

视界和温度格林函数的生成泛函

周敏耀 陈良范 郭汉英
(上海师范学院物理系) (中国科学院理论物理研究所)

1982年7月23日收到

提 要

在平衡态条件下,利用格林函数的欧氏生成泛函讨论了具有视界的 Rindler 时空和黑洞时空中量子场温度的几何来源. 在 Minkowski 时空到 Rindler 时空的变换下,绝对零度格林函数欧氏生成泛函的路径积分表示变换为有限温度量子场的相应表示,说明 Minkowski 真空态和 Rindler 时空中的一量子混合态性质相同,导出了这个态的温度格林函数及各热力学格林函数. 对于 Schwarzschild, Reissner-Nordström 和 Kerr 黑洞,得到了类似的结果,并获得了描写量子混合态的统计算符的具体形式.

一、引 言

自从 Hawking^[1,2] 揭示了黑洞蒸发的重要性以来,不少作者从不同角度研究了黑洞时空中自由量子场的性质,发现场的量子温度 $T = \kappa/2\pi$ 是普适的(κ 为视界处的重力加速度).

Gibbons 和 Perry^[3,4] 应用格林函数的方法把以往的讨论推广到有相互作用的场. 他们试图论证在无相互作用的情况下, Schwarzschild 时空中的中性标量粒子的 Hartle-Hawking 传播子^[5]的解析行为以及它在复 $t-t'$ 平面上的周期性(虚时周期为 $\beta = 8\pi M$)和双时热力学格林函数 $G_T(x, x')$ (虚时周期为 $\beta = 1/T$)是一样的,从而试图说明与黑洞热平衡的标量粒子气的温度 $T = \kappa/2\pi$ 的几何来源. 对于 Kerr 黑洞和 Reissner-Nordström (R-N) 黑洞以及高自旋场, Gibbons 和 Perry 试图得到类似的结果. 他们的工作无疑是有启发性的.

不过,我们知道在复 $t-t'$ 平面上具有简单周期性的是温度格林函数,即松原格林函数^[6],而不是双时热力学格林函数. 事实上, Hartle-Hawking 传播子并不和 $G_T(x, x')$ 等同,而是 Hartle-Hawking 传播子的欧氏形式与松原函数等同. 此外,因为费密场的虚时热力学格林函数具有 2β 的周期,因此,在应用格林函数方法时,就不得不另外证明旋量传播子在复 $t-t'$ 平面上具有的周期性与标量传播子的不一样.

我们将应用格林函数生成泛函的欧氏路径积分表示来探讨这些问题. 生成泛函方法在文献 [7—9] 中虽曾提及,本文应用这个方法却试图具体处理 Rindler 时空与经典黑洞时空背景上的物质场的量子化问题,更清楚地说明量子场温度的几何来源,同时又不必区分所考虑的场有无质量,有无相互作用或自相互作用,或具有什么自旋.

在 Minkowski 时空中,借助于 Euclidean 4-空间中的路径积分表示, ϕ^i 场的绝对零度

的格林函数生成泛函 $\langle 0^+ | 0^- \rangle_I$ 一般可写为

$$Z[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_I = \int (D\phi^i) \exp \left\{ \int [\mathcal{L}_E(\phi^i, \partial\phi^i) + J_i(x_E)\phi^i(x_E)] \sqrt{g_E} d^4x_E \right\}. \quad (1)$$

ϕ^i 场表示所考虑场量的集合, $J_i(x_E)$ 为相应的外源, 要求在大的欧氏距离处 $J_i(x_E)$ 消失. $\sqrt{g_E}\mathcal{L}_E$ 为 ϕ^i 场的拉氏密度. 以自由的实标量场为例,

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{2} g_E^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2)$$

其中 $x_E = (\mathbf{x}, x^4)$, 度规 g_E 为下述线元所定:

$$d\sigma^2 = (dx^4)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

对虚时 x^4 的积分区间为 $(-\infty, +\infty)$. 把 $Z[J]$ 对外源 J_i 求二次泛函导数, 便得 ϕ^i 场欧氏形式的二点格林函数. 然后, 在 $t-t'$ 的复平面上作反时针的 90° 转动, 就得费曼传播子 ($t = -ix^4$).

在平直时空中, 有限温度 ($T = 1/\beta$) 的格林函数的生成泛函, 同样可借助于 Euclidean 4-空间中的路径积分写出:

$$Z_\beta[J] = \int (D\phi^i) \exp \left\{ \int [\alpha_E(\phi_i, \partial\phi^i) + J_i(x_E)\phi^i(x_E)] \sqrt{g_E} d^4x_E \right\}. \quad (3)$$

(3) 式和 (2) 式不同的是, (3) 式对虚时 x^4 的积分区间为

$$0 \leq x^4 \leq \beta,$$

并且要求, 经典场 ϕ^i 在 $x^4 = 0$ 和 $x^4 = \beta$ 处完全等同. (3) 式具体可写为

$$Z_\beta[J] = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}[J]} = \int (D\phi^i) \exp \left\{ \int_0^\beta dx^4 \int d^3x \sqrt{g_E} [\mathcal{L}_E + J_i \phi^i] \right\}. \quad (4)$$

将 (4) 式对 $Z_\beta[J]$ 求二次泛函导数, 得到的是温度格林函数

$$\frac{1}{Z_\beta[0]} \frac{\delta^2 Z_\beta[J]}{\delta J_i \delta J_j} \Big|_{J=0} = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{x}, \bar{\tau}; \mathbf{x}', \bar{\tau}'), \quad (5)$$

其中已把 x^4 改为 $\bar{\tau}$. 以实标量场为例, $\mathcal{G}$ 在正则量子化方法中定义为

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \bar{\tau}; \mathbf{x}', \bar{\tau}') = \frac{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} T_\tau \hat{\phi}(\mathbf{x}, \bar{\tau}) \hat{\phi}(\mathbf{x}', \bar{\tau}')}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}}, \quad (6)$$

其中

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \bar{\tau}) = e^{\hat{H}\bar{\tau}} \hat{\phi}(\mathbf{x}) e^{-\hat{H}\bar{\tau}}.$$

然而, 并不能简单地通过在复 $t-t'$ 平面上的一个反时针转动得到所谓的热力学格林函数 G_T ,

$$G_T(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t')}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}}. \quad (7)$$

这里

$$t = -i\bar{\tau}, \quad \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t}. \quad (8)$$

我们知道平直时空中的 Minkowski 坐标和具有视界的 Rindler 坐标之间的坐标和 Schwarzschild 黑洞时空中的 Kruskal 坐标与 Schwarzschild 坐标之间的关系十分相似. 因此, 我们将首先讨论平直时空中的情况 (第二节). 然后, 探讨黑洞时空中的有关问题 (第三节). 我们先在完备的或具有最大解析性的时空中写出绝对零度下的生成泛函的欧氏路径积分表示, 然后, 通过确定的变换得到具有视界的 Rindler 时空和黑洞时空中相应的

有限温度场论的生成泛函的欧氏表示. 我们将看到这类温度 (对于黑洞, 即 Hawking 温度) 只依赖于这些时空的几何和拓扑性质, 而与 ϕ^i 场及其拉氏量的具体形式无关.

在第二节中, 我们证明 Minkowski 真空态 $|0\rangle_M$ 具有的性质和一个 Fulling-Rindler 混合态的性质一样, 具体推导了后者的温度格林函数以及推迟的、超前的和因果的热力学格林函数. 在第三节中, 我们将指出, 对 Schwarzschild 黑洞的渐近平坦区中的一个静止测量系统而言, Hartle-Hawking 态 $|H\rangle$ 是一个温度为 $T = \kappa/2\pi$ 的热平衡态, 描写这个态的密度矩阵为 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$ ($\beta = 2\pi/\kappa$). 对于 Kerr 黑洞的情况, 利用类 “Kruskal” 坐标自然定义的一个真空态, 对于一个渐近平坦区中的静止测量系统, 是一个用 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \Omega_{\text{BH}} \hat{M})}$ 描写的量子混合态; 其中 Ω_{BH} 为黑洞的转速, $\hat{H}$ 和 $\hat{M}$ 分别为 Boyer-Lindquist 坐标系中物质场的哈密顿量和角动量. 对于 R-N 黑洞的情况, 我们将看到, 一个用自然方式定义的真空态对于渐近平坦区的静止测量系统而言也是一个混合态, 它的 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \Phi_{\text{BH}} \hat{Q})}$, 其中 Φ_{BH} 为黑洞表面电势, $\hat{Q}$ 为场的电荷算子.

二、Rindler 时空中量子场的温度

我们以中性标量场为例讨论 Rindler 时空中量子场温度和视界之间的关系. 为完整起见, 首先简单回顾一下正则量子化方法的有关结果^[10-12].

在 1+1 维 Rindler 时空中, 线元为

$$ds^2 = -\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2, \quad (9)$$

其中, $0 < \rho < +\infty$, $-\infty < \tau < +\infty$. Rindler 坐标仅仅覆盖了平直时空的一个部分. 自由中性标量场所满足的 Klein-Gordon 方程为

$$\square \phi - m^2 \phi = 0, \quad (10)$$

其中 $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)$. 在度量 (9) 式下, (10) 式可以写为

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - m^2 \right) \phi = 0. \quad (11)$$

此方程能用变量分离的方法求解. 令

$$\phi(\rho, \tau) = \phi_j(\rho) e^{\pm i E_j \tau},$$

将它代入 (11) 式, 得本征方程

$$\left(\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \frac{d}{d\rho} - m^2 \rho^2 \right) \phi_j(\rho) = K \phi_j(\rho) = -E_j^2 \phi_j(\rho), \quad (12)$$

算子 K 相对于内积

$$(F_1, F_2) = \int \rho^{-1} d\rho F_1^*(\rho) F_2(\rho) \quad (13)$$

是厄密的. E_j^2 的谱从 0 到 $+\infty$. 令 $E_j = j$, 相应的归一化的本征函数为

$$\phi_j(\rho) = \pi^{-1} [2j \sinh(\pi j)]^{\frac{1}{2}} K_{ij}(m\rho), \quad (14)$$

其中 $0 \leq j \leq \infty$, K_{ij} 为虚序的 Macdonial 函数 (modified Bessel function). 场算符用产

生算符和湮没算符展开,得

$$\hat{\phi}(\rho, \tau) = \int_0^\infty \frac{dj}{(2j)^{1/2}} \phi_j(\rho) (e^{-ij\tau} a_j + a_j^\dagger e^{ij\tau}). \quad (15)$$

按照标准的正则量子化方法,求得重整化的 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H} = \int j a_j^\dagger a_j d_j. \quad (16)$$

定义 Fulling-Rindler 真空态为

$$a_j |0\rangle_F = 0 \quad (\text{对所有的 } j).$$

由此定义的 $|0\rangle_F$ 和通常的 Minkowski 真空态 $|0\rangle_M$ 是不等价的. Unruh^[11] 证明了 $|0\rangle_M$ 具有的性质和 Fulling-Rindler 的一个混合态的性质是一样的, 描写这个态的密度算子为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_{12}} (\beta = 2\pi).$$

下面, 用格林函数生成泛函的方法讨论 Rindler 时空中场的量子化. 我们将看到量子场温度来源于 Rindler 时空的几何性质以及惯性系和 Rindler 系之间的变换. 它是与 Rindler 时空存在视界密切相关. 同时, Fulling-Rindler 混合态的性质由温度格林函数 $\mathcal{G}(\rho_1, \bar{\tau}_1; \rho_2, \bar{\tau}_2)$ 完全确定, 因为各热力学格林函数的傅里叶分量可以由 $\mathcal{G}(\rho_1, \bar{\tau}_1; \rho_2, \bar{\tau}_2)$ 的傅里叶分量在复 ω -平面上的解析延拓而得到.

应用笛卡尔坐标 (t, x, y, z) , 相应的欧氏截面的线元为

$$d\sigma^2 = (d\bar{t})^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (\bar{t} = it), \quad (17)$$

$\bar{t}$ 为虚时. 首先, 按 (1) 式写出绝对零度格林函数的欧氏生成泛函:

$$Z[J] = \int (D\phi) \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \int d^3x [\mathcal{L}_E + J\phi] \right\}. \quad (18)$$

在欧氏截面上的坐标变换

$$\bar{t} = \rho \sin \bar{\tau}, \quad x = \rho \cos \bar{\tau} \quad (19)$$

下, (17) 式变为

$$d\sigma^2 = \rho^2 (d\bar{\tau})^2 + (d\rho)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (20)$$

而 (18) 式变为

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int (D\phi) \exp \left\{ \int_0^{2\pi} d\bar{\tau} \int \rho d\rho dy dz [\mathcal{L}_E + J\phi] \right\} \\ &= \int (D\phi) \exp Q[\phi] \\ &= Z_{\beta=2\pi}[J] = \text{Tr} e^{-2\pi \hat{H}}. \end{aligned} \quad (21)$$

虽然, (20) 式是虚时的 Rindler 空间中的线元, (21) 式事实上就是 $\beta = 2\pi$ 的温度格林函数的生成泛函.

在 1+1 维情况下, 对于自由中性标量场, 由 (21) 式可以详细计算温度格林函数 $\mathcal{G}(\rho_1, \bar{\tau}_1; \rho_2, \bar{\tau}_2)$. (21) 式中的 $Q[\phi]$ 可重新写为

$$\begin{aligned} Q[\phi] &= - \int \left[\frac{1}{2} \phi (-\square + m^2) \phi - J\phi \right] \rho d\rho d\bar{\tau} \\ &= - \int \left(\frac{1}{2} \phi A \phi - J \rho^2 \phi \right) \rho^{-1} d\rho d\bar{\tau} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (J\rho^2, \phi), \quad (22)$$

其中

$$(-\square + m^2) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2} - m^2\right), \quad (23)$$

$$A = -\left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\tau}^2} - m^2 \rho^2\right), \quad (24)$$

$$(F_1, F_2) = \int \rho^{-1} d\rho d\bar{\tau} F_1 F_2. \quad (25)$$

(24) 式在 $\phi \rightarrow \phi + A^{-1}J\rho^2$ 变换下是不变的, 因此

$$Z[J] = Z[0] \exp\left\{\frac{1}{2}(\rho^2 J, A^{-1}\rho^2 J)\right\}. \quad (26)$$

令 $\rho^2 J(\rho, \bar{\tau}) = f(\rho, \bar{\tau})$, 由 (19) 式可知, $f(\rho, \bar{\tau})$ 是一个 $\bar{\tau}$ 的周期为 2π 的周期函数. 这样, $f(\rho, \bar{\tau})$ 可展开为

$$f(\rho, \bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \sum_v \bar{f}_v(\rho) e^{-iv\bar{\tau}} \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (27)$$

其中

$$\bar{f}_v(\rho) = \int_0^{2\pi} f(\rho, \bar{\tau}) e^{iv\bar{\tau}} d\bar{\tau}. \quad (28)$$

$\bar{f}_v(\rho)$ 进一步可借用本征函数集 $\{\phi_j(\rho)\}$ ((14) 式) 展开:

$$\bar{f}_v(\rho) = \int_0^\infty dj \bar{f}_v(j) \phi_j(\rho), \quad (29)$$

其中

$$\bar{f}_v(j) = \int_0^\infty \rho^{-1} d\rho \phi_j^*(\rho) \bar{f}_v(\rho). \quad (30)$$

于是

$$f(\rho, \bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \sum_v \int_0^\infty dj \bar{f}_v(j) \phi_j(\rho) e^{-iv\bar{\tau}}. \quad (31)$$

应用 (24) 式, 得到

$$\begin{aligned} A^{-1}f(\rho, \bar{\tau}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_v \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) e^{-iv\bar{\tau}}}{j^2 + v^2} \bar{f}_v(j) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_v \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) e^{-iv\bar{\tau}}}{j^2 + v^2} \int_0^{2\pi} d\bar{\tau}' \int_0^\infty \rho'^{-1} d\rho' \phi_j^*(\rho') e^{iv\bar{\tau}'} f(\rho', \bar{\tau}') \\ &= \int_0^{2\pi} d\bar{\tau}' \int_0^\infty \rho'^{-1} d\rho' \mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}') f(\rho', \bar{\tau}'), \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}') = \frac{1}{2\pi} \sum_v \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) \phi_j^*(\rho') e^{-iv(\bar{\tau} - \bar{\tau}')}}{j^2 + v^2}. \quad (33)$$

利用 (32) 式, (26) 式变为

$$Z[J] = Z[0] \exp\left\{\frac{1}{2} \int \rho d\rho d\bar{\tau} \int \rho' d\rho' d\bar{\tau}' J(\rho, \bar{\tau}) \mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}') J(\rho', \bar{\tau}')\right\}.$$

显然

$$\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^2} \Big|_{J=0} = \mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}'). \quad (34)$$

这样得到的 $\mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}')$ 与 (6) 式所定义的相同。

由 (33) 式, $\mathcal{G}(\rho, \bar{\tau}; \rho', \bar{\tau}')$ 的傅里叶分量为

$$\tilde{\mathcal{G}}(\rho, \rho', \nu) = \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) \phi_j^*(\rho')}{j^2 + \nu^2} \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots). \quad (35)$$

只要在 (35) 式中作代换 $i\nu \rightarrow \omega + i\eta$, 就可得到推迟热力学格林函数

$$\tilde{G}_\beta^R(\rho, \rho', \omega) = \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) \phi_j^*(\rho')}{j^2 - \omega^2 - i\eta} \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (36)$$

同理, 作 $i\nu \rightarrow \omega - i\eta$ 的变换, 得到超前热力学格林函数

$$\tilde{G}_\beta^A(\rho, \rho', \omega) = \int_0^\infty dj \frac{\phi_j(\rho) \phi_j^*(\rho')}{j^2 - \omega^2 + i\eta} \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (37)$$

因果热力学格林函数也随之确定

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{G}_\beta(\rho, \rho', \omega) &= \operatorname{Re} \tilde{G}_\beta^R(\rho, \rho', \omega) = \operatorname{Re} \tilde{G}_\beta^A(\rho, \rho', \omega), \\ \operatorname{Im} \tilde{G}_\beta(\rho, \rho', \omega) &= \operatorname{Coth} \pi \omega \operatorname{Im} \tilde{G}_\beta^R(\rho, \rho', \omega) = -\operatorname{Coth} \pi \omega \operatorname{Im} \tilde{G}_\beta^A(\rho, \rho', \omega). \end{aligned} \quad (38)$$

以上讨论表明, (21) 式包含了 Fulling-Rindler 混合态 $\left(\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-2\pi \hat{H}}\right)$ 的量子涨落的全部信息。因为 (21) 和 (18) 式是同一的, 所以 $|0\rangle_M$ 具有 Fulling-Rindler 混合态 (温度 $T = 1/2\pi$) 那样的性质。

正则量子化方法在说明 $\beta = 2\pi$ 的来源时只限于自由场。而路径积分方法却不受这个限制。在有相互作用情况下, 可以通过微扰展开求得 $\mathcal{G}(\rho, \rho', \bar{\tau}, \bar{\tau}')$, 由此确定所有热力学格林函数, 所得的结果 $\beta = 2\pi$ 和自由场的情况一样。

三、黑洞时空中的量子场温度

本节讨论在几种黑洞时空中处于平衡态的量子场的性质, 以及量子场温度的几何来源。

1. Schwarzschild 黑洞

应用 Schwarzschild 坐标 $x_s = (t, r, \theta, \phi)$, Schwarzschild 时空的线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (39)$$

x_s 坐标仅覆盖了时空流形中 $r > 2M$ 部分。显然, 不能在一个时空不完全的区域内定义一个自然的真空态。能够覆盖最大解析区的是 Kruskal 坐标。应用 Kruskal 坐标, 线元为

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (-dz^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (40)$$

其中 r 由下式定义:

$$-z^2 + y^2 = (r/2M - 1)e^{r/2M},$$

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ 。除了中心奇点外, 度规 g_K 是处处正则的。由于这个度规 g_K 非静

态性质,运用正则量子化方法定义真空态具有任意性. 然而,应用路径积分定义真空态在原则上却不存在困难.

令 $z = -i\zeta$, 在复时空流形上作解析延拓可得正定度规 $g_{\bar{K}}$. $g_{\bar{K}}$ 由下式给出:

$$d\sigma^2 = (32M^3 e^{-r/2M}/r)(d\zeta^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (41)$$

其中 r 重新定义为

$$\zeta^2 + y^2 = (r/2M - 1)e^{r/2M}. \quad (42)$$

而

$$-\infty < \zeta < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (43)$$

显然,为虚时“Kruskal”坐标所覆盖的空间是完备的,并且度规处处正则(中心奇点 $r = 0$ 不在正定度规的截面上). 于是, (1) 式在这个截面上是有定义的:

$$Z[J] = \int (D\phi^i) \exp \left\{ \int d^4 x_{\bar{K}} \sqrt{g_{\bar{K}}} [\mathcal{L} + J_i \phi^i] \right\}, \quad (44)$$

其中 $x_{\bar{K}} = (\zeta, y, \theta, \phi)$. (44) 式描写了 ϕ^i 场真空态的量子涨落, 这个态记作 $|H\rangle$, 称之为 Hartle-Hawking 态^[12]. 然而, 和渐近平坦区测量系统相联系的并不是 Kruskal 坐标, 而是 Schwarzschild 坐标. 所以, 必须在这个正定截面上, 把 Kruskal 坐标变换到 Schwarzschild 坐标:

$$\zeta = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/2M} \sin \frac{\bar{t}}{4M}, \quad y = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/2M} \cos \frac{\bar{t}}{4M}, \quad (45)$$

其中 $\bar{t} = it$ 为 Schwarzschild 虚时间. 根据 (43) 式

$$2M \leq r < \infty, 0 \leq \bar{t} \leq 8\pi M. \quad (46)$$

由 (45) 式, (41) 式变为

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (47)$$

它给出了正定的 Schwarzschild 度规 $g_{\bar{S}}$; (44) 式变为

$$Z[J] = \int (D\phi^i) \exp \left\{ \int_0^{8\pi M} d\bar{t} \int \sqrt{g_{\bar{S}}} d^3 x_{\bar{S}} [\mathcal{L} + J_i \phi^i] \right\}, \quad (48)$$

其中 $x_{\bar{S}} = (\bar{t}, r, \theta, \phi)$, 经典场 $\phi^i(x_{\bar{S}})$ 是关于 $\bar{t}$ 的周期函数, 周期为 $8\pi M$. 和平直时空一样, (48) 式包含了一个量子混合态的全部信息. 这个混合态是由 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$ ($\beta = 8\pi M$) 来描写的, 其温度与 Hawking 温度一致, $T_{\text{BH}} = \frac{1}{\beta} = (8\pi M)^{-1} = \kappa/2\pi$. 这个结

果来源于虚时的 Kruskal 坐标和虚时的 Schwarzschild 坐标之间的变换以及时空的性质. 这是因为只有 Kruskal 坐标才覆盖最大解析区, 也只有 Schwarzschild 坐标才与渐近平坦区的静止观察者的物理测量相联系.

2. Kerr 黑洞

和 Schwarzschild 黑洞时空相似, 在 Kerr 黑洞时空中也有所谓类 Kruskal 坐标^[13,9] (U, V, θ, ϕ^+), 它和 Boyer-Lindquist 坐标的关系如下:

$$U = -e^{-\kappa(t-f(r))}, \quad V = e^{\kappa(t+f(r))} \quad (\text{I 区});$$

$$\begin{aligned} U &= e^{\kappa(t+f(r))}, & V &= e^{\kappa(t+f(r))} & (\text{II 区}); \\ U &= -e^{-\kappa(t-f(r))}, & V &= -e^{\kappa(t+f(r))} & (\text{III 区}); \\ \phi^+ &= \phi - Q_{\text{BH}} t. \end{aligned} \quad (49)$$

这里, $f(r)$ 由下式定义:

$$\frac{df}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2Mr + a^2};$$

κ 为黑洞表面引力

$$\kappa = \frac{1}{2} (r_+ - r_-) / r_+^2 + a^2,$$

而 $Q_{\text{BH}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ 为黑洞的角速度. Carter^[13] 证明了在 (U, V, θ, ϕ^+) 坐标系中度规在 I, II, III 区是正则的. 我们引进 T, z 两个坐标, 定义如下:

$$U = T - z, \quad V = T + z. \quad (50)$$

显然, T 是类时的. 令 $\zeta = iT$, 坐标 $(\zeta, z, \theta, \phi^+)$ 覆盖的空间是全的.

$$-\infty < \zeta < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi^+ < 2\pi. \quad (51)$$

借助于 (1) 式可以在 “Kruskal” 坐标中定义一个自然在真空态, 然后, 把 $(z, \zeta, \theta, \phi^+)$ 变换到 $(\bar{t}, r, \theta, \phi^+)$:

$$\zeta = e^{\kappa f(r)} \sin \kappa \bar{t}, \quad z = e^{\kappa f(r)} \cos \kappa \bar{t}, \quad (52)$$

其中 $\bar{t}$ 为 Boyer-Lindquist 虚时间 ($\bar{t} = it$). 显然, 经典场量关于虚时 $\bar{t}$ 是有周期性的, 周期为 $2\pi/\kappa$. 这样, (1) 式变成了温度为 $\beta^{-1} = \kappa/2\pi$ 的温度格林函数的生成泛函, 它描写了一个 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}'}$ 的混合态. $\hat{H}'$ 为共转系 (t, r, θ, ϕ^+) 中场的哈密顿量. $\hat{H}'$ 和 Boyer-Lindquist 坐标系 (t, r, θ, ϕ) 中的哈密顿量 $\hat{H}$ 之间有如下关系:

$$\hat{H}' = \hat{H} - Q_{\text{BH}} \hat{M}. \quad (53)$$

下面, 我们给出 (53) 式的证明. 在共转坐标系中, H' 为

$$H' = - \int d^3x \sqrt{-g'} T_{t'}^{t'}, \quad (54)$$

其中 T_{μ}^{ν} 为能动张量. 在 Boyer-Lindquist 坐标系 $x^a = (t, r, \theta, \phi)$ 中, H 为

$$H = - \int d^3x \sqrt{-g} T_t^t. \quad (55)$$

由张量变换规律得到

$$T_{t'}^{t'} = T_a^b \frac{\partial t'}{\partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial t'} = T_t^t + Q_{\text{BH}} T_{\phi}^{\phi}. \quad (56)$$

把 (56) 式代入 (54) 式, 则得

$$H' = H - Q_{\text{BH}} M. \quad (57)$$

场量子化后, (57) 式就是 (53) 式.

由此可知, 在 Boyer-Lindquist 坐标系中, 描写这个量子混合态的密度矩阵为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-2\pi/\kappa \cdot (\hat{H} - Q_{\text{BH}} \hat{M})}. \quad (58)$$

Boyer-Lindquist 坐标对渐近平坦区的静止测量系统是恰当的, 于是, 一个能量为 ω , 角动

量为 m 模式的粒子数平均值为

$$\begin{aligned}\langle a_{\omega m}^+ a_{\omega m} \rangle &= \frac{\text{Tr} \hat{\rho} a_{\omega m}^+ a_{\omega m}}{\text{Tr} \hat{\rho}} \\ &= \frac{1}{e^{(\omega - m\Omega_{\text{BH}})/T_{\text{BH}} \pm 1}},\end{aligned}\quad (59)$$

其中“+”对于费密子,“−”对于玻色子。(59)式的结果与文献[14]是相同的。

3. Reissner-Nordström 黑洞

在 R-N 黑洞时空中,我们以复标量场为例。和前面一样,可以利用虚时的类 “Kruskal” 坐标定义描写真空情态的格林函数的生成泛函,然后,利用虚时的类 Kruskal 坐标和虚时的 R-N 坐标之间的变换证明在最大解析区上定义的真空态是 R-N 量子混合态,其统计算符 $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$ 。在这样做时,必须明确对黑洞外的静电场取什么规范。在通常的规范下,采用 (t, r, θ, ϕ) 坐标,势 $A_t = Q/r$, 其余分量为零。如果采用在将来视界上解析的 (u, r, θ, ϕ) 坐标, $A_r = \frac{Q}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}$ 将在 $r = r_+$ 处发散。由此可知,在通常的规范下,(1)式是没有定义的。为此,我们作如下的规范变换:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \alpha_{,\mu} \quad \left(\alpha = \frac{Q}{r_+} t\right).$$

在 (t, r, θ, ϕ) 坐标系中,

$$A'_\mu = \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r_+}, 0, 0, 0\right). \quad (60)$$

在新规范下,势 A'_μ 在视界处 ($r = r_+$) 不再发散。但新规范有一个缺点,即在 $r \rightarrow \infty$ 时, A'_μ 不消失。因此,当我们应用新规范写出生成泛函时,必须在求得结果后再回到原来的规范。新规范下的哈密顿量和老规范下的哈密顿量有如下关系:

$$\hat{H}_{\text{new}} = \hat{H}_{\text{old}} - \Phi_{\text{BH}} \hat{Q}. \quad (61)$$

下面,证明(61)式。

在静态的 R-N 时空中,与电磁场相互作用的复标量场的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^+ (\partial_\nu - ieA_\nu) \phi + m^2 \phi^+ \phi]. \quad (62)$$

应用标准的方法,正则动量为

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\sqrt{-g} [\dot{\phi}^+ + ieA_0 \phi^+] g^{00}, \\ \pi^+ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^+} = -\sqrt{-g} [\dot{\phi} - ieA_0 \phi] g^{00}.\end{aligned}$$

哈密顿密度为

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \dot{\phi}^+ \pi^+ - \mathcal{L}.$$

把 R-N 黑洞外的静电场作外场,其电磁四-矢为

$$A_\mu = (A_0, 0, 0, 0),$$

这样

$$\mathcal{H} = \sqrt{-g} [-g_{00} \pi^+ \pi + g^{ab} \phi_{,a}^+ \phi_{,b} - g^{00} ieA_0 (\phi^+ \dot{\phi} - \dot{\phi} \phi^+)]$$

$$+ 2g^{00}e^2A_0^2\phi^+\phi + m^2\phi^+\phi]. \quad (63)$$

作

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \alpha_{,\mu} \quad (\alpha = \Phi_{\text{BH}}t) \quad (64)$$

的规范变换,场量 ϕ 和哈密顿量密度有相应的变换

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-ie\alpha}\phi, \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'. \quad (65)$$

计算的结果为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{H} - \rho\Phi_{\text{BH}}, \\ \rho &= -i[(\dot{\phi}^+\phi - \phi^+\dot{\phi}) - i2e\phi^+\phi A_0]\sqrt{-g}g^{00}. \end{aligned} \quad (66)$$

在 $t = \text{const}$ 的超曲面上积分 (66) 式得

$$\begin{aligned} H' &= H - \Phi_{\text{BH}}Q, \\ Q &= -i \int \sqrt{-g}g^{00}d^3x\{(\dot{\phi}^+\phi - \phi^+\dot{\phi}) - i2e\phi^+\phi A_0\}, \end{aligned} \quad (67)$$

Q 为场的总电荷. 场量子化后, (67) 式就是 (61) 式.

由 (61) 式可知, 在 R-N 坐标系中, 描写量子混合态的密度矩阵

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-2\pi/\kappa(\hat{H} - \Phi_{\text{BH}}\hat{Q})}. \quad (68)$$

于是, 能量为 ω , 电量为 e 的模式的粒子数平均值为

$$\langle n_\omega \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega - e\Phi_{\text{BH}}}{\kappa/2\pi}\right) \pm 1}. \quad (69)$$

这个结果也与文献 [14] 相同.

四、讨 论

我们应用格林函数生成泛函的方法分析了在热平衡条件下 Rindler 时空和黑洞时空中量子场的行为, 着重讨论了这些时空中量子场温度的来源. 对于平直时空, 我们首先在惯性系中写下零温量子场的欧氏生成泛函, 然后变换到 Rindler 坐标系, 得到一个有确定温度的量子场的生成泛函. 回到真时情况, 变换后的时空 (即 Rindler 时空) 是不完备的. 在完备的时空中定义的纯量子态 $|0\rangle_M$, 相应于不完备时空中的有限温度的量子混合态. 从物理上看, 在完全时空中定义纯量子态是自然的, 而在不完全时空中要定义纯量子态必须附加一些边界条件. 这样, 在 Rindler 时空中, 一个自然的态只能是一个 Fulling-Rindler 混合态. 这是 Rindler 时空的性质对处于平衡态的场的量子行为的一个限制. Rindler 时空具有视界这一点表明非测地完备的 Rindler 时空却是一个柯西完备的时空, 这使 Fulling-Rindler 态有确切定义^[10]. 同时, 视界存在, 使得惯性坐标系和 Rindler 坐标系之间的变换具有虚时的周期性 (见 (19) 式). 因此, Fulling-Rindler 态的温度与视界的存在密切相关.

对于黑洞时空, 情况完全类似. 我们只能在最大解析区内定义零温量子场的生成泛函, 它相应于渐近平坦区内静止测量系统中的有限温度量子场的生成泛函. 这种相应关系, 同样与视界的存在密切相关. 因此, 在黑洞时空的渐近平坦区中自然的态也只能是一

个温度为 $T = \kappa/2\pi$ 的混合态。这是黑洞时空的几何性质对量子场论的一个限制。

应该指出, 我们关于量子场温度 $T = \kappa/2\pi$ 的讨论是普遍的, 尽管我们的具体计算只局限于标量场。这是因为无论 ϕ^i 是什么场, α_E 的具体形式如何, 而由相应的坐标变换所得的虚时周期性并不因此而改变, 当然, $T = \kappa/2\pi$ 也不会改变。这正是生成泛函方法的一个优点。

值得指出的是, 我们用生成泛函方法处理静态 Schwarzschild 黑洞时空中的量子场, 并不和星体的引力塌缩有直接联系 (与引力塌缩相联系的是静态 Schwarzschild 时空中的 Unruh 态^[11])。同时, 我们的讨论也不涉及态的稳定性问题, 仅仅说明态的温度的几何来源。

应用这个方法同样能够处理 de sitter 时空中量子场的相应的问题, 我们将在另文中具体讨论。

参 考 文 献

- [1] S. W. Hawking, *Nature*, **248**(1974), 30.
- [2] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.
- [3] G. W. Gibbons and M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 985.
- [4] G. W. Gibbons and M. J. Perry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A358**(1978), 467.
- [5] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **13**(1976), 2188.
- [6] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, (1971).
- [7] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **15**(1977), 2752.
- [8] S. W. Hawking, in G. R., *An Einstein Centenary Survey*, e. d. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge Univ. Press, (1979).
- [9] G. W. Gibbons, in G. R., *An Einstein Centenary Survey*, e. d. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge Univ. Press, (1979).
- [10] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D*, **7**(1973), 2850.
- [11] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 870.
- [12] D. W. Sciama, P. Candelas and D. Deutsch, *Advances in Physics*, **30**(1981), 327.
- [13] B. Carter, *Phys. Rev.*, **174**(1968), 1559.
- [14] G. W. Gibbons, *Comm. Math. Phys.*, **44**(1975), 245.

HORIZONS AND GENERATING FUNCTIONALS FOR THE TEMPERATURE GREEN'S FUNCTIONS

ZHOU MIN-YAO · CHEN LIAN-FAN

(Department of Physics, Shanghai Teacher's College)

GUO HAN-YING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The generating functional approach to Green's functions in the thermal equilibrium is applied to explore the geometrical origin of the temperatures of the quantum fields in the Rindler spacetime and black hole spacetimes. It is shown that under the transformation from Minkowski space to the Rindler space the path integral representation for the Euclidean generating functionals of Green's functions at zero temperature would transform into the corresponding ones of the quantum fields at a certain finite temperature, and the Minkowski vacuum state would have the same properties as that of the quantum mixed state at that temperature. All thermal Green's functions for the mixed state are given. Similar results would be obtained for the Schwarzschild, the Reissner-Nordstrom and the Kerr black holes and whereupon the Hawking temperature for the black holes would have geometrical origin as well as that in the Rindler spacetime. The various density operators of the mixed states at the Hawking temperature for the black hole spacetimes are specified.