

表 3 给出了以不同能量 E_0 为初值时的 Δn_{ij} 计算结果. 由表 3, 二级校正项确比零级近似项小二个数量级以上. 表中二级校正项与一级校正项甚相近, 可能是由于我们假定了表示式(31), 造成初值 E_0 时的截断误差项包含在二级校正项内之故. 至于 E_0 的选取, 可以按计算所能达到的精度来考虑确定. 表 3 表明, 选择在 $E_0 = 0.05\text{keV}$ 附近是适宜的. 对于不同离子入射到不同靶情形, E_0 应分别选定.

工作中, 王德宁同志多次参与讨论并提供宝贵意见, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] J. Lindhard and M. Scharff, *Phys. Rev.*, **124**(1961). 128.
- [2] J. Lindhard, M. Scharff and H. Schiøtt, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **33**(14) (1963).
- [3] J. B. Sanders, *Can. J. Phys.*, **46**(1968), 455.
- [4] W. S. Johnson and J. F. Gibbons, *Appl. Phys. Letters*, **9**(1966). 321.
- [5] J. F. Gibbons, *Proc. IEEE*, **56**(1968), 295.
- [6] K. B. Winterbon, P. Sigmund and J. B. Sanders, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **37**(14) (1970).
- [7] D. K. Brice, Sandia Lab. Research Reports (Solid State Sciences), SC-RR-710599, (S pt. 1971).
- [8] S. Furukawa, H. Matsumura and H. Ishiwara, *Japan. J. Appl. Phys.*, **11**(1972), 134.
- [9] J. F. Gibbons, W. S. Johnson and S. M. Mylroie, *Projected Range Statistics*, 2nd ed., Halstead Press, (1975).
- [10] K. B. Winterbon, *Rad. Effects*, **30**(1976), 85.
- [11] K. B. Winterbon, *Rad. Effects*, **30**(1976), 199.
- [12] 王渭源、徐景阳等, 物理学报, **28** (1979), 684.
- [13] 王渭源、乔镛等, 物理学报, 待发表.
- [14] 王德宁、程兆年、王渭源, 物理学报, **29** (1980), 1452.
- [15] K. B. Winterbon, *Rad. Effects* **13**(1972). 215.
- [16] J. Lindhard and A. Winther, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **34**(4) (1964).
- [17] 中国科学院计算技术研究所编, 计算方法讲义, 第二章 §9, 科学出版社, (1958).

CALCULATION OF RANGE STATISTIC PARAMETERS FOR IONS IMPLANTED IN GaAs

CHENG ZHAO-NIAN ZHU WEN-YU WANG WEI-YUAN
(Shanghai Institute of Metallurgy, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based on successive correction method, we have solved LSS equation numerically and calculated the range statistic parameters R_p , ΔR_p and $R_{1/2}$ for ions implanted in GaAs. We propose simple formulas for initial values in calculating R_p , ΔR_p and $R_{1/2}$; by using these formulas, the zero-energy divergence can be avoided and sufficient accuracy achieved. The expressions for β -integration are given to save computation time. Our numerical method and computer program can also be used to other ion-target systems.

超导弱连接中的 Josephson 电流在 一个磁通量子内的振荡 (II)

单 结 超 导 环

陈 赓 华¹⁾ 张 裕 恒

(中国科学技术大学物理系, 合肥)

1981 年 8 月 27 日收到

提 要

本文指出处在高 Q 值谐振腔中的单结超导环, 当 Josephson 电流的 n 次倍频与外腔发生谐振时, 由于在腔内形成的驻波电磁场对单结超导环自身的反馈作用, 将导致在原来的以 ϕ_0 为周期的超流电流锯齿波振荡上迭加一个周期为 ϕ_0/n , 振幅为锯齿波振幅的 $2/n\pi$ 的正弦形小振荡。

一、引 言

在文献[1]中, 我们已经给出了处在高 Q 值外空腔里的 Josephson 结中的超流电流随磁场作周期小于一个磁通量子的振荡结果。这里我们给出对于单结超导环的类似结果。

在随时间线性变化的外磁场的作用下, 由于类磁通量子化效应, 单结超导环在相邻的宏观量子态之间不断地发生跃迁, 因而将产生电磁辐射。当这个电磁辐射中 n 次倍频分量与谐振腔发生共振时, 它所激起的驻波电磁场将反馈作用到超导环上。仍由于类磁通量子化效应, 这一反馈作用使单结超导环中的超流电流随外磁通产生周期小于一个磁通量子的振荡。

二、单结超导环中超流电流的小周期振荡

我们考虑含有一个弱连接的超导环路(单结 SQUID), 使用 mks 制, 类磁通量子化可写成

$$\oint_{\text{回路}} \frac{m}{ne^2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} + \Phi = k\phi_0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{J} = ne\mathbf{V}$ 为超电流密度, n , e , m 和 $\mathbf{V}$ 分别为超流电子数密度、电荷、质量和速度,

1) 中国科学技术大学物理系研究生。

Φ 为穿过环的总磁通, $\phi_0 = h/2e$ 为磁通量子, k 为整数.

设弱连接结面线度远小于穿透深度, 所以电流在结面 σ 上可看作均匀分布. 令 l 表示弱连接的有效长度, 则(1)式可以写为

$$\frac{mJl}{ne^2} + \Phi = k\phi_0.$$

定义一个无量纲参数 $\gamma = (m/ne^2)(l/\sigma L)$, σ 为结的截面积, L 为超导回路的电感, 则类磁通量子化可表述成

$$\gamma LI + \Phi = k\phi_0. \quad (2)$$

总磁通 Φ 应该是外场引起的磁通 Φ_e 和环流 I 产生的磁通 LI 之代数和,

$$\Phi = \Phi_e + LI. \quad (3)$$

由(2)和(3)式解出 I 作为外磁通 Φ_e 的函数,

$$I = -(\Phi_e - k\phi_0)/L(1 + \gamma). \quad (4)$$

由于弱连接的最大超流电流 I 受到 $|I| \leq |I_c| = J_c\sigma$ 的限制, 因而对于一个给定的 k 值, Φ_e 和 Φ 都被限制在一定的范围内变化.

令 $L_R = L(1 + \gamma)$ 为超导环路的有效电感, 则环电流

$$I = -(\Phi_e - k\phi_0)/L_R. \quad (5)$$

对于大部分宏观尺寸的超导环, γ 与 1 比较为小量. 对于线度与穿透深度可比较的环, γ 与 1 可以比拟.

一般讲, 超流电流密度与超流电子速度有关^[2],

$$J = J_c \sin \left(\hbar^{-1} \int 2m\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \right),$$

式中 J_c 为最大超流电流密度, 积分是从弱连接的一边到另一边. 上式也可写成

$$\int_{\text{弱连接}} 2m\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \hbar \sin^{-1}(I/I_c).$$

考虑到 $J = neV$, 类磁通量子化的表式(1)又可写成

$$\begin{aligned} \int_{\text{弱连接}} 2m\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= k\hbar - \oint 2e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= k\hbar - 2e\Phi. \end{aligned}$$

所以

$$\hbar \sin^{-1}(I/I_c) = k\hbar - 2e\Phi.$$

用(2)式, 消去上式的 Φ , 可得

$$\hbar \sin^{-1}(I/I_c) = 2e\gamma LI$$

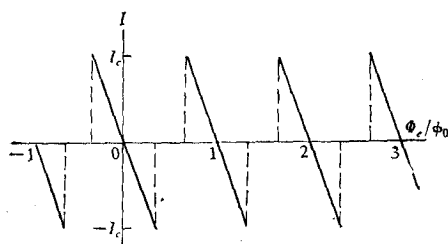
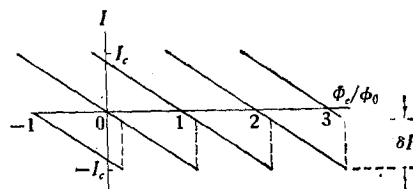
即

$$\gamma = (\phi_0/2\pi LI) \sin^{-1}(I/I_c).$$

可见, γ 是电流 I 的函数, 所以一般地说 L_R 也是 I 的函数, 但为了方便起见, 下面我们把 L_R 看作常量, 因此由(5)式可知, 对于给定的 k 态, I 线性地依赖于 Φ_e .

图1给出了在我们所取的线性模型下 I - Φ_e 的关系. 其中每一条斜线对应于环的一个量子态, 斜线与横轴交点为量子数 k .

1) 在 $I_c < \phi_0/2L_R$ 时, 当 Φ_e 沿一个方向变化(例如增大)使 $|I|$ 达到 I_c 时, 不存在可

图 1 $I_c < \phi_0/2L_R$ 时, I 随 Φ_0 的变化图 2 对于 $I_c > \phi_0/2L_R$, 当 Φ_0 增大时, 环的量子态之间的跃迁

发生跃迁的超导量子态,因而弱连接转变到正常态, I 降到零, $\Phi = \Phi_c$, 总磁通随外磁通连续变化,不出现 Φ 的量子化效应。

2) 在 $I_c \geq \phi_0/2L_R$ 时, 设一开始超导环处于某一个量子态 k 的 $\Phi_c = k\phi_0$ 点, 当 Φ_c 在正方向上连续变化时, I 反向增大, 当 I 达到 $-I_c$ 时, 系统向 $k+1$ 态跃迁。在跃迁过程中, 系统的自由能减少, 因而转变是不可逆的^[3]。由 (5) 式可知每次跃迁中超流电流跳变值为 (见图 2)

$$(\delta I)_{k, k+1} = \phi_0/L_R. \quad (6)$$

假设电流在跳变过程中, 通过电感随时间指数衰减, 则可知跳变具有时间常数 $\tau = L/R$ 。又因为流过弱连接的最大超流电流近似地为^[4]

$$I_c \simeq \Delta/R,$$

其中 Δ 是用电压表示的能隙参数, R 是弱连接处在正常态时的电阻。因而可以估计出

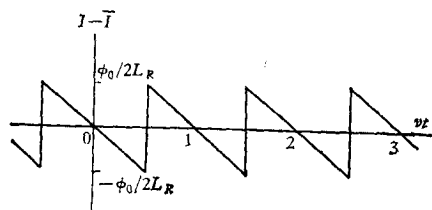
$$\tau \simeq LI_c/\Delta. \quad (7)$$

取 $LI_c \sim \phi_0 = h/2e \simeq 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb}$, Δ 取典型数值 10^{-3}V , 则时间常数 $\tau \simeq 2 \times 10^{-12} \text{sec}$ (对应于 500GHz)。

为了得到锯齿波电流, 我们使外磁通 Φ_c 随时间 t 线性变化

$$\Phi_c = \phi_0 \nu t. \quad (8)$$

用 $\bar{I}$ 表示超流电流 I 的平均值, 适当选择时间起始点, $(I - \bar{I})$ 随 t (或 Φ_c) 变化的波形由图 3 给出。当频率 $\nu \ll \Delta/\phi_0$ ($\sim 500 \text{GHz}$) 时, 可以认为电流的跳变是瞬时的, 下面仅考虑此种情况。

图 3 外磁通 Φ_c 随时间 t 线性变化 $\Phi_c = \phi_0 \nu t$ 时的电流波形

在 $k=0$ 量子态, 有

$$I - \bar{I} = -\frac{\phi_0 \nu}{L_R} t \quad \left(-\frac{1}{2\nu} < t < \frac{1}{2\nu}\right). \quad (9)$$

将 I 作 Fourier 展开, 得到

$$I = \bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_0}{L_R} \cdot \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin(2n\pi\nu t). \quad (10)$$

现在考虑超导环处于一个谐振腔中, 设空腔的第 r 个本征模的频率为 ω_r 。在频率为 ω 的正弦电流源激励下, 电场等于

$$\mathbf{E}_r(t) = \frac{i\omega \int_V \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\xi}_r dV}{\varepsilon(\omega^2 - \omega_r^2 - i\omega_r^2/Q)} \boldsymbol{\xi}_r, \quad (11)$$

式中 ε 为介电常数, $\mathbf{J}$ 为腔体内激励电流密度, Q 为谐振腔的品质因素, $\boldsymbol{\xi}_r$ 为谐振腔的第 r 个电场振动么正模式的空间部分. 积分对腔体空间进行.

在低温情况下, 超导谐振腔具有较大的 Q 值, 我们可以只考虑谐振的情况, 此时 $\omega = \omega_r$, 于是

$$\mathbf{E}_r(t) = - \frac{Q \int_V \mathbf{J}_{\omega_r} \cdot \boldsymbol{\xi}_r dV}{\varepsilon \omega_r} \boldsymbol{\xi}_r. \quad (12)$$

由于在超导环外电流密度 $\mathbf{J} = 0$, 所以上式积分只要对超导环进行即可. 假设环的线度与空腔相比很小, $\mathbf{J}_{\omega_r}$ 在超导环内均匀, $\mathbf{J}_{\omega_r}$ 与环路线元 $d\mathbf{l}$ 同向, 所以积分为

$$\int_V \mathbf{J}_{\omega_r} \cdot \boldsymbol{\xi}_r dV = \int_{S_0} \mathbf{J}_{\omega_r} \cdot d\mathbf{S} \oint_l \boldsymbol{\xi}_r \cdot d\mathbf{l}.$$

$\mathbf{J}_{\omega_r}$ 是弱连接中超流电流密度的 ω_r 频率分量, S_0 是弱连接的截面积, 故

$$\int_{S_0} \mathbf{J}_{\omega_r} \cdot d\mathbf{S} = I_{\omega_r}. \quad (13)$$

是环电流中频率为 ω_r 的分量.

因为电场本征矢量的空间部分 $\boldsymbol{\xi}_r$ 和磁场本征矢量的空间部分 $\boldsymbol{\zeta}_r$ 有关系,

$$\nabla \times \boldsymbol{\xi}_r = k_r \boldsymbol{\zeta}_r, \quad (14)$$

其中 k_r 为第 r 个本征模的波数. 由旋度定理可知

$$\oint_l \boldsymbol{\xi}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{环孔}} \nabla \times \boldsymbol{\xi}_r \cdot d\mathbf{S}.$$

由(14)式, 得

$$\oint_l \boldsymbol{\xi}_r \cdot d\mathbf{l} = k_r \int_{\text{环孔}} \boldsymbol{\zeta}_r \cdot d\mathbf{S}.$$

令

$$\int_{\text{环孔}} \boldsymbol{\zeta}_r \cdot d\mathbf{S} = M_r, \quad (15)$$

它是与环和第 r 个本征模间的耦合有关的量. 这样电场(12)式可表成

$$\mathbf{E}_r(t) = - \frac{Q k_r M_r I_{\omega_r}}{\varepsilon \omega_r} \boldsymbol{\xi}_r. \quad (16)$$

设环电流 I 中基频 $\omega_0 = 2\pi\nu$ 的 n 次倍频与谐振腔的本征频率 ω_r 相等, 即 $\omega_r = n\omega_0$; 用 I_{Σ} 表示存在谐振腔时, 环中的总电流, 则在 I_{Σ} 中频率为 $n\omega_0$ 的分量 $I_n(t)$ 就是谐振腔的激励电流 I_{ω_r} , 即

$$I_{\omega_r} = I_n(t). \quad (17)$$

(17)式代入(16)式, 得电场

$$\mathbf{E}_r(t) = - \frac{Q k_r M_r I_n(t)}{\varepsilon \omega_r} \boldsymbol{\xi}_r. \quad (18)$$

设磁场为

$$\mathbf{H}_r(t) = H_r(t) \boldsymbol{\zeta}_r,$$

其时间部分 $H_r(t)$ 与电场的时间部分 $E_r(t)$ 有关系,

$$H_r(t) = i \frac{k_r}{\omega_r \mu} E_r(t),$$

μ 为导磁率. 因而

$$H_r(t) = i \frac{k_r E_r(t)}{\omega_r \mu} \zeta_r. \quad (19)$$

这个激励磁场对超导环的反作用,使环中除了外加磁通 Φ_e 外,还有一个附加磁通

$$\Phi'_e = \mu \int_{\text{环孔}} H_r(t) \cdot dS.$$

应用(19)及(15)式,得

$$\Phi'_e = i \frac{k_r M_r}{\omega_r} E_r(t). \quad (20)$$

由(18)式中 $\mathbf{E}_r(t)$ 的时间部分 $E_r(t)$, 因而(20)式为

$$\Phi'_e = -i \frac{k_r^2 M_r^2 Q}{\varepsilon \omega_r^2} I_n(t).$$

又因为 $k_r^2 = \omega_r^2 \varepsilon \mu$, 所以得

$$\Phi'_e = -i \mu M_r^2 Q I_n(t). \quad (21)$$

由(5)式可知,在附加磁通 Φ'_e 作用下,超导环路中的电流为

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= -(\Phi_e + \Phi'_e - k\phi_0)/L_R \\ &= -(\Phi_e - k\phi_0)/L_R - \Phi'_e/L_R \\ &= I + I', \end{aligned}$$

则得到附加电流

$$I' = -\frac{\Phi'_e}{L_R}.$$

应用(21)式

$$I' = i \frac{QM_r^2 \mu}{L_R} I_n(t). \quad (22)$$

令

$$\mathcal{J} = i \frac{QM_r^2 \mu}{L_R}, \quad (23)$$

附加电流 I' 可写成

$$I' = \mathcal{J} I_n(t). \quad (24)$$

由此可见,由于在总环流中存在频率为 $n\omega_0 = \omega_r$ 的分量 $I_n(t)$, 它与空腔谐振时激发的电磁场反作用于超导环,引起了附加电流 I' . 所以超导环中的总电流为

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= I + I' \\ &= I + \mathcal{J} I_n(t). \end{aligned} \quad (25)$$

上式两边频率为 $n\omega_0$ 的分量相等,

$$I_n(t) = I_n^0(t) + \mathcal{J} I_n(t),$$

得

$$I_n(t) = \frac{1}{1 - \mathcal{J}} I_n^0(t), \quad (26)$$

其中 $I_n^0(t)$ 是谐振腔不存在时, 环电流中频率为 $n\omega_0$ 的分量. (26) 式代入 (25) 式得

$$I_{\Sigma} = I(t) + \frac{\mathcal{J}}{1 - \mathcal{J}} I_n^0(t). \quad (27)$$

我们取较好的匹配值 $M^2 \sim 10^{-6}$, 及 $L_R \sim 10^{-10}$ H, $\mu \sim \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Wb/(A · m), 则由 (23) 式得

$$\mathcal{J} = i1.26 \times 10^{-2} Q.$$

在大 Q 值情况下, 例如 $Q \sim 10^3$, 则 $\mathcal{J} \sim 12.6i$, 有

$$|\mathcal{J}| \gg 1.$$

由 (27) 式, 超导环的总电流可近似地写成

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= I(t) - I_n^0(t) \\ &= I(t) + (-1)^{n+1} \frac{\phi_0}{\pi n L_R} \sin(n\omega_0 t). \end{aligned} \quad (28)$$

这就是在原有的锯齿波上迭加一个正弦形的振荡, 原有锯齿波的周期为 ϕ_0 , 在锯齿波上加进的小振荡周期为 ϕ_0/n ; 原有锯齿波的振幅为 $\phi_0/2L_R$, 小周期振荡的振幅为 $\phi_0/\pi n L_R$. 图 4 给出了 $L_R \sim 10^{-10}$ H, $n = 5$ 时的波形, 其中横轴取 $\nu t = \Phi_c/\phi_0$.

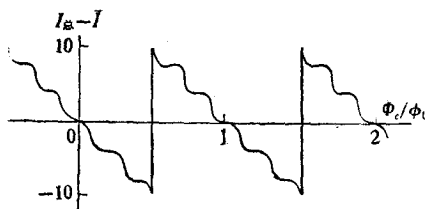


图 4 超流电流随 Φ_c 的小周期振荡

由此可见, 只有在高 Q 值和好的匹配条件下, 才可能观察到处于谐振腔中的单结超导环中的超流电流随外磁通的小周期振荡. 当 $Q \sim 1$ 时,

$|\mathcal{J}| \sim 10^{-2}$, 取 $L_R \sim 10^{-10}$ H 和 $n = 5$ 时, 小振荡的幅值为 $1.3 \times 10^{-2} \mu\text{A}$, 实际上是观测不到的. 由 (23) 式可知, 在匹配很差时, $M^2 \rightarrow 0$, 同样不可能观测到这种小周期振荡.

三、结 论

与 Josephson 结的情况类似, 当环中的超流电流的频率的 n 次倍频与外空腔发生谐振时, 由于谐振腔的驻波电磁场的反馈作用, 在高 Q 值情况下, 可产生周期小于一个磁通量子的振荡. 在 Q 值低或匹配差的情况下, 将得不出小周期振荡.

与 Josephson 结不同的是在超导环中这种小振荡是迭加在原来周期为 ϕ_0 、振幅为 $\phi_0/2L_R$ 的锯齿波振荡上的等周期正弦振荡. 其周期是锯齿波周期的 $1/n$; 振幅是锯齿波振幅的 $2/n\pi$.

参 考 文 献

- [1] 张裕恒、陈康华, 物理学报, **31** (1982), 749.
- [2] B. D. Josephson, *Advan. Phys.*, **14** (1965), 419.
- [3] A. H. Silver and J. E. Zimmerman, *Phys. Rev.*, **157** (1967), 317.
- [4] J. E. Zimmerman and A. H. Silver, *Phys. Rev.*, **141** (1966), 367.

THE SUPERCURRENT OSCILLATIONS WITHIN ONE FLUX QUANTUM PERIOD ϕ_0 FOR WEAK LINKS (II)

THE SUPERCONDUCTING RING CONTAINING A WEAK LINK

CHENG GENG-HUA ZHANG YU-HENG

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

It is pointed out that if a superconducting ring containing a weak link is placed in a cavity, which is in resonant with the current flowing in the ring, i.e., when the frequency of the Josephson current or one of its n -th harmonics is equal to the cavity frequency, and if the cavity has sufficiently high Q -value, then the feedback of the stationary electric-magnetic wave will act on the ring itself and produce a small sinusoidal oscillation superposing on the primary sawtooth wave oscillating current. The period of the small oscillation will be ϕ_0/n and its amplitude that of the sawtooth wave multiplied by $1/n\pi$.

研究简报

二维系统的热力学性质

杜宜瑾 陈立滢 严祖同

(安徽师范大学, 芜湖市)

1981 年 4 月 16 日收到

提 要

为了讨论固体和液体的性质, Kawamura^[1] 曾利用 Collins 模型^[2], 在忽略 4-原子和引力势的情况下, 研究了二维硬盘系统的相变. 本文进一步考虑 4-原子和引力势的存在, 计算了二维系统的热力学函数, 研究了 4-原子所占百分数对相变点的影响, 讨论了物态方程和定压热容量.

一、模 型

Bernal 等人曾经提出^[3], 液体与固体的重要差别在于它不具有象固体的晶格那样的长程有序, 而只具有短程有序. 据此, Collins 提出了一种简化的 Bernal 晶格模型^[2], 它是一种在一个平面内由边长相等的正方形和正三角形所组成的密堆积系统. 根据正方形和正三角形的堆积方式, 可以按原子周围不同的配置情况, 把晶格中的原子分成为 6-原子、5 α -原子、5 β -原子和 4-原子等四种, 如图 1 所示.

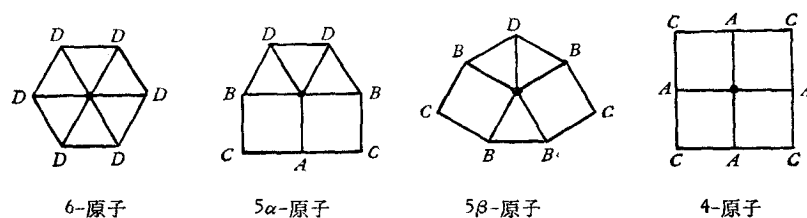


图 1 原子的配置情况

假设晶格中有 N 个原子, 其中 r -原子的数目为 N_r ($r = 4, 5\alpha, 5\beta, 6$), 则有

$$N_4 + N_{5\alpha} + N_{5\beta} + N_6 = N. \quad (1)$$

令 $N_r/N = n_r$, 则

$$n_4 + n_{5\alpha} + n_{5\beta} + n_6 = 1. \quad (2)$$

为了讨论方便起见, 引进变量 x , y 和 m ,

$$n_{5\alpha} + n_{5\beta} = x, \quad n_{5\alpha} = mx, \quad n_{5\beta} = (1-m)x, \quad n_4 = y, \quad n_6 = 1 - (x + y). \quad (3)$$

如果 a_r 代表 r -原子的一个 Wigner-Seitz 原胞的面积, 则系统的总面积 A 为

$$A = N_4 a_4 + N_{5\alpha} a_{5\alpha} + N_{5\beta} a_{5\beta} + N_6 a_6, \quad (4)$$