

费曼路径积分和霍金蒸发

刘 辽

(北京师范大学物理系)

1981 年 5 月 30 日收到

提 要

在本文中,我们采用路径积分方法,证明了我们在不久前提出来的一个猜想,即与具体的时空度规形式无关,任一具有未来视界的静态和稳态时空,都存在霍金蒸发.

一些作者曾经采用过各种方法推导霍金蒸发^[1],所有这些方法都要考虑到各种具体的时空度规形式.最近,我们曾提出过一个猜想,与具体的时空度规形式无关,任一具有视界的静态和稳态时空都存在着霍金蒸发.

作者和赵峥曾在 2 维稳态情况^[2],赵峥曾在 4 维静态情况^[3],分别初步证明了上述猜想.本文采用路径积分方法,普遍证明了我们的上述猜想是正确的.

大家知道,仅对静态和稳态时空才能定义福克空间,才能谈到真空和真空起伏,在未来视界附近,由于真空起伏所产生的虚粒子对有可能实化为实粒子对,其中,例如反粒子进入视界内的负能轨道并落入奇异区,正能粒子逸向远方,此过程可等效地看作一正能粒子逆着时间前进,经过视界后被重力场散射成为顺着时间前进的正能粒子以形成霍金蒸发.

在局部惯性系中,Dirac 粒子的传播量 S_f 和标量粒子的传播量 Δ_f 具有相同的解析性,我们假设,在弯曲时空中,一般说来,这一结论也是正确的^[4],因此虽然本文的一切讨论仅限于传播量 Δ_f ,其解析性结论亦适用于传播量 S_f .

设 H^+ 为静态或稳态时空的未来事件视界,一标量粒子自 H^+ 内一点 x 传播到视界 H^+ 外一点 x' (x 在 x' 的未来)的传播量为^[4]

$$\Delta_f(x, x') = i \int_0^\infty d\Lambda \exp(-im^2\Lambda) F(x, x', \Lambda), \quad (1)$$

式中路径积分

$$F(x, x', \Lambda) = \int \delta x(\lambda) \exp \left[\frac{1}{4} i \int_0^\Lambda g(\dot{x}, \dot{x}) d\lambda \right], \quad (2)$$

$$g(\dot{x}, \dot{x}) \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad x(0) = x', x(\Lambda) = x. \quad (3)$$

可以证明, $\Delta_f(x, x')$ 的确是标量粒子的传播量,即

$$(\square - m^2)\Delta_f(x, x') = -\delta(x - x'). \quad (4)$$

设自视界 H^+ 内 x 点的出射粒子处于正频态 $|h_f(x)\rangle$, 到达视界外 x' 点的粒子处于

正频态 $|f_i(x)\rangle$, 则通过 H^+ 内过 x 点的超曲面 $\sigma(x)$ 的出射粒子在 H^+ 外过 x' 点的超曲面 $\sigma(x')$ 上被探测到的几率幅为^[4]

$$-\int_{\sigma(x')} d\sigma^\mu(x') \int_{\sigma(x)} d\sigma^\nu(x) f_i^*(x') \theta_\mu \Delta_f(x', x) \theta_\nu h_j(x), \quad (5)$$

式中 θ_μ 表示 $a\theta_\mu b = ab_{,\mu} - a_{,\mu}b$, $d\sigma^\mu$ 和 $d\sigma^\nu$ 代表 (1+2) 维时空超曲面面元, 亦即 $\mu, \nu \neq 0$.

由于稳态或静态时空容许类时 Killing 矢量 K^μ , 故当正能粒子以 H^+ 内 x 点沿短程线传播到 H^+ 外 x' 点时, 粒子的能量守恒, 因之 $h_j(x)$ 和 $f_i(x')$ 应含有相同的能量因子. 当时空具有其他对称性或容许其他 Killing 矢量时, 相应地, 在 $h_j(x)$ 和 $f_i(x')$ 表式中应含有其他相同的守恒量因子. 故

$$f_i(x') \sim \exp(-iEt'),$$

$$h_j(x) \sim \exp(-iEt).$$

令 $t' = 0$, (5) 式可化为

$$-\int d\sigma^a(R') \int d\sigma^b(R) [f_i^*(R') \theta_a \varepsilon_E(R', R) \theta_b h_j(R), \quad (6)$$

式中

$$\varepsilon_E(R', R) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} \Delta_f(t, R; 0, R'), \quad (7)$$

$d\sigma^a$, $d\sigma^b$ 代表 2 维纯空间曲面面元.

现在来分析传播量 $\Delta_f(x, x')$ 的解析性. 总可以选择坐标系 (例“自由下落”坐标系.), 使得度规在视界上和视界附近是解析的, 注意到 (3) 式是与坐标选择无关的不变量, 由 (3), (2), (1) 式可知, $\Delta_f(x, x')$ 的奇异性只能来自 (1) 式中积分的上、下限, 与度规的具体形式无关, 可以证明, 当 Λ 甚小时^[4,5]

$$F(x, x', \Lambda) \simeq \sum_c e^{\frac{iS_c}{\Lambda}} D_c \Lambda^{-2}. \quad (8)$$

当 Λ 甚大时^[4,6]

$$F(x, x', \Lambda) \simeq O(\Lambda^{-2}). \quad (9)$$

(8) 式中

$$D_c(x, x') = -\frac{i}{4\pi^2} \left[-\det \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial x'^\nu} \right) \right].$$

表示从 x 到 x' 的某条路径.

由 (8), (9) 式知, $\Delta_f(x, x')$ 在 Λ 甚大时收敛, 在 Λ 甚小时发散. 为了避免发散, 我们在 (1) 式中引入收敛因子

$$\exp(-\epsilon/\Lambda), \quad \epsilon \text{ 为一小正数.}$$

故

$$\Delta_f(x, x') = i \int_0^\infty d\Lambda \exp(-im^2\Lambda - \epsilon/\Lambda) F(x, x', \Lambda). \quad (10)$$

把积分域分为

$$[0, \infty) = [0, \Lambda_0] + [\Lambda_0, \infty),$$

其中 Λ_0 是一个小正量, 则得

$$\begin{aligned}\Delta_f(x, x') &= K_0(x, x') + i \int_0^{\Lambda_0} d\Lambda \exp(-im^2\Lambda - \epsilon/\Lambda) \sum_c e^{\frac{iS_c}{4\Lambda}} D_c \Lambda^{-2} \\ &= K_0(x, x') - \sum_c \frac{e^{\frac{iS_c(x, x')}{4\Lambda_0} - \epsilon/\Lambda_0}}{S_c(x, x') + i\epsilon} D_c(x, x').\end{aligned}\quad (11)$$

由于 $K_0(x, x')$ 显然是收敛的, 传播量 $\Delta_f(x, x')$ 的奇点只能出现在不同积分路径的 $S_c(x, x') = -i\epsilon$ 处. 这表示, 引入收敛因子的结果是把奇点从光锥上移到虚轴上去了.

设 ν 为沿 H^+ 的母线 (generator) 的顺时方向的仿射参量, x_0 为 H^+ 上一点, 相应的 ν 为 ν_0 , x' 为 H^+ 外一点, x_0, x' 二点有实光短程线相连, 即

$$S(x_0, x') = 0.$$

当 ν 在 ν_0 的邻域时, 邻短程线的长度 $S(x, x')$ 可展开为

$$S(x, x') = S(x_0, x') + \left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{x_0} (\nu - \nu_0) + \cdots \simeq \left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{x_0} (\nu - \nu_0). \quad (12)$$

如图 1, 若 x 在 x' 的未来光锥面内, 则

$$\nu - \nu_0 > 0, \quad S(x, x') < 0 \text{ (类时)},$$

故

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{x_0} < 0.$$

若 x 在 x' 的未来光锥面外, 则

$$\nu - \nu_0 < 0, \quad S(x, x') > 0 \text{ (类空)},$$

故

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{x_0} < 0.$$

由

$$S(x, x') = -i\epsilon$$

或

$$\nu = -i \frac{\epsilon}{\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{x_0}} + \nu_0. \quad (13)$$

可知, 在任何情况下, 传播量 $\Delta_f(x, x')$ 的奇点在上半复 ν 平面内, $\Delta_f(x, x')$ 的解析区在下半复 ν 平面内.

由于稳态或静态时空容许含一个类时参量的运动群, 故沿 H^+ 的母线还可引入群参量 t , 利用群参量 t 和仿射参量 ν 可分别定义两个零矢 l^μ 和 u^μ , 其中 $l^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$, 满足^[7]

$$l_\nu^\mu l^\nu = k l^\mu, \quad (14)$$

式中 k 即 H^+ 表面的重力加速度, 可以如下证明, k 在 H^+ 上是一个常数.

稳态度规的普遍式为

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{0i}dt dx^i + 2g_{02}dt dx^2 + 2g_{03}dt dx^3 \\ &\quad (i, j = 1, 2, 3).\end{aligned}\quad (15)$$

上式可改写为

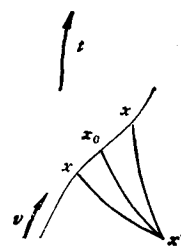


图 1

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{01}^2}{g_{11}} - \frac{g_{02}^2}{g_{22}} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} \right) dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j |_{i \neq j} + g_{11} \left(dx^1 + \frac{g_{01}}{g_{11}} dt \right)^2 + g_{22} \left(dx^2 + \frac{g_{02}}{g_{22}} dt \right)^2 + g_{33} \left(dx^3 + \frac{g_{03}}{g_{33}} dt \right)^2. \quad (16)$$

大家知道,由于(15)式存在时空交叉项,同时性的定义是有困难的^[8],但如果在(16)式中引入“拖曳”坐标系,即令

$$\frac{dx^1}{dt} = -\frac{g_{01}}{g_{11}}, \quad \frac{dx^2}{dt} = -\frac{g_{02}}{g_{22}}, \quad \frac{dx^3}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}}, \quad (17)$$

则(15)或(16)式化为静态度规

$$ds^2 = \hat{g}_{00} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j |_{i \neq j}. \quad (18)$$

事实上(18)式即相对于“拖曳”坐标系静止的观测者的时空度规.按定义,视界上的重力加速度 k 正是上述观测者的观测值,但此时视界 H^+ 上的 0 矢 l^μ 即类时 Killing 矢量 $k_{(t)}$

$$l^\mu = k_{(t)}^\mu.$$

由 l^μ 是一个 Killing 矢量,即知

$$k_{,\mu} l^\mu = 0^{[9]}. \quad (19)$$

由

$$k = -l_{\mu;v} n^\mu l^\nu$$

或

$$k_{;\lambda} m^\lambda = -(l_{\mu;v} n^\mu l^\nu)_{;\lambda} m^\lambda,$$

可证在视界上

$$k_{;\lambda} m^\lambda = 0^{[10]}, \quad (20)$$

其中 l^μ , m^μ , $\bar{m}^\mu$ 和 n^μ 构成一组独立的零 4 矢.

由(19)和(20)式即知 k 在视界 H^+ 上是一个常数.

又 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{dv} = \frac{dt}{dv} l^\mu$ 满足

$$u_{;\nu} u^\nu = 0. \quad (21)$$

不难由(21)式得出

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{dv}{dt} \right) = k. \quad (22)$$

(22)式的解为

$$v = c^{kt}. \quad (23)$$

由此可知,传播量 Δ_f 在复 v 平面内的解析性可等价地表述为在复 z 平面内的解析性.

设

$$z = \tau + i\sigma,$$

则

$$v = |v| e^{ik\sigma}.$$

故由 $\Delta_f(x, x')$ 在下半复 v 平面内的解析性可知 $\Delta_f(x, x')$ 在复 z 平面的解析区为

$$\frac{(2n+1)\pi}{k} \geq \sigma \geq \frac{2n\pi}{k}$$

和

$$-\frac{(2n+1)\pi}{k} \leq \sigma \leq -\frac{2n\pi}{k}.$$

显然 $\Delta_f(t, \mathbf{x})$ 的解析区在虚时间轴上以周期 $2\pi/k$ 重复出现.

故 (7) 式中沿实 t 轴的积分可改为沿 $t = -i\pi/k$ 的线积分而不改变 (6) 式的意义, 此时

$$\varepsilon_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = e^{-\pi E/k} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} \Delta_f(t - i\pi/k, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'). \quad (24)$$

由 (23) 式知, 把 t 延拓到 $t - i\pi/k$ 相当于把仿射参量 v 延拓到 $v' = -v$, 但在 (23) 式中, 当群参量 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 视界 H^+ 的母线上的仿射参量 v 只能从 0 变到 $+\infty$. 因之, 把 v 延拓到 $v' = -v$, 实质上是引入了一个新视界, 当群参量 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 此新视界的母线上的仿射参量 v' 从 0 变到 $-\infty$, 为了保持新视界的母线上仿射参量的顺时方向, 应引入新仿射参量

$$u = (v')^{-1} = -e^{-kv}$$

以使当群参量 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 仿射参量 u 从 $-\infty$ 变到 0. 我们已知在未来视界 H^+ 上, $k > 0$, 延拓后的新视界等于把 k 变为 $-k < 0$, 显然它只能是一个过去视界 H^- .

把 t 延拓到 $t - i\pi/k$, 实质上是时间反演, 断言 H^+ 的时间反演 H^- 的存在, 等于假定了时空流形在时间反演下的完备性.

总之, 把 (7) 式中积分路径从实 t 轴移到 $t = -i\pi/k$, 相当于把 x 点从未来视界内移到过去视界内, 虽然此时 (5) 式仍代表 H^+ 发射能量为 E 的粒子的几率幅, (24) 式中的传播量 $\Delta_f(t - i\pi/k, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}')$ 却决定自 H^- 发射能量为 E 的粒子的几率幅, 按时间反演不变性, 后者即 H^+ 吸收能量为 E 的粒子的几率幅, 故得

$$[H^+ \text{ 发射能量为 } E \text{ 的粒子的几率}] = e^{-2\pi E/k} [H^+ \text{ 吸收能量为 } E \text{ 的粒子的几率}]. \quad (25)$$

注意到格林函数 Δ_f 是虚时的周期函数,

$$\Delta_f((t + i2\pi/k), \mathbf{R}; t', \mathbf{R}') = \Delta_f(t, \mathbf{R}; t', \mathbf{R}'). \quad (26)$$

而这正是温度格林函数的特征^[11],

$$G_T((t + i\beta), \mathbf{R}; t', \mathbf{R}') = G_T(t, \mathbf{R}; t', \mathbf{R}'), \quad (27)$$

式中 $\beta = 1/kT$, k 是玻耳兹曼常数

由 $\Delta_f = G_T$ 即知道

$$T = \frac{k}{2\pi k}. \quad (28)$$

把 (28) 式代入 (25) 式中, 即知 H^+ 发射能量为 E 的平均粒子数 $\bar{N}$ 遵守热谱公式

$$\bar{N} \sim \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} \pm 1}, \quad (29)$$

式中 $+$, $-$ 号分别与费密子和玻色子相对应. (29) 式正是我们希望得到的霍金蒸发公式.

本文中的个别观点曾与赵峰同志进行过有益的讨论, 谨此致谢.

参 考 文 献

- [1] S. W. Hawking, *Nature*, **248**(1974), 30; *Comm. Math. Phys.*, **43**(1975), 199; J. B. Hartle & S. W.

- Hawking, *Phys. Rev. D*, **13**(1976), 2188; T. Damour, R. Ruffini, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 332;
 刘辽、许殿彦, 物理学报, **29** (1980), 1617; 赵峰、桂元星、刘辽, 天体物理学报, **1** (1981), 141.
- [2] 刘辽、赵峰, 科学通报, **20** (1981), 1253.
- [3] 赵峰, 物理学报, **30** (1981), 1508.
- [4] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **13**(1976), 2188.
- [5] B. S. Dewitt, *Dynamical theory of groups and fields*, Gordon and Breach, (1965), p. 154.
- [6] S. D. Eidel'man, *Parabolic system*, (1969), p. 178.
- [7] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.*, **31**(1973), 161; B. Carter, *Black Hole Equilibrium state*, 见文集 *Black hole* (1972).
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* Pergamon Press, (1975), §88.
- [9] 见文献 [7] 中所引 Carter 论文, p.148, (5.15).
- [10] 见文献 [7] 中所引 Bardeen 等的论文. §2.
- [11] A. A. 阿布里科索夫 等著, 郝柏林译, 统计物理学中的量子场论方法, 科学出版社, (1963); G. W. Gibbons, *An Introduction to Black Hole Thermodynamics*, Preprint, (1980).

FEYNMAN'S PATH-INTEGRAL METHOD AND HAWKING EVAPORATION

LIU LIAO

(Department of Physics, Peking Normal University)

ABSTRACT

Though there are various methods in deriving the Hawking evaporation formula, but all of them depend on explicit forms of the space-time metrics. Not long ago, we have put forward a conjecture. "Independent of the explicit forms of space-time metrics, every static or stationary space-time with future horizon must have Hawking evaporation."

Now in this paper, we give a full proof of this conjecture.