第31卷 第3期　　物 理 学 报　　Vol. 31, No. 3
1982年3月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Mar., 1982

关于光学系统中空间关联函数的位相恢复问题

詹达三
(中国科学院物理研究所)

1981年5月29日收到

提　　要

本文把文献[1]中提出的振幅和位相恢复问题的一般表述用于处理空间关联函数位相的恢复问题．类似于文献[1]，得到了一组确定位相的方程．用该方程组和迭代求解法，可以求解空间关联函数的位相．但本文不假定传输矩阵 $\hat{K}$ 是幺正的[1)]．可以证明，如果 $\hat{K}$ 是幺正矩阵，在相干极限下，本文的方程组回到文献[1]中的相应方程．

一

在涉及电磁波谱物理学的许多分支中，位相问题是一个具有实际意义的重要问题．因为在实践中，波函数的绝对值很容易测量，但要测量它的位相却十分困难，在光学波段也是如此．类似问题在X射线结构分析、散射等问题中也都存在．

文献[1]中论述了光学系统中位相和振幅的恢复问题．该文中把恢复问题分为三类：纯位相型、混合型和纯振幅型．后两类问题也许在光学设计中是重要的[2]．但对于空间关联函数来说，后两类问题到目前为止我们还看不出有讨论的必要，为了节省篇幅因此从略，但其方程组也不难推导(其推导步骤和位相方程类似)．

为了普遍起见，我们对于光学系统的传输矩阵 $\hat{K}$ 不做幺正的假定．如果 $\hat{K}$ 是幺正矩阵，则本文的结果完全类似于文献[1]中的相应结果．这时还可证明，在相干极限下，本文的方程组(7)回到文献[1]中的相应方程．在两个平面上空间关联函数的模为已知的条件下，利用本文所求得的方程(6)和迭代求解法就可以求解空间关联函数位相的恢复问题．

二

从相干性理论的角度看，为了描述发生在如图1所示的光学系统中的光学过程，最好是引入互相干函数，因为在很多情况下经常碰到的光学场都是部分相干的．如果光学场是完全相干的，则这种数学表述给出相干光学过程．文献[1]中所论述的就是这种过程中

1) 文献[1]的作者之一杨国桢后来也讨论 $\hat{K}$ 是非幺正矩阵的情形，给出对文献[1]中相应公式的修正，其结果和本文的类似(未发表)．

振幅和位相的恢复问题. 如果光学场是完全不相干的,则给出非相干光学过程. 这种非相干光学过程最典型的例子就是非相干光学成像过程. 通常相干光学信息处理中所谓消卷积问题就是处理非相干光学过程中由于某种原因而造成的图像模糊,以恢复物的本来面目.

图 1

如果所使用的光源是准单色的,光程差远小于相干长度的条件易于得到满足,则可以证明[3,4]: 空间两个平面 ξ 和 x 上的空间关联函数(为简单起见,只讨论一维情形)之间的关系如下:

$$J'(x_1, x_2) = \iint K^*(x_1, \xi_1)K(x_2, \xi_2)J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \tag{1}$$

式中 $K(x_1\xi)$ 是表征系统特性的传输函数. J' 和 J 分别是两个平面上的空间关联函数(即互强度).

就实际的物理问题而言,我们可以假定空间关联函数是空间带限的. 因此依据部分相干性理论的矩阵表述[4],可以把(1)式写成如下的矩阵形式[1]:

$$\hat{A}' = \hat{K}^+\hat{A}\hat{K}, \tag{2}$$

其中 $\hat{K}$ 是传输矩阵(对应于 K), $\hat{A}'$ (对应于 J')和 $\hat{A}$ (对应于 J)是强度矩阵(厄密的).

由于空间关联函数(即互强度)的位相信息一般从实验上难于测定,但是其模则易于测量. 因此就发生了如何从空间关联函数的模来确定其位相的问题. 下面我们只讨论纯位相型的恢复问题.

三

由于对实际问题而言,可以假定 J' 和 J 都是带限的. 依据取样定理,可以通过有限个数取样点上的数值来描述空间关联函数. 若设取样点数目为 N, 则 $\hat{A}'$ 和 $\hat{A}$ 都是 $N \times N$ 的方阵, $\hat{K}$ 也是 $N \times N$ 的方阵. 令

$$A'_{ij} = \rho'_{ij}e^{i\phi'_{ij}}, \quad A_{ik} = \rho_{ik}e^{i\phi_{ik}}. \tag{3}$$

现在具体讨论纯位相型恢复问题,也就是说,在 $\{\rho'_{ij}\}$ 和 $\{\rho_{ij}\}$ 已知的条件下,如何求出 $\{\phi'_{ij}\}$ 和 $\{\phi_{ij}\}$ 的问题,并使(2)式得以满足. 为了描述两个矩阵 $\hat{A}'$ 和 $\hat{K}^+\hat{A}\hat{K}$ 的逼近程度,可以引入距离 D 这个量,其定义如下[1]:

$$D^2 = \|\hat{A}' - \hat{K}^+\hat{A}\hat{K}\| = \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\hat{A}'_{mj} - \sum_{n,l}^{N}\hat{K}^+_{mn}\hat{A}_{nl}\hat{K}_{lj}|^2. \tag{4}$$

如果 $D = 0$, 这就意味着两个矩阵的元素全都相等;如果 $D = d_0 \neq 0$, 则表明矩阵元之间的均方差为 d_0,

于是,在两个强度矩阵阵元的模已知的条件下,求解位相问题就归结为如下的变分方程:

---

1) 已把取样时可能出现的常数归入 $\hat{K}$.

$$\delta_{\phi_{ik}} D^2 = 0, \tag{5a}$$

$$\delta \phi'_{ik} D^2 = 0. \tag{5b}$$

上式中 $\delta_a D^2$ 表示对 D^2 取微分. 在离散情况下，分别通过变动 ϕ 和 ϕ' 使 D^2 取极小，便求得位相必须满足下面的方程组：

$$e^{i\phi'_{ik}} = \frac{\sum\limits_{n,l}^{N} K^*_{ni}\rho_{nl}e^{i\phi_{nl}}K_{lk}}{\left|\sum\limits_{n,l}^{N} K^*_{ni}\rho_{nl}e^{i\phi_{nl}}K_{lk}\right|}, \tag{6a}$$

$$e^{i\phi_{ik}} = \frac{\sum\limits_{n,l}^{N} K_{in}\rho'_{nl}e^{i\phi'_{nl}}K^*_{kl} - \sum\limits_{n\neq i,\, l\neq k}^{N} \widetilde{K}^*_{ni}\rho_{nl}e^{-i\phi_{nl}}\widetilde{K}^*_{kl}}{\left|\sum\limits_{n,l}^{N} K_{in}\rho'_{nl}e^{i\phi'_{nl}}K^*_{kl} - \sum\limits_{n\neq i,\, l\neq k}^{N} \widetilde{K}^*_{ni}\rho_{nl}e^{-i\phi_{nl}}\widetilde{K}^*_{kl}\right|} \tag{6b}$$

式中 K_{ij} 是 $\hat{K}$ 的矩阵元，$\widetilde{K}_{ij}$ 是厄密矩阵 $\hat{K}\hat{K}^+$ 的矩阵元，$l, k = 1, 2, \cdots, N$. (6)式就是我们所要讨论的位相恢复问题的基本方程组.

方程(6)可以通过迭代计算法求解，其步骤大致如下：已知 ρ 并取初值 $\phi^{(1)}$，代入(6a)式求得 $\phi'^{(1)}$；然后将已知的 ρ, ρ' 和 $\phi'^{(1)}$ 代入(6b)式求出 $\phi^{(2)}$；如此反复迭代，直至使 D 值小于事先规定的误差为止，从而求得 $\phi^{(m)}$ 和 $\phi'^{(m)}$(假定经过 m 次迭代).

四

从方程(6b)可以看出，如果 $\hat{K}$ 不是幺正矩阵，(6b)式是超越方程，因此求解位相问题变得复杂多了. 因为不像文献[1]中的方程(5)，这时(6b)式右端也含有待求的 ϕ. 如果 $\hat{K}$ 是幺正矩阵，则可证明(6)式化为

$$e^{i\phi'_{ik}} = \frac{\sum\limits_{n,l}^{N} K^*_{ni}\rho_{nl}e^{i\phi_{nl}}K_{lk}}{\left|\sum\limits_{n,l}^{N} K^*_{ni}\rho_{nl}e^{i\phi_{nl}}K_{lk}\right|}, \tag{7a}$$

$$e^{i\phi_{ik}} = \frac{\sum\limits_{n,l}^{N} K_{in}\rho'_{nl}e^{i\phi'_{nl}}K^*_{kl}}{\left|\sum\limits_{n,l}^{N} K_{in}\rho'_{nl}e^{i\phi'_{nl}}K^*_{kl}\right|}. \tag{7b}$$

这时位相方程和文献[1]中的(5)式[(5c)和(5d)式]类似，迭代求解过程简单多了，但是值得指出，要得到方程(7)，只要求 $\hat{K}\hat{K}^+$ 是对角矩阵就够了，因此文献[1]中要求 $\hat{K}$ 为幺正矩阵的条件太强. 但是，$\hat{K}$ 是幺正矩阵表示过程是能量守恒的，$\hat{K}\hat{K}^+$ 为对角矩阵的物理含义似乎很不明确.

另外可以证明，在相干极限下，由于空间关联函数的因子分解性质[5]，本文的(7)式回复到文献[1]中的(5)式[(5c)和(5d)式]. 由此可见，本文所述的问题自然包含了文献[1]中所论述的问题.

关于迭代计算求解的唯一性等问题,许多人已有详尽论述[6],本文就不涉及了.

对杨国桢同志的支持和有益讨论表示感谢.

参 考 文 献

[1] 杨国桢、顾本源,物理学报,**30**(1981),410.
[2] 彭桓武、庄杰佳,中国科学,(6)(1979),954.
[3] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Chapt. 10, Pergamon Press, Oxford (1965).
[4] J. Peřina, Coherence of Light, Chapt.5, Van Norstrand Reinhold Company, London (1972). (本书所使用函数符号和文献[4]略有不同. 为方便计,本文使用 Peřina 一书中的函数符号.)
[5] 见文献[4], Chapt. 4.
[6] H. A. Ferwerda, Topics in Current Physics **9**, Inverse Source Problems in Optics, p. 13, edited. by H. P. Baltes (1978).

ON THE PHASE RETRIEVAL PROBLEM OF THE SPATIAL CORRELATION FUNCTION IN OPTICAL SYSTEMS

ZHAN DA-SAN
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we generalize the method proposed in [1] to solve the phase retrieval problem of spatial correlation functions in optical systems. A set of equations for determining the phase of the correlation functions is given. Using these equations and the iteration computing method, the phase of correlation functions can be determined. It can be shown that, if the transmission matrix $\hat{K}$ is unitary, in the coherent limit, the equations derived in this paper turn out to be that obtained in [1].