

研究简报

氦核 β 衰变谱形的原子效应修正和中微子质量的测定

庆 承 瑞 何 祚 庠

(中国科学院理论物理研究所)

1981年4月2日收到

提 要

本文在对原子氦 β 衰变到 He^+ 的最低三个能级的跃迁作精密处理后, 用封闭近似计算了其余所有能级的贡献. 得到的较精确的理论谱形和 Lyubimov 等人^[1]所用谱形作了比较. 指出 Lyubimov 等人所用谱形作为确定中微子质量的依据, 其精度不够. 特别是端点能量的定义有含混之处, 这可能也将影响所定中微子质量的数值.

近来, 有关中微子质量的实验引起了广泛的注意. Lyubimov 等人根据 Valine ($\text{C}_5\text{H}_{11}\text{NO}_2$) 中氦的 β 衰变谱邻近端点行为的测定, 得出^[1]

$$14\text{eV} < m_{\nu_e} < 46\text{eV} \text{ 和 } m_{\nu_e} \approx 34 \pm 4\text{eV}. \quad (1)$$

但 Thompson 指出 Lyubimov 等人在分析实验时未考虑 He^+ 离子处于连续态的贡献; 并且在假定电子是平面波的近似下, 估计出连续态所占的概率 P_c 约为 $0.07 < P_c < 0.11$. 由此得出谱形和 $m_\nu = 0$ 时的情况不能区别的结论^[2]. 然而这一估计是不能成立的. 因为只考虑 He^+ 离子的最低三个能级的贡献, 就有

$$\sum_{n=1,2,3} |\langle f_n | i \rangle|^2 = 0.965, \quad (2)$$

而由完备条件, 必有

$$\sum_n |\langle f_n | i \rangle|^2 = 1, \quad (3)$$

其中在 n 内既包括分立态, 也包括连续态. 因此, He^+ 离子中对 β 衰变有贡献的连续态所占权重, 不管怎样计算, 必有

$$P_c < 1 - \sum_{n=1}^3 |\langle f_n | i \rangle|^2 = 0.035. \quad (4)$$

但是, 为了得到较精确的谱形的理论曲线, Lyubimov 等人算式中只取两根能级的做法无论如何不能认为是严密的. 因此, 需要比较准确地对待其余能级, 包括连续态对 β 谱形修正的计算.

由标准的 β 衰变理论可知由始态原子状态 $|i\rangle$ 跃迁到末态原子状态 $|f_n\rangle$ 的 β 跃迁概率为

$$dW_n(E_\beta) = \frac{m_e^5 c^4 g_w^2}{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2} |M_{if}|^2 \langle f_n | i \rangle^2 F(z, E_\beta - V_n) \\ \times \frac{E_\beta - V_n}{E_\beta} \left[\frac{(E_\beta - V_n)^2 - m_e^2 c^4}{E_\beta^2 - m_e^2 c^4} \right]^{1/2} p_\beta E_\beta (W_n - E_\beta) [(W_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4]^{1/2} dE_\beta, \quad (5)$$

其中 M_{if} 是原子核矩阵元, W_n 是跃迁到终态原子 $|f_n\rangle$ 时 β 粒子的端点能量, 其定义为

$$W_n = M_i c^2 - M_f c^2 + E_i - E_{f_n} - E_R, \quad (6)$$

M_i 和 M_f 分别是始末态的原子核质量; E_i 和 E_{f_n} 是始末态原子的结合能; E_R 是原子反冲能量, 对 H^3 的 β 衰变, 近端点时 E_R 约为 3eV. 值得探讨的是, (5) 式中 V_n 值应如何取? 按照 Reitz^[3], Durand^[4] 及 Bachall^[5] 等人的取法, V_n 应为

$$V_n = -E_{f_n} + E_i, \quad (7)$$

但 Bergkvist^[6] 则认为, 虽然 (7) 式的取法是合理的, 但从物理直观来看, 应取

$$V_n = -\langle f_n | H_i - H_f | f_n \rangle. \quad (8)$$

从较严密的复合粒子量子场论^[7]以及相应的微扰展开理论出发^[8], V_n 无疑应取 (7) 式. 因为在渐近的复合粒子量子场论中, 基矢是处于无穷远处的粒子和复合粒子. 对应氦的 β 衰变情况就是 β 粒子和处于各种能态的 He^+ 离子. 这样, 在相空间的计算及库仑因子的修正中, 所差的就是原子结合能. 注意到 (7) 式和 (8) 式虽然不同, 但对谱形的修正都很小.

在 V_n 值如 (7) 式所给的情况下, 将能用封闭近似 (closure approximation) 对 (5) 式的所有 n 态 (包括连续态) 求和. 从 (5) 式可得

$$dN(E_\beta) = \sum_n dW_n(E_\beta) \\ = A \sum_n |\langle f_n | i \rangle|^2 F(z, E_\beta - V_n) \frac{E_\beta - V_n}{E_\beta} \left[\frac{(E_\beta - V_n)^2 - m_e^2 c^4}{E_\beta^2 - m_e^2 c^4} \right]^{1/2} \\ \times p_\beta E_\beta (W_n - E_\beta) [(W_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4]^{1/2} dE_\beta, \quad (9)$$

式中 A 为常数及原子核矩阵元乘积. 在封闭近似下, 有

$$\sum_n |\langle f_n | i \rangle|^2 V_n = \langle i | H_i - H_f | i \rangle = \bar{V}_n \quad (10)$$

和

$$\sum_n |\langle f_n | i \rangle|^2 V_n^2 = \langle i | (H_i - H_f)^2 | i \rangle = \bar{V}_n^2. \quad (11)$$

注意到对 $\text{H}^3 \rightarrow \text{He}^{+3}$ 的跃迁, 恒有 $V_n \ll E_\beta$, 因此 (9) 式中求和号下的前三项均可作泰勒展开, 如

$$F(z, E_\beta - V_n) \cong F(z, E_\beta) - V_n \frac{\partial F}{\partial E} \Big|_{E=E_\beta}, \quad (12)$$

更由于此三项展开式的第二项均极小, 因而在足够的精确度下此三项可取中值并提至求和号外. 同时, 取

$$\theta(W_n - E_\beta - m_\nu c^2) \cong \theta(\bar{W}_n - E_\beta - m_\nu c^2), \quad (13)$$

1) 注意 (5) 式由复合粒子场论的一级微扰展开也可以得到^[7,8]. 因此这一表达式与所谓的 Sudden approximation 并无关系.

这样就得到

$$dN(E_\beta) = AF(z, E_\beta - \bar{V}_n) \frac{(E_\beta - \bar{V}_n)}{E_\beta} \left[\frac{(E_\beta - \bar{V}_n)^2 + \bar{V}_n^2 - m_e^2 c^4}{E_\beta^2 - m_e^2 c^4} \right]^{1/2} p_\beta E_\beta \\ \times \sum_n |\langle f_n | i \rangle|^2 (W_n - E_\beta) [(W_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4]^{1/2} \theta(\bar{W}_n \cdot E_\beta - m_\nu c^2) dE_\beta, \quad (14)$$

式中我们利用了

$$\bar{V}_n^2 = 2\bar{V}_n^2 = 2 \times (27.2)^2 (\text{eV})^2.$$

(14) 式中求和号下的项不能再作泰勒展开。但在 $m_\nu = 0$ 时, 此项求和很易得到

$$\sum_n \langle f_n | i \rangle^2 (W_n - E_\beta)^2 = [(W_0 + \bar{V}_n - E_\beta)^2 + \bar{V}_n^2], \quad (15)$$

$$W_0 = M_i c^2 - M_f c^2 - E_R.$$

在 $m_\nu \neq 0$ 时, 因含有根式, 求和将困难一些。但注意到

$$(W_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4 \leq (W_n - E_\beta) [(W_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4]^{1/2} \\ \leq (W_n - E_\beta)^2 - \frac{1}{2} m_\nu^2 c^4, \quad (16)$$

在 $W_n - E_\beta \geq 2m_\nu$ 后, (16) 式中上限和精确值相差将小于 1%。因此, 在广泛的可测量的区域, 上述根式可用 (16) 式的上限逼近。于是, 我们得到在封闭近似下的 β 粒子平均谱形为

$$dN(E_\beta) \cong AF(z, E_\beta - \bar{V}_n) \frac{(E_\beta - \bar{V}_n)}{E_\beta} \left[\frac{(E_\beta - \bar{V}_n)^2 + \bar{V}_n^2 - m_e^2 c^4}{E_\beta^2 - m_e^2 c^4} \right]^{1/2} \\ \times P_\beta E_\beta [(W_0 + \bar{V}_n - E_\beta)^2 + \bar{V}_n^2 - 0.5m_\nu^2 c^4] \theta(W_0 + \bar{V}_n - E_\beta - m_\nu c^2) dE_\beta. \quad (17)$$

可以看出, 在这一平均的能谱中, 原子效应的修正归结为重新定义了一平均的端点能量 $W_0 + \bar{V}_n$, 以及对中微子引入了某种虚质量 $m_\nu^2 c^4 \cong -2\bar{V}_n^2$!

其实, (17) 式所描述的谱形在邻近端点的区域是很不准的。原因是取了近似式 (13)。较好的方法是将 He^+ 离子的前三个能态的跃迁几率分别准确求出, 仅只对 $n > 3$ 以上的能级用封闭近似求和。对应的谱形将为

$$dN(E_\beta) = AF(z, E_\beta - \bar{V}_n) \frac{(E_\beta - \bar{V}_n)}{E_\beta} \left[\frac{(E_\beta - \bar{V}_n)^2 - m_e^2 c^4}{E_\beta^2 - m_e^2 c^4} \right]^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^3 |\langle f_n | i \rangle|^2 \right. \\ \times (W_0 + V_n - E_\beta) [(W_0 + V_n - E_\beta)^2 - m_\nu^2 c^4]^{1/2} \theta(W_0 + V_n - E_\beta - m_\nu c^2) \\ \left. + \left(1 - \sum_{n=1}^3 |\langle f_n | i \rangle|^2 \right) [(W_0 + \bar{V}_4 - E_\beta) + \bar{V}_4^2 - \bar{V}_4^2 - 0.5m_\nu^2 c^4] \right. \\ \left. \times \theta(W_0 + \bar{V}_4 - E_\beta - m_\nu c^2) \right\} p_\beta E_\beta dE_\beta, \quad (18)$$

其中

$$V_n = \left(\frac{4}{n^2} - 1 \right) \times 13.6 \text{eV}, \quad (19)$$

$$\bar{V}_4 = \left(\bar{V}_n - \sum_{n=1}^3 \langle f_n | i \rangle^2 V_n \right) / \sum_{n>3} \langle f_n | i \rangle^2 = -38.4 \text{eV}, \quad (20)$$

$$\bar{V}_i^2 = \left(\bar{V}_n^2 - \sum_{n=1}^3 \langle f_n | i \rangle^2 \bar{V}_n^2 \right) / \sum_{n=3} \langle f_n | i \rangle^2 = 8867(\text{eV})^2, \quad (21)$$

而

$$\langle f_1 | i \rangle^2 = 0.702, \quad \langle f_2 | i \rangle^2 = 0.250$$

和

$$\langle f_3 | i \rangle^2 = 0.013. \quad (22)$$

从形式上看, 谱形(18)式与(17)式相差很大. 但实际上除邻近端点区外, 两者十分接近. 以 $m_\nu = 0$ 的情况为例: 如取

$$W_0 + \bar{V}_n = 18575\text{eV},$$

则当 $E_\beta \geq 18490\text{eV}$ 后, 两式所给谱形三位有效数字完全相同(图1). 仅在离端点 $\sim 80\text{eV}$ 以内, 两种谱形有差别, 但这一区域也是实验误差较大的地方.

(17)式谱形的优点是可以改造为接近允许跃迁的谱形, 因而有可能用来测定端点能量. 因为如果在居里图的纵轴上引入修正项, 即取纵轴为

$$\left(\frac{dN(E_\beta)}{Ap_\beta E_\beta F(z, E_\beta)} - \bar{V}_n^2 + 0.5m_\nu^2 c^4 \right)^{1/2},$$

其中已知 $\bar{V}_n = 27.2\text{eV}$. 则这时对应的居里描绘应是一直线. 这时如用最小二乘法选取中微子质量拟合实验数据将十分方便. 只是这时必须对 β 谱作绝时测量, 因此将会增加实验的困难. 图2中给出: 引进这种修正的居里描绘和未经修正的是有差别的. 未经修正的居里描绘所对应的端点能量将会偏高. 注意 Bergkvist^[9] 在利用居里描绘确定端点能量时, 对纵轴也作了修正. 但这一修正是经验地引入的, 对应的端点能量 18610eV 有可能偏高.

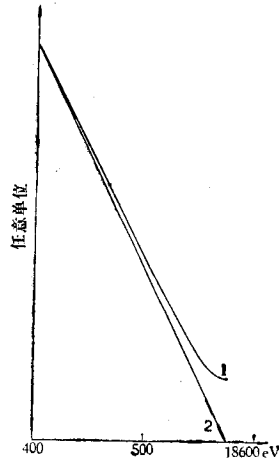


图 1

1——平均谱形; 2——改正后的平均谱形

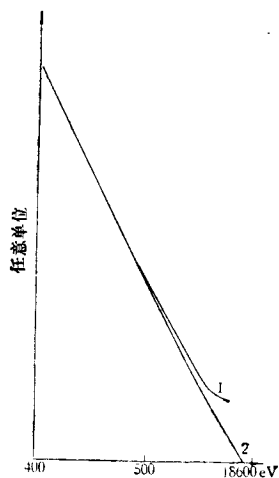


图 2

1——平均谱形; 2——由(18)式给出的谱形

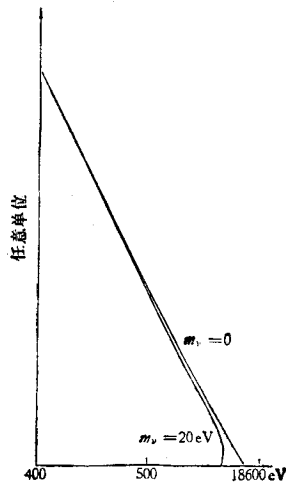


图 3

在 Lyubimov 等人的分析中,除正确考虑了基态的贡献外,第一激发态的能量是唯一地给定的. 对应的谱形在距端点 $\approx 85\text{eV}$ 处和(18)式的谱形相差约1%, ($E_\beta=18490\text{eV}$) 另一方面,取中微子质量 $m_\nu = 20\text{eV}$ 后,对应此点值和 $m_\nu = 0$ 的相差约3% (图3). 因此,为了精确测定中微子质量, Lyubimov 所用理论谱形显然过于粗糙.

Lyubimov 等人分析中的另一问题是在于端点能量的确定. 按照 Bergkvist^[9] 的方法利用较高一般谱形所得到的端点能量应为平均激发能 $\bar{V}_n$ 所对应的跃迁能量,即

$$\bar{E}_0 = W_0 + \bar{V}_n.$$

因此如果利用这样得到的能量代入二能级的谱形式中时,对应 E_0 和 $\bar{E}_0$ 的关系为

$$E_0 = \bar{E}_0 - \bar{V}_n + V_1 = \bar{E}_0 + 13.6\text{eV}. \quad (23)$$

而端点能量的这一移动很可能使所测得的中微子质量也将上下浮动约十余个 eV, 因为 E_0 和 m_ν 都是同时作为待定参数去拟合实验的. 当然,如果认为 Lyubimov 所用 E_0 并非平均的跃迁能量,而确是对应到基态的跃迁能量. 那末由他们所定的 $E_0 = 18575\text{eV}$ 可以推算出 $\bar{E}_0$ 应为 18561eV . 这一数值就将和 Bergkvist 的结果相差更大,达 49eV 之多! 这一事实本身说明有关氘核的 β 跃迁谱形急待进一步的测定和澄清.

综合以上讨论,可以作出以下几点结论:

1) 分析氘的 β 谱形较好的式子是本文所给的(18)式,而不是 Lyubimov 等人所用公式.

2) 在测定中微子质量的实验中,精确地决定端点能量将是十分重要的. 现有实验结果分歧过大,相应中微子质量当然也不足为信. 很可能 Lyubimov 等人所得的数值会有上下 10eV 的变化.

为了更准确分析氘的 β 谱形,进一步计算在端点邻域谱形的各项高次修正将是十分必要的. 有关这些问题的讨论将另文发表.

参 考 文 献

- [1] V. A. Lyubimov et al., *Phys. Lett. B*, **94**(1980), 266;
ISV. Akad. Nauk, SSSR, Ser. Fis., **40**(1976), 2026.
- [2] W. J. Thompson, Preprint, (1980).
- [3] J. R. Reitz, *Phys. Rev.*, **77**(1950), 10.
- [4] L. Durand, *Phys. Rev.*, **135**(1964), B 310.
- [5] J. N. Bachall, *Nucl. Phys.*, **75**(1966), 10.
- [6] K. E. Bergkvist, *Physica Scripta*, **4**(1971), 23.
- [7] 何祚麻、黄涛, 物理学报, **23** (1974), 408.
- [8] 何祚麻、张肇西、黄涛, 物理学报, **25** (1976), 215.
- [9] K. E. Bergkvist, *Nucl. Phys. B*, **39**(1972), 317.

A DISCUSSION OF THE ATOMIC EFFECT IN THE β -DECAY OF ${}^3\text{H}$ AND THE NEUTRINO MASS

QING CHENG-RUI HE ZUO-XIU

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In evaluating the β -spectrum of atomic ${}^3\text{H}$, a more accurate formula is obtained, in which the first three transitions leading to the lowest three states of ${}^3\text{He}^+$ are treated exactly, and the closure approximation is used to estimate the contribution from all excited states with $n > 3$. The formula thus obtained is compared with that used by Lyubimov et al.^[1] in determining the neutrino mass. As a result, it has been shown that the formula used by Lyubimov et al. does not yield an adequate accuracy. Especially the end-point energy they obtained may differ from the true value by 13.6 eV, which would cause an uncertainty of the same order in the value of the neutrino mass.