

迹反常与时间对称性反弹宇宙模型

刘 辽

(北京师范大学物理系)

李 鉴 曾

(北京广播学院)

1982年3月20日收到

提 要

对 $\kappa = 0$ 的共形平直时空, 由共形反常迹计算了物质场真空的单圈项对有效作用量的贡献, 得到一个避免宇宙奇点的时间对称的反弹宇宙解。

一、引 言

按照奇异性的边界理论, 奇异性是一切非类空测地线的不可扩展的边界。因此, 宇宙奇点应表示宇宙演化在时间上有一个开端或终结, 一切事物的因果序列性在这里被割断了, 显然, 这在物理上和哲学上都是难以被接受的。

宇宙奇点是否可以避免? 按奇异性定理^[1], 这涉及在宇宙的极早期, 经典的爱因斯坦重力场方程和强能量条件……等等是否成立。Bekenstein 曾指出^[2], 即使在经典范围, 强能量条件也可能受到破坏; 本文指出, 若考虑到早期宇宙物质真空的量子单圈效应对经典爱因斯坦场方程的修正, 宇宙奇点是可能避免的, 并的确存在一个满足合理要求的时间对称的反弹解 (bouncing model)。

二、单圈近似与有效作用量

按目前通行的半经典近似法^[3], 仅考虑物质场真空的量子单圈贡献时, 有效作用量 Γ 可表为

$$\Gamma(g) = \Gamma_0(g) + \Gamma_1(g), \quad (1)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为经典背景几何, $\Gamma_0(g)$ 为经典作用量, $\Gamma_1(g)$ 为正规化后物质场真空单圈项的贡献。

经典几何应满足场方程

$$\frac{\delta \Gamma(g)}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (2)$$

仅当物质场真空的量子效应(即圈图)或 $\Gamma_1(g)$ 可忽略不计时, (2) 式才是熟知的经

典爱因斯坦重力场方程, 否则, (2) 式就是计及物质场的量子单圈修正后的爱因斯坦重力场方程

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (3)$$

Dubb 等人^[4]利用维数正规化得到共形不变物质场真空的反常迹为

$$T = T_{\mu}^{\mu} = \alpha \square^2 R + \beta \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) + \gamma C_{\mu\nu\lambda\sigma} C^{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (4)$$

式中无量纲常数 α, β, γ 满足关系

$$3\alpha - \beta - 2\gamma = 0.$$

且

$$(2880\pi^2)^{-1} \times \begin{cases} \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \text{标量场,} \\ 6 & 11 & \text{中微子场,} \\ 12 & 62 & \text{电磁场,} \end{cases} \quad (5)$$

由反常迹与单圈项之间的关系

$$\sqrt{g} T = 2g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_1}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (6)$$

即可由 T 决定 Γ_1 , 再代入(2)式, 计及适当的边界条件求解, 即可得到经典几何.

三、量子单圈效应对早期宇宙的影响

我们研究量子单圈项对 $\kappa = 0$ 的 R - W 度规的影响. R - W 度规在 $\kappa = 0$ 时可化为

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2]. \quad (7)$$

这是一个共形平直的宇宙度规, 由(4)式可求出反常迹为^[4]

$$T = 6\alpha \left[-\frac{a^{(4)}}{a^5} + 4\frac{\dot{a}a^{(3)}}{a^6} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a^3}\right)^2 - 6\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^7} \right] + 12\beta \left[\left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^4 - \frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^7} \right]. \quad (8)$$

由(6)式可得

$$\Gamma_1(a) = V \int_0^\infty d\eta \left[-3\alpha \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \beta \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 \right], \quad (9)$$

式中 V 为坐标体积.

把(9)式代入(2)式, 可得一关于 $b(\chi)$ 的三阶四次非线性常微分方程

$$E - 1 = -\dot{b}^2 + \frac{\alpha}{3} \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{b}\dot{b}^{(3)}}{b^2} - \frac{\dot{b}^2\ddot{b}}{b^3} - \frac{1}{4} \left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2 \right] + \frac{\beta}{12} \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^4, \quad (10)$$

式中

$$a(\eta) = l_p \rho_0^{1/4} b(\chi). \quad (11)$$

$\eta = 6^{1/2} \rho_0^{-1/4} \chi$, l_p = Planck 长度, $\rho_0 = \rho a^4(\eta)$, ρ 即充满宇宙的辐射能密度, E 为积分常数.

(10)式就是计及物质场的量子单圈效应后关于宇宙度规 $a(\eta)$ 或 $b(\chi)$ 的爱因斯坦重力场方程.

四、避免宇宙奇点的反弹解

(10)式的解在量子效应可忽略不计的时期应化为 $\kappa = 0$ 的 Friedman 宇宙解, 后者, 当充满辐射时其解为

$$b(\chi) \rightarrow \chi \quad \text{当 } \chi \rightarrow \infty. \quad (12)$$

由(12), (10)式立即可以确定积分常数 $E = 0$.

为了寻求避免宇宙奇点的时间对称的反弹宇宙解. 我们给出在反弹点 $\chi = 0$ 时的反弹条件:

$$b(\chi)|_{\chi=0} = b_0 > 0, \quad \dot{b}(\chi)|_{\chi=0} = 0, \quad \ddot{b}(\chi)|_{\chi=0} > 0, \quad \bar{b}(\chi)|_{\chi=0} = 0, \quad (13)$$

式中最后一个条件是为了保证反弹是时间对称的. 若在反弹点 $\chi = 0$ 的邻域把 $b(\chi)$ 展开, 应有

$$b(\chi) = b_0 + \dot{b}|_{\chi=0} \cdot \chi + \ddot{b}|_{\chi=0} \cdot \frac{\chi^2}{2!} + \bar{b}|_{\chi=0} \cdot \frac{\chi^3}{3!} + \dots$$

由(13)式知道, 只有当 $\bar{b}|_{\chi=0} = 0$ 才能保证反弹是时间对称的.

在反弹点附近, 按条件(13)式, $\dot{b}^2$, $\dot{b}\ddot{b}$, 及它们的高次项可忽略不计, 故可把(10)式化为

$$\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2 = \frac{12}{\alpha} > 0. \quad (14)$$

不难看出, 满足全部反弹条件(13)式的(14)式的解为

$$b(\chi) = b_0 \cosh \kappa \chi, \quad (15)$$

其中

$$\kappa^4 = \frac{12}{\alpha} > 0.$$

五、讨 论

1. 由于我们成功地找到了一个时间对称的反弹解, 这个宇宙模型是从过去无限远的渐近 Friedman 宇宙 ($\kappa = 0$) 收缩到反弹点, 然后再膨胀到未来无限远的渐近 Friedman 宇宙 ($\kappa = 0$) 去的. 它是一个在时间上既无起始又无终结的一次反弹演化宇宙模型, 应该说它在物理上和哲学上都是有可能被接受的.

2. 由(14)式知, 时间对称性反弹解的存在要求 $\alpha > 0$, 如果宇宙的确是反弹的, 可能采用点分裂法和 Zeta 函数法来处理电磁场的正规化是不恰当的. 只有维数正规化才能给出 $\alpha = \frac{12}{2880\pi^2} > 0$ 的好结果来.

3. 可以期望, 把上述处理推广到 $\kappa = 1$ 情况, 有可能得到一个避免宇宙奇点的时间对称的无穷多次反弹宇宙模型(或振荡宇宙模型).

参 考 文 献

- [1] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *Large Scale Structure of Space-Time*, (London, 1973).
- [2] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N. Y.)*, 82(1974), 535; *Phys. Rev. D*, 11(1975), 2072.
- [3] M. V. Fischetti, J. B. Hartle, B. L. Hu, *Phys. Rev. D*, 20(1979), 1757.
- [4] M. J. Duff, *Nucl. Phys. B*, 125(1977), 334; S. M. Christensen, *Phys. Rev. D*, 17(1978), 946.

TRACE ANOMALY AND THE TIME SYMMETRIC BOUNCING
COSMOLOGICAL MODEL

LIU LIAO

(Department of Physics, Beijing Normal University)

LI JIAN-ZHEN

(Beijing Broadcasting College)

ABSTRACT

For conformal flat space-time of $k=0$, we calculate the one-loop contribution to the effective action from the conformal trace anomaly and obtain a time symmetric bouncing cosmological solution, which avoids the cosmological singularity.