

随机磁场对波驱动电流的影响

夏 蒙 芬

(北京大学理论物理研究所)

仇 韵 清

(北京大学物理系)

1982 年 2 月 25 日收到

提 要

本文在准线性理论上考虑随机磁场对波驱动电流的影响, 计算了随机磁场对波驱动电流、波的共振耗散功率及波驱动电流的效率的修正。结果表明, 在等离子体的中心区和梯度区其效应是不同的。对高相速、宽谱情形, 这种效应是重要的。

为了实现稳态托卡马克聚变堆, 近年来, 人们对于波驱动等离子体电流的效应进行了一系列的讨论, 参见文献 [1], [2] 及其引文。波与等离子体相互作用是等离子体中的一种重要的基本过程, 但这种过程在实际等离子体中往往与其它过程有密切联系。例如, 随机磁场引起的反常输运效应是托卡马克等离子体中极为重要的一种过程, 参见文献 [3] 及其引文。随机磁场将改变电子分布函数, 而波的作用往往对电子分布函数是敏感的。因此, 随机磁场可对波与等离子体的耦合发生重要影响。近来有人开始注意到了这方面的问题。在文献 [4] 中讨论了随机磁场对波加热等离子体效应的影响。在文献 [5] 中计算了随机磁场对波驱动电流效率的修正。本文将讨论随机磁场对波驱动电流、波的共振耗散效率及波驱动电流的效率等的影响。结果表明, 在等离子体的不同区域中, 随机磁场对波驱动电流的效应有不同的影响。在等离子体的中心区, 随机磁场使电流密度及耗散功率密度下降, 但驱动效率提高; 在梯度较大的外层区域, 其影响则与中心区相反。总的趋势是使载流区及功率沉积区向外层移动。

通常, 在讨论波驱动电流时, 假定稳态电流是由波的驱动效应与库仑碰撞效应之间的平衡而建立起来的。然而, 由于碰撞效应随着速度增大而下降, 而随机磁场效应随着速度增大而迅速增强, 因此, 在速度较高的区域随机磁场可能有重要影响。为了反映随机磁场的效应, 可在描写波驱动电流的准线性扩散方程中引入随机磁场项。假定波的驱动效应、库仑碰撞效应及随机磁场效应是统计独立的, 则电子的动力论方程可表达为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{D}f + \hat{C}f + \hat{S}f. \quad (1)$$

(1) 式右端各项依次是波驱动项、碰撞项及随机磁场项, f 是电子分布函数。为简单起见, 在速度空间及位形空间中均取一维模型, 即

$$f = f(x, v). \quad (2)$$

x 是空间不均匀方向, v 是电子速度在零级磁场方向(z 方向)的分量.

我们将以准静电波通过契伦柯夫共振驱动电流为例进行讨论. 此时, 波驱动项为^[1]

$$\begin{aligned} \hat{D}f &= \frac{\partial}{\partial v} D_r \frac{\partial}{\partial v} f \quad v_1 \leq v \leq v_2; \\ &= 0 \quad v < v_1 \text{ 及 } v_2 < v. \end{aligned} \quad (3)$$

这里

$$D_r = \pi \frac{c^2}{m_e^2} \int d\mathbf{k} |E_{kx}|^2 \delta(\omega - k_{\parallel} v). \quad (4)$$

在(3)式中, $v_1 \leq v \leq v_2$ 是共振区. 以下我们将假定共振区处于高于电子热速度的区域, 即 $v_e < v_1$, 其中 $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$ 是电子热速度.

碰撞项取为^[2]

$$\hat{C}f = \frac{\partial}{\partial v} \nu(v) \left(v f + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \nu(v) &= \nu_e \frac{v_e^3}{(v^2 + v_e^2)^{3/2}} \\ &\simeq \nu_e \frac{v_e^3}{v^3}, \quad \text{对 } v_e < v. \end{aligned} \quad (6)$$

ν_e 相当于电子平均碰撞频率.

随机磁场项为^[3]

$$\begin{aligned} \hat{S}f &= \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0 a v}{2(v^2 + v_0^2)^{3/2}} f \\ &+ \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{D_0}{(v^2 + v_0^2)^{1/2}} f. \end{aligned} \quad (7)$$

上式中各符号的意义见文献[3]. 由于在现在的问题中, 重要的是 v 较大的区域, 因而双极电场的效应可以不考虑(即取 $a = 0$), 同时, v_0 的效应也可略去. 于是, 随机磁场项可以简化为

$$\hat{S}f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_0 |v| f. \quad (8)$$

对于稳态情形, 方程(1)变为

$$\hat{D}f + \hat{C}f + \hat{S}f = 0. \quad (9)$$

稳态方程(9)的具体形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} D_r \frac{\partial}{\partial v} f + \frac{\partial}{\partial v} \nu(v) \left(v f + \frac{v_e^2}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_0 |v| f = 0 \quad v_1 \leq v \leq v_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \nu(v) \left(v f + \frac{v_e^2}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_0 |v| f = 0 \quad v < v_1 \text{ 及 } v_2 < v. \quad (11)$$

方程(10)和(11)分别是稳态方程在共振区和非共振区的形式.

我们将考虑波足够强的情形. 此时, 在共振区的方程(10)中主要是波驱动项. 在零级近似下, (10)式中可只保留波驱动项. 这是饱和极限情形, 分布函数在共振区被拉成平台形式. 波驱动电流主要由方程的零级解决定. 为了计算波的共振耗散功率, 则在(10)式中必须保留碰撞项和随机磁场项.

随机磁场的效应联系于参量 $g = \frac{D_0 v_e}{v_e r_p^2} \sim \frac{1}{v_e \tau_E}$, 并与速度范围有关 (r_p 是等离子体

截面的特征半径, τ_E 是随机磁场决定的电子能量约束时间). 在通常条件下, $g \ll 1$. 于是随机磁场引起的分布函数的改变可作为修正项处理. (当速度很大时不能作为修正项处理, 但 v 很大的区域分布函数的值已降得很低, 不起重要作用.)

方程(10)与(11)的零级解为(速度部分)

$$\begin{aligned} f(u) &\cong \alpha \left\{ 1 + \frac{D_0 v_e}{2v_e} \left[\frac{1}{3} \frac{T''}{T} u^6 + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u^8 \right] \right\} f_M(u) \quad u < u_1, \\ &\cong \alpha \left\{ 1 + \frac{D_0 v_e}{2v_e} \left[\frac{1}{3} \frac{T''}{T} u_1^6 + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right] \right\} f_M(u_1) \quad u_1 \leq u \leq u_2, \\ &\cong \alpha \left\{ \left[1 + \frac{D_0 v_e}{2v_e} \left(\frac{1}{3} \frac{T''}{T} u_1^6 + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right) \right] e^{-(u_1^2 - u_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_0 v_e}{2v_e} \left[\frac{1}{3} \frac{T''}{T} (u^6 - u_2^6) + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 (u^8 - u_2^8) \right] \right\} f_M(u) \quad u_2 < u. \end{aligned} \quad (12)$$

这里 α 是归一化常数, u 为约化速度,

$$u = v/v_e, \quad (13)$$

而 f_M 是平衡分布,

$$f_M(u) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_e} e^{-u^2}. \quad (14)$$

由(12)式可以看出, 随机磁场对分布函数的修正由联系于 (T''/T) 的项和联系于 $(T'/T)^2$ 的项两部分组成. 对于具有通常剖面(钟型或高斯型经向分布)的托卡马克等离子体, 其内部一般可划分为两个区域: 中心区, 此处 $T' \sim 0$, 主要是 (T''/T) 项的贡献, 并有 $T'' < 0$; 梯度区, 这是指中心区以外梯度较大的区域, 此处主要是 $(T'/T)^2$ 项的贡献. 随机磁场的效应在这两个区域中是相反的. 在中心区, 随机磁场使分布函数的尾部压低, 共振区平台的高度也下降; 而在梯度区则恰相反.

由分布函数(12)式可确定波驱动的稳态电流密度, 这样得到的是电流密度的饱和值. 以约化量表示, 结果为

$$J = \frac{j}{-n_0 e v_e} \cong J_0 \left\{ 1 + \frac{D_0 v_e}{2v_e} \left[\frac{1}{3} \frac{T''}{T} u_1^6 + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right] \right\}, \quad (15)$$

其中

$$J_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} (u_2^2 - u_1^2) e^{-u_1^2} \quad (16)$$

是无随磁场时波驱动电流密度. 由(15)式可以看出, 随机磁场使中心区的电流密度下

降,使梯度区的电流密度增大. 这种变化趋势是零级分布函数的形态所决定的. 因此,随机磁场对波驱动的电流的影响是使之从中心区向外层转移.

为了讨论随机磁场对波的共振耗散功率的影响,在共振区方程(10)中不能取零级近似,而必须保留碰撞项和随机磁场项. 波的共振耗散功率密度可表达为

$$p = -m_e \int_{v_1}^{v_2} dv v D_r \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (17)$$

由方程(10),对于波谱比较窄的情形,波的共振耗散功率密度(以约化值表示)为

$$P = \frac{p}{v_e n_0 T_e} \cong P_0 \left\{ 1 + \frac{D_0 v_e}{2 v_e} \left[\frac{T''}{T} u_1^6 + \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right] \right\}, \quad (18)$$

其中

$$P_0 \cong 2\alpha \frac{(u_2 - u_1)}{\sqrt{\pi} u_1} e^{-u_1^2} \quad (19)$$

是无随机磁场时的共振耗散功率密度. 由(18)式可以看出,随机磁场对波的共振耗散功率密度的影响与对电流密度的影响有相同的趋势. 在中心区,随机磁场使波的耗散功率密度下降,而在梯度区则使之增大. 因此,随机磁场的效应是使波的能量沉积向外层区域移动. 比较(15)式与(18)式,可以看出随机磁场对电流密度和功率密度的相对修正有相同的量级,但功率密度的变化比电流密度的变化更大一些.

由(15)式与(18)式,可以求得有随机磁场时波驱动电流效率的表达式

$$\eta = \frac{J}{P} \cong \eta_0 \frac{1 + \frac{D_0 v_e}{2 v_e} \left[\frac{1}{3} \frac{T''}{T} u_1^6 + \frac{1}{4} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right]}{1 + \frac{D_0 v_e}{2 v_e} \left[\frac{T''}{T} u_1^6 + \left(\frac{T'}{T} \right)^2 u_1^8 \right]}, \quad (20)$$

其中

$$\eta_0 = \frac{J_0}{P_0} \cong \frac{1}{2} u_1^2 \quad (21)$$

是无随机磁场时的驱动效率. 由(20)式容易看出,在中心区,随机磁场使波驱动电流的效率提高,这与文献[5]的结果一致. 但这并不表示随机磁场在中心区对驱动电流带来有利的影响,因为单看驱动效率是不能完全说明问题的. 事实上,前面已经指出,随机磁场的效应是使中心区的电流密度下降,效率提高仅仅是由于耗散功率密度的下降更多一些. 在梯度区,随机磁场则使驱动电流的效率下降.

以上讨论的是随机磁场对共振效应驱动的电流的影响. 由(15)式可求得随机磁场在中心区引起的相对修正为

$$|\Delta J|/J_0 \sim \frac{D_0 v_e}{6 v_e} \left| \frac{T''}{T} \right| u_1^6. \quad (22)$$

假定能量约束时间 τ_E 由随机磁场引起的电子热导决定,则 $\tau_E \sim r_p^2 / 4 D_0 v_e$, 其中 r_p 为等离子体柱的特征半径. 近似地取 $|T''/T| \sim 2/r_p^2$. 则(22)式可写成

$$|\Delta J|/J_0 \sim \frac{1}{12} \frac{1}{\tau_E v_e} u_1^6. \quad (23)$$

(22)或(23)式表明,随机磁场的效应对 u_1 的大小是很敏感的.

波还可通过非共振效应驱动电流。由于这种驱动效应对分布函数的细节是不敏感的,因此,随机磁场效应一般不带来重要的修正。

在文献[1]中曾指出,波驱动电流有两种运行方式:一种是以共振效应驱动的电流为主;另一种是以非共振效应驱动的电流为主。非共振电子电流可表达为^[1]

$$J_{nr} = A \frac{\omega}{2u}, \quad (24)$$

其中, A 是量级为 1 的系数, ω 为相对波能密度, u 为平均相速度, 有 $u \sim u_1 + \frac{1}{2} \Delta u$. 将 (24) 式与 (16) 式比较, 得

$$\frac{J_{nr}}{J_0} \sim \frac{2\sqrt{\pi} A \omega}{(2u_1 + \Delta u)^2 \Delta u e^{-u_1^2}}. \quad (25)$$

一般说来, 共振速度越低 (u_1 小), 谱越宽 (Δu 大), 则共振效应驱动的电流所占比例越大。取 $A \sim 1$, $\omega \sim 10^{-2}$. 对 $u_1 = 2.5$ 情形, 若 $\Delta u > 0.6$, 则有 $J_{nr}/J_0 < 1$; 对 $u_1 = 3$ 情形, 若 $\Delta u > 3.4$, 则有 $J_{nr}/J_0 < 1$; 当 $u_1 = 3.5$ 时, 要有 $\Delta u > 15.2$, 才有 $J_{nr}/J_0 < 1$. 因此, 在窄谱、低相速情形, 或高相速、宽谱情形, 可以实现以共振电流为主的运行方式。一般说来, 高相速、宽谱的情形可以有较高的驱动效率。在这种情况下, 由于共振速度较高, 随机磁场的影响将可能是重要的。

目前, 在用低混杂波驱动托卡马克电流的实验中, 窄谱 ($\Delta u < 1$) 与宽谱 ($\Delta u \gg 1$) 均有人采用。例如, 在 Octopole^[6] 中, $\Delta u \sim 0.6$; 在 Versator II^[7] 中, $\Delta u \sim 2.8$; 在 ACT-1^[8] 中, $\Delta u \sim 8$; 在 WT-2^[9] 中, $\Delta u \sim 6-14$.

在理论研究及探索波驱动的托卡马克聚变堆的工作中, 窄谱模型与宽谱模型也都有人采用。在文献[10]中, 认为在中等尺度的托卡马克聚变堆中, 波只能驱动表面电流。在文献[11]中, 对强场聚变堆得到峰在中心的电流分布, 但由于各种因素的限制, 认为只能采用窄谱的波。

由于波驱动电流的问题尚处于探索阶段, 各种因素的影响还都是很不清楚的。波驱动的托卡马克聚变堆, 也只进行了初步的探索, 很多问题都尚未得到明确的结论。例如, 即使采用宽谱低杂波在中心区驱动电流是困难的, 也不排斥采用其它模式的静电波实现这种方案的可能性。因此, 分别对窄谱和宽谱情形考察一下随机磁场对波驱动电流(特别是中心区)的影响不是没有意义的。

取一组典型参量: $\bar{n}_0 \sim 2 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, $T_e \sim 2 \text{keV}$, $r_p \sim 30 \text{cm}$ 及 $q_a \sim 3$. 在这种参量下, 有 $\nu_e \sim 1.3 \times 10^4 \text{sec}^{-1}$, 而由 Alcator 定标, 可估计出 $\tau_E \sim 16 \text{ms}$. 由 (23) 式, 得到

$$|\Delta J|/J_0 \sim 4 \times 10^{-4} u_1^6. \quad (26)$$

(26) 式适用于共振效应驱动的电流为主的情形。对窄谱情形, 要求相速度足够低, 若取 $u_1 \sim 2$, 则得 $|\Delta J|/J_0 \sim 2.6\%$. 对于波谱比较宽的情形, 可以采用较高的相速。当 $u_1 \sim 3$ 时, 可得到 $|\Delta J|/J_0 \sim 30\%$; 当 $u_1 \sim 3.5$ 时, 可得到 $|\Delta J|/J_0 \sim 74\%$. 这个结果表明, 对窄谱情形 ($\Delta u < 1$), 随机磁场对中心区电流的影响一般是不重要的; 而对于高相速、宽谱 (例如 $u_1 > 3$, $\Delta u > 3$) 的波驱动共振电子电流的情形, 随机磁场的影响可能是重要的。

参 考 文 献

- [1] 夏蒙芬、张承福, 物理学报, **30**(1981), 1307.
- [2] 夏蒙芬、胡慧玲, 物理学报, **31**(1982), 150.
- [3] 夏蒙芬、胡慧玲, 物理学报, **29**(1980), 1254.
- [4] V. S. Chan *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 1165.
- [5] R. W. Harvey *et al.*, *Nucl. Fusion*, **21**(1981), 153.
- [6] R. J. LaHaye *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 218.
- [7] S. C. Luckhardt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 152.
- [8] K. L. Wong *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 117.
- [9] M. Nakamura *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1902.
- [10] D. A. Ehst, *Nucl. Fusion*, **19**(1979), 1369.
- [11] S. Y. Yuen *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 159.

THE EFFECTS OF STOCHASTIC MAGNETIC FIELD ON THE WAVE-DRIVEN CURRENT

XIA MENG-FEN

(Institute of Theoretical Physics, Peking University)

QIU YUN-QING

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The effects of stochastic magnetic field on the wave-driven current are studied. It is shown that in the central region of the plasma the current density and the dissipative power density of the waves will decrease, and the efficiency will increase. In the gradient region (outer region), however, the current density and the power density will increase, and the efficiency will decrease. These effects may be important for the tokamaks driven by the waves with high phase velocity and wide resonance width.