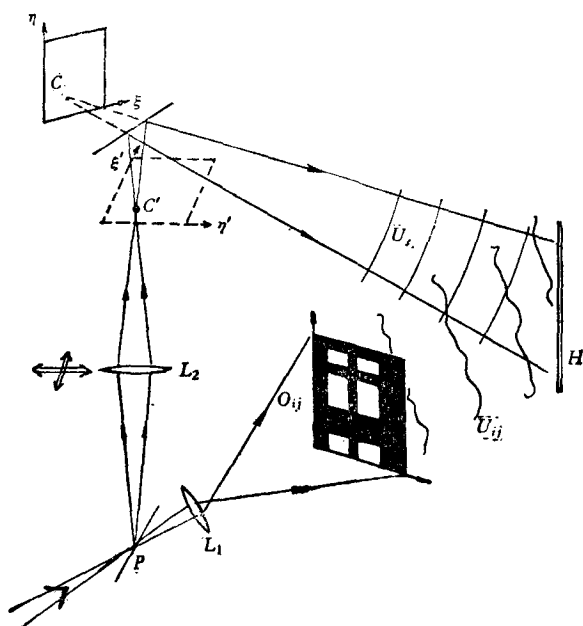


图 2

O_{ij} 上, 透过波场为 U_{ij} . L_2 将另一部分光波会聚于坐标平面 (ξ', η') 上的某点 C' . M 为反射镜, 将平面 (ξ', η') 成象于 (ξ, η) . 从 M 反射的球面波 U_i 与 U_{ij} 相遇发生干涉, 在全息底片 H 上记录全息图.

N^2 张图卡 O_{ij} 可以更换; 图 3 绘出了当 $[F]$ 为四维离散型 Hadamard 序列时的 16 张图卡 (图中 $\bullet$ 表示 $+1$, $\circ$ 表示 -1). 透镜 L_2 的方位可调. 当置图卡 O_{ij} 时, L_2 调得使 C' 点在 (ξ, η) 面上的虚象点 C 位于整型化坐标 $\xi=i, \eta=j$ 处, 而后进行一次曝光. 然后更换

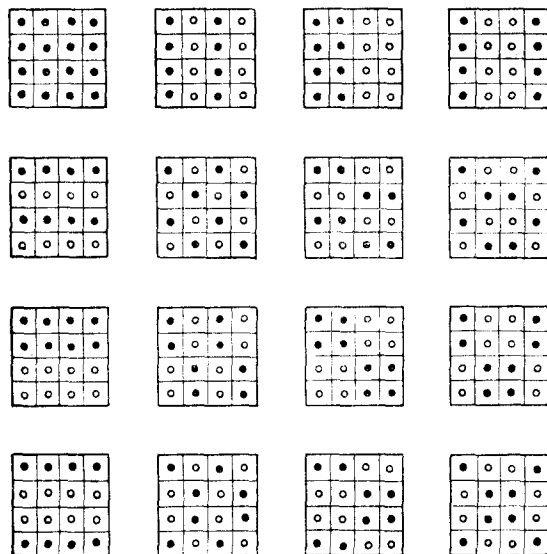


图 3

图卡,相应调节 L_2 , 再一次曝光,……,直至 N^2 幅图卡作完为止. 每次曝光量掌握在底片线性动态范围的 $1/N^2$. 如此获得一片全息图 H . 由上节的讨论和下节关于信噪比的分析可知,当将任一图象 $[W]$ 置于图 2 中图卡位置时,通过 $[W]$ 的波场作为“参考波”将在平面 (ξ, η) 上再现 $[W]$ 的二维度 $[F]$ 谱分布,即 H 为一个 $[F]$ 变换器.

四、信 噪 比 公 式

我们从统计观点对上述掩膜板变换的信噪比作一推导. 图 4 中 H 为掩膜板, (ξ, η) 面为全息再现的实象平面(与图 2 中的 ξ, η 相对于 H 共轭),称为输出面 Σ . 为简明计,设 H 为一圆面,直径为 D . 输出面的长、宽皆为 a , 到 H 的距离为 L . 当 $a \ll L$ 时(实际情况正是这样), Σ 对 H 中心张角之半为(参看文献[8])

$$\beta = \frac{a}{2L}. \quad (10)$$

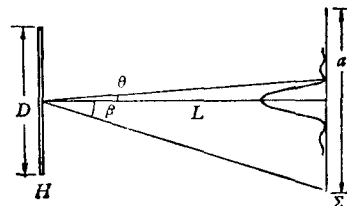


图 4

令

$$k = N(i-1) + j, \quad (11)$$

将图卡 O_{ij} 记为 O_k ($k = 1, 2, \dots, N^2$). 取 u, v 为 H 上的坐标,并以 $t_k(u, v)$ 表示第 k 次曝光在 H 上造成的振幅透过率分布. 并设 N^2 次曝光的总透过率

$$T(u, v) = \sum_{k=1}^{N^2} t_k(u, v) \quad (12)$$

处于底片的线性范围.

上节的方案其实是一种多幅图象的特征识别. 由于各图卡是正交的[见(4)式及(5)式],因而可以想见,不同图卡的波场经自由空间传至 H 左侧时,交叉相关程度将很低. 当取样点的数目较多时,即当在 H 上形成的干涉条纹(指拍摄过程)结构比较丰富时,可以用“准统计行为”作近似处理.(条纹丰富及细密的程度又涉及实验中对复位精度的要求,这点在第六节讨论.)

今用图卡 O_1 再现(对于所有图卡的讨论完全相同),则透过 H 的波场为

$$U_1(u, v) = U_{01}(u, v)T(u, v).$$

将(12)式代入,得

$$U_1(u, v) = U_{01}(u, v)t_1(u, v) + \sum_{k=2}^{N^2} U_{01}(u, v)t_k(u, v), \quad (13)$$

其中 $U_{01}(u, v)$ 是 H 左侧的场.

由于 $t_1(u, v)$ 与 U_{01} 匹配,故(13)式右端第一项将在 Σ 上点 $C(1, 1)$ 处形成脉冲信号. 由于 $t_k(u, v)$ ($k \neq 1$)与 U_{01} 不匹配,所以(13)式右端第二项(为 $N^2 - 1$ 项之和)在 Σ 上形成大面积的统计均匀散斑分布,即为噪声.

对于正交归一化函数基 $[F], [F]^T$, 可以认为(13)式中所有 N^2 个成分携带相等的能量,不妨取能量值为 $E = 1$. 以下对信号和噪声分别讨论.

1) 信号 $\mathcal{S}$ 由于 H 的尺寸有限,故信号并非 δ 函数,及是一个以 H 为圆孔的衍射所

形成的爱里斑. 该斑的中心亮区对 H 所张的角半径为(见图 4)

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (14)$$

λ 为波长. 考虑到底片的粒度起伏等随机因素, 此爱里斑的轮廓不会像理想函数那样, 因而取亮区的平均光强作为信号强度. 在下文中, 强度皆指对 H 中心点所张的单位立体角内的能量而言. 由于爱里斑中心区占总能量的 84%, 并考虑到只有 ηE 的能量形成信号 (η 为 H 的衍射效率), 因而信号强度为

$$\mathcal{S} = \left(\frac{0.84\eta E}{2\pi} \right) / (\pi\theta^2).$$

将(14)式的 θ 代入上式, 并由 $E = 1$ 得

$$\mathcal{S} = \frac{0.282\eta}{\pi^2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2. \quad (15)$$

2) 噪声 $\mathcal{N}$ 即 $(N^2 - 1)E$ 和 $(1 - \eta)E$ 的能量平均分布在 H 右方 2π 立体角时的强度. 由 $E = 1$ 得

$$\mathcal{N} = \frac{N^2}{2\pi}. \quad (16)$$

由(15)、(16)式得信噪比为

$$SNR = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}} = \frac{0.564\eta}{\pi} \left(\frac{D}{N\lambda} \right)^2. \quad (17)$$

五、分区多次曝光

当 N^2 过大而不允许 H 上记录 N^2 个全息图时, 可将 H 分为 m^2 个等面积的局域, 在每一局域上对 $(N/m)^2$ 个图卡进行曝光. 在这种分区多次曝光的情形下, 只有一个局域的一次曝光能与某一图卡匹配, 因而爱里斑中心亮区的面积较前增至 m^2 倍, 从而(15)式成为

$$\mathcal{S}^{(m)} = \frac{0.282\eta}{\pi^2} \left(\frac{D}{m\lambda} \right)^2. \quad (18)$$

而噪声仍由全 H 的所有局域贡献, 故(16)式不变. 于是信噪比为

$$SNR^{(m)} = \frac{0.564\eta}{\pi} \left(\frac{D}{Nm\lambda} \right)^2. \quad (19)$$

如果我们要求信噪比不得小于某一允限值 R_0 , 即

$$SNR > R_0,$$

则由(17)式可知, 在不分区情况下 N 应小于

$$N < \sqrt{\frac{0.564\eta}{\pi R_0}} \frac{D}{\lambda}; \quad (20)$$

在分区情况下 [(19)式],

$$N < \sqrt{\frac{0.564\eta}{\pi R_0}} \frac{D}{m\lambda}. \quad (21)$$

另一方面,还须要求信号爱里斑中心区域的直径不得超过输出面 Σ 上取样点的间隔,即 a/N . 在不分区情况下这相当于要求

$$(2\beta)L < \frac{a}{N},$$

即

$$N < \frac{aD}{2.44\lambda L}; \quad (22)$$

在分区情况下要求

$$(2m\beta)L < \frac{a}{N},$$

即

$$N < \frac{aD}{2.44m\lambda L}. \quad (23)$$

六、关于复位精度

复位精度取决于拍摄过程中 H 上干涉条纹的平均间隔,这相当于由图卡在 H 上形成的散斑的自相关长度. 由文献[8]可知,此自相关长度为

$$l = \frac{L_0}{a_0} \lambda,$$

其中 a_0 为输入面(图卡)的边长, L_0 为输入面到 H 的距离(图 5). 例如,若 $L_0 = 600\text{mm}$, $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\text{mm}$, $a_0 = 3.8\text{mm}$, 则得 $l = 0.1\text{mm}$, 这个精度是不难实现的. 如果这时 H 的尺寸为若干 cm , 则 H 上的物场信息结构仍是充分多的,因而上述准统计推算近似成立.

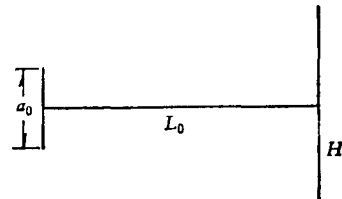


图 5

七、例 子

取 $\eta = 0.05$ (振幅型全息), $D = 20\text{mm}$, $N = 256$, $\lambda = 0.0006328\text{mm}$, 则在不分区情况下由(17)式得 $SNR = 137$. 由于 SNR 是光强信噪比, 所以可认为场值的信噪比为 $\sqrt{SNR} = 11.7$.

如果要求场值的信噪比不小于 20, 即 $R_0 = 400$, 则由(20)式得 $N < 149$. 即可以实现 128×128 的两维度变换. 另一方面, 设 $a = 20\text{mm}$, $L = 400\text{mm}$, 则(22)式右端为 647, 故(22)式满足.

在分区情况下, 若取 $D = 16\text{mm}$, $m = 4$, 其它参数同上, 则由(21)式得 $N < 30$, 即可以取 $N = 16$ 而作 16×16 的两维度变换. 这时 H 被分为 $m^2 = 16$ 个局域, 每一局域上曝光 $(N/m)^2 = 16$ 个全息图. 这是可以实现的. 另一方面, 这时(23)式右端约为 129, 故(23)式满足.

八、讨 论

本文方法与文献[2]、[5]、[7]的不同点在于:

1. 用记录全息图(相当于光计算)代替了文献[2]、[5]、[7]中的上机计算;
2. 文献[2、5、7]的立足点是求广义变换的严格解,本文的立足点则是求信噪比超过给定允限的解.

不过,由于实际记录介质动态范围的限制,实际上做到 N 很大仍是困难的.

参 考 文 献

- [1] 霍裕平、杨国桢、顾本源,物理学报, **24**(1975), 438.
- [2] 霍裕平、杨国桢、顾本源,物理学报, **25**(1976), 31.
- [3] 霍裕平,物理学报, **27**(1978), 487.
- [4] 霍裕平,物理学报, **29**(1980), 153.
- [5] 杨国桢、潘少华,物理学报, **29**(1980), 1301.
- [6] 杨国桢、顾本源,物理学报, **30**(1981), 414.
- [7] 杨国桢,物理学报,(待发表).
- [8] J. W. Goodman, Statistical Properties of Laser Speckle Patterns, in C. J. Dainty (ed.), Laser Speckles and Related Phenomena (Springer-Verlag, 1975), p. 39.

A SCHEME OF HOLOGRAPHIC METHOD FOR OBTAINING A SINGLE MASK FOR REALIZATION OF GENERALIZED TRANSFORMS

CHENG LU

(Department of Physics, Nankai University)

ABSTRACT

A scheme of multi-exposure holographic method for obtaining a single mask for realization of a kind of unitary transforms is suggested. The formula of signal-to-noise ratio of the transform due to masks of this sort is deduced from a statistical point of view.