

自旋极化氢原子 ($H\downarrow$) 系统中气体超流的可能性及其声学性质

倪 皖 荪

(南京大学物理系及声学研究所)

1982 年 5 月 28 日收到

提 要

将自旋极化氢原子 ($H\downarrow$) 系统作为弱作用玻色系统处理, 基于硬球近似和 Isihara 有限温度理论, 讨论了发生气体超流的可能性及两种声模式, 强调了声测量技术对研究 $H\downarrow$ 系统的重要性.

一、引 言

近几年实验室中得到了稳定的自旋极化氢原子气体^[1,2], 在这种相互作用很弱的玻色气体中出现超流或玻色凝结的可能性已有不少讨论^[3,4], 本文将 $H\downarrow$ 气体作为弱作用玻色系统处理, 基于硬球近似和 Isihara 有限温度理论^[5], 讨论了发生气体超流的可能性及两种声模式, 强调了声测量技术对研究 $H\downarrow$ 系统的重要性.

二、元 激 发 谱

当 $T \approx 0$ 且 $a^3n \ll 1$ 时硬球模型^[6,7]的元激发谱为

$$\epsilon(k) = \left[\epsilon_k^0 + 2x \frac{4\pi a \hbar^2 n}{m} \epsilon_k^0 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

式中 n 为数密度, a 为势散射长度或硬球直径. 硬球模型的基态能量 $E_0 = \frac{2\pi a \hbar^2 n}{m} N \left(1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{a^3 n} \right)$, 对 $H\downarrow$, 文献 [8] 近似得出 $E_0/N \approx \alpha_3 n$, 这里 $\alpha_3 = 2.6 \times 10^{-22} \text{K} \cdot \text{cm}^3$, 两者比较, 我们取 $a = 0.86 \text{\AA}$, 无外场时 $\epsilon_k^0 = \hbar^2 k^2 / 2m$, 由于有外磁场 $\mathbf{B}$, ϵ_k^0 应由文献 [7] 中 (10.8) 式决定,

$$H_0 \varphi_i^0(x) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + u^x(x) \right] \varphi_i^0(x) = \epsilon_{ki}^0 \varphi_i^0(x). \quad (2)$$

若 $\mathbf{S}$ 为氢原子中电子自旋, $\mathbf{I}$ 为核子自旋, 则^[4,9]

$$u^x = 2\beta \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} + A_I \mathbf{I} \cdot \mathbf{S} - \gamma \hbar \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}.$$

这里 $\beta = e\hbar/2m_e c$, $\gamma = g_N \beta_N / \hbar = 2.675 \times 10^4 \text{Gs}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $A_I = 16\beta \gamma \hbar / 3a^2$ 为超精细结构常数. 令 $|m_S, m_I\rangle$ 为 $\mathbf{S}$, $\mathbf{I}$ 不同取向的正交归一化波函数, 则上述哈密顿量有四种本

征态,按能量大小由低到高次序为

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2}} \left[\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \chi \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right], \quad \psi_1 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2}} \left[\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \chi \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right], \quad \psi_3 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\chi = [-(\gamma\hbar + 2\beta)B + \sqrt{(\gamma\hbar + 2\beta)^2 B^2 + A_i^2}]/A_i$, 相应本征能量为

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -\frac{A_i}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{A_i^2 + (\gamma\hbar + 2\beta)^2 B^2}, \quad \lambda_1 = \frac{A_i}{4} + \frac{1}{2} \gamma\hbar B - \beta B, \\ \lambda_2 &= -\frac{A_i}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{A_i^2 + (\gamma\hbar + 2\beta)^2 B^2}, \quad \lambda_3 = \frac{A_i}{4} - \frac{1}{2} \gamma\hbar B + \beta B.\end{aligned}\quad (3)$$

从(2)式 H_0 中减去最低能态能量 λ_0 , 即得

$$\epsilon_{ki}^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \lambda_i - \lambda_0 \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

代入(1)式并令 $\Delta = 4\pi a \hbar^2 n/m$ 得

$$\epsilon_i(k) = \left[\frac{\hbar^4 k^4}{4m^2} + 2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} (\lambda_i - \lambda_0 + \Delta) + (\lambda_i - \lambda_0)^2 + 2\Delta(\lambda_i - \lambda_0) \right]^{1/2}. \quad (5)$$

这是硬球近似下考虑了四种不同本征态的激发谱。当 $B = 10^4 \text{Gs}$ 时, $\lambda_1 - \lambda_0 \approx 3.7 \times 10^{-2} \text{K}$, $\lambda_2 - \lambda_0 \approx 1.4 \text{K}$, $\lambda_3 - \lambda_0 \approx 1.43 \text{K}$. T 小时高能态非极化部分 ψ_2, ψ_3 贡献很小, 占优势的是低能态极化部分 ψ_0, ψ_1 . 计算表明 $T < T_c$ 时, 对 $n \leq 10^{17} \text{atom/cm}^3$ 只需考虑最低能态 ψ_0 , $n \geq 10^{18}$ 时需计及 ψ_1 的影响, $n \geq 10^{20}$ 时才需考虑四种本征态. Δ 与 n 成正比, $n \leq 10^{19}$ 时, $\Delta \leq 5.2 \times 10^{-3} \text{K}$, 即当 $i \neq 0$ 时 $\lambda_i - \lambda_0 \gg \Delta$, 故由(5)式得

$$\epsilon_i(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + (\lambda_i - \lambda_0 + \Delta). \quad (6)$$

此即所谓类粒子谱。当 $i = 0$ 时, 若 $\hbar^2 k^2/2m \gg \Delta$, (6) 式仍成立; 若 $\hbar^2 k^2/2m \ll \Delta$, 则得到所谓类声子谱

$$\epsilon_0(k) \approx \hbar k u_0. \quad (7)$$

这里 $u_0 = \sqrt{\Delta/m}$. 对于比较复杂的中间情形, 我们取适当的割断常数 κ , 当 $\epsilon > \kappa\Delta$ 时应用(6)式即取 $\epsilon_0(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Delta$. 当 $\epsilon < \kappa\Delta$ 时用类声子谱(7)式. 由于尚无实验数据可资比较, 计算中暂取 $\kappa = 2$, 使和实际的 $\epsilon_0(k)$ 曲线的偏离尽可能小.

三、热力学量

Isihara 理论^[5]指出, 若限于链图近似的最低级近似则谱与 T 无关. 因此上节中 $T \approx 0$ 时的元激发谱可近似应用于有限温度情形. Isihara 有限温度的内能公式为

$$E = \frac{n^2 V}{2} \int d^3 k V(k) + \frac{V}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\epsilon(k) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - n V(k) \right] + V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon(k)}{e^{\beta \epsilon(k)} - 1}. \quad (8)$$

将(6), (7)式代入上式中 $\epsilon(k)$, 取 $V(x) = g\delta(x)$, 并按文献[7]小心处理展开中的发

散问题,即得 H↓ 系统的内能

$$E = N\lambda_0 + \frac{N\Delta}{2} \left(1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{a^3 n} \right) + k_B T V \Lambda^{-3} \sum_{i=0}^3 \left[\frac{3}{2} \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(z_i, \xi_i) + z_i \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(z_i, \xi_i) \right] + \frac{k_B^4 T^4}{\hbar^3 u_0^3} \frac{V}{2\pi^2} \int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1}. \quad (9)$$

这里 $\Lambda = \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{1/2}$. 由于(4)式中对每个粒子能量减去一常数项 λ_0 , 所以上式应增加 $N\lambda_0$. 第二项为基态能量. 第四项为类声子谱贡献. 由于选取了割断因子 κ , 其积分上限不是无穷大而是 $x = \kappa\Delta/k_B T$, 第三项来自类粒子谱, 其中 $z_i = \frac{\lambda_i - \lambda_0 + \Delta}{k_B T}$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_0 = \xi = \frac{(\kappa - 1)\Delta}{k_B T}$, $\mathcal{F}_\sigma(z_i, \xi_i) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_{\xi_i}^{\infty} \frac{z^{\sigma-1} dz}{e^{z+z_i} - 1}$, 由于割断, $i=0$ 时玻色积分 $\mathcal{F}_\sigma$ 的下限不是零而是 ξ . 由(9)式按标准方法可求出各种热力学量 p , S , C_V , $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, C_p 及 γ , (计算结果见图 1, 图 2 及表 1) 其中

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = & -\frac{n\Delta}{V} \left(1 + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a^3 n} \right) + \frac{k_B T \Lambda^{-3}}{V} \left[\sum_{i=0}^3 z_i^2 \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(z_i, \xi_i) \right. \\ & + \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \ln(1 - e^{-z_0 - \xi}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}(z_0 + \xi)^2}{e^{z_0 + \xi} - 1} \left. \right] + \frac{k_B^4 T^4}{(\hbar u_0)^3} \\ & \times \frac{1}{2\pi^2 V} \left[\frac{5}{4} \int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1} - \frac{x^3}{4} \ln(1 - e^{-x}) - \frac{x^4}{e^x - 1} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

利用^[10] $\rho_n = \frac{\hbar^2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 \left[-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right]$, 取 $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon(k)/k_B T} - 1}$, 可求出正常密度 ρ_n 及超流密度 $\rho_s = \rho - \rho_n$, 这里

$$\rho_n = m \Lambda^{-3} \left[\sum_{i=0}^3 \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(z_i, \xi_i) + \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)(e^{z_0 + \xi} - 1)} \right]$$

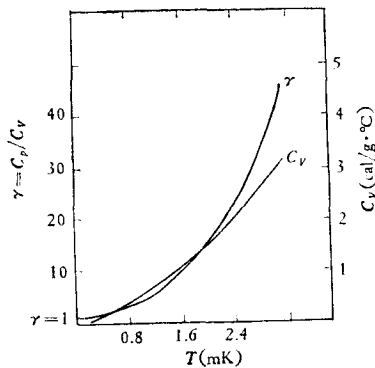


图 1 $n = 10^{17} \text{ atom/cm}^3$ 时 C_V 及 γ 对 T 的关系 ($\kappa = 2$)

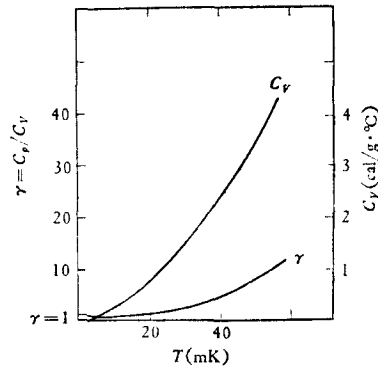


图 2 $n = 10^{19} \text{ atom/cm}^3$ 时 C_V 及 γ 对 T 的关系 ($\kappa = 2$)

$$+ \frac{2k_B^4 T^4}{3\pi^2 \hbar^3 u_0^3} \left[\int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1} - \frac{x^4}{4(e^x - 1)} \right]. \quad (11)$$

由于 T 小时 $\rho_s \approx 0$, 即存在超流. $\rho_s \rightarrow 0$ 的相变温度 T_c 随割断因子 κ 的增大而减小. 本文只讨论 $T < T_c$ 情形, 稀薄 $\text{H}\downarrow$ 的 T_c 和理想气体玻色凝结温度 T_0 可能很相近. T_0 由

$$n = \Lambda^{-3} \sum_{i=0}^3 F_{3/2} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_0}{k_B T} \right) \text{ 决定. } F_{3/2} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_0}{k_B T} \right) \text{ 是通常积分限由零到无穷大的玻色积分.}$$

四、声学性质

$\rho_s \approx 0$ 时, 按朗道理论^[11]存在两种声模式 u_I 及 u_{II} :

$$u_I^2 = \frac{1}{2} \left[(u_1^2 + u_2^2) + \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_2^2 \frac{V^2}{Nm} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T} \right], \quad (12)$$

$$u_{II}^2 = \frac{1}{2} \left[(u_1^2 + u_2^2) - \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_2^2 \frac{V^2}{Nm} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T} \right], \quad (13)$$

其中 $u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -\frac{V^2}{Nm} \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$, $u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{TS^2}{C_V}$, u_1 , u_2 为通常第一声第二声声速, 分别代表可压缩波与熵波声速. He-II 中 $\gamma \approx 1$, $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \approx \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s$, 因而 $u_I \approx u_1$, $u_{II} \approx u_2$. 但 $\text{H}\downarrow$ 系统则不同, $\text{H}\downarrow$ 稀薄气体 $\gamma - 1$ 可以很大, 除非 $T \ll T_c$ (图1, 图2). 实验测量的是 u_I , u_{II} , 而不是 u_1 , u_2 ; u_I 及 u_{II} 是 u_1 , u_2 相互耦合的结果, 情形要复杂得多 (计算结果见图3及图4). $T \geq T_c$ 时, $\rho_s = 0$, $u_2 = 0$, 于是 $u_{II} = 0$, $u_I = u_1$, 这时 u_I 即通常声速. $T < T_c$ 时, u_I 及 u_1 开始均随 T 下降, u_2 则随 T 下降迅速上升, 并超过 u_1 . u_{II} 增长缓慢, u_1 , u_2 及 u_{II} 始终都比 u_I 小. T 进一步减小, u_2 及 u_{II} 也开始下降. 当 T 减小到

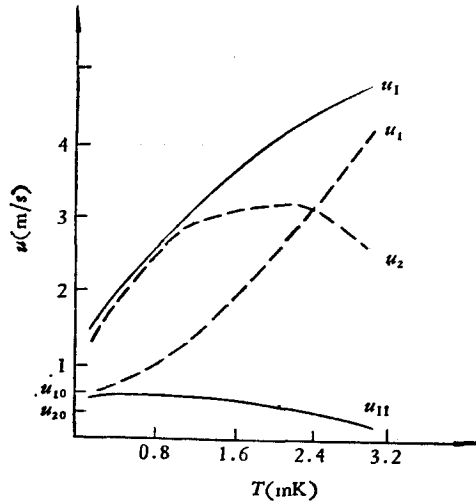


图3 $n = 10^{17} \text{ atom/cm}^3$ 时 u_I , u_{II} 对 T 的关系 ($\kappa = 2$)

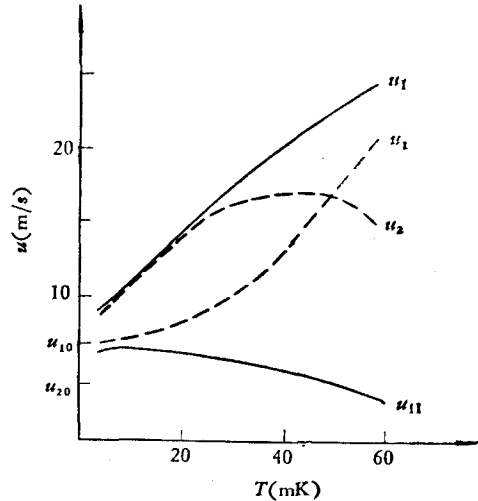


图4 $n = 10^{19} \text{ atom/cm}^3$ 时 u_I , u_{II} 对 T 的关系 ($\kappa = 2$)

表 1 $H\downarrow$ 气体的一些参数

$n = \frac{N}{V}$ (atom/cm ³)	E_0/N (erg)	P_0 10 ⁻¹ (Pa)	$u_{10} \approx u_0$ (m/s)	u_{20} (m/s)	$\Delta = \frac{4\pi a \hbar^2 n}{m}$ (erg)	T_0 (mK)
10 ²⁰	3.7×10^{-18}	3.8×10^2	2.1	12	7.2×10^{-18}	2.6×10^2
10 ¹⁹	3.6×10^{-19}	3.7	6.6	3.8	7.2×10^{-19}	63
10 ¹⁸	3.6×10^{-20}	3.6×10^{-2}	2.1	1.2	7.2×10^{-20}	16
10 ¹⁷	3.6×10^{-21}	3.6×10^{-4}	0.66	0.38	7.2×10^{-21}	3.4
10 ¹⁶	3.6×10^{-22}	3.6×10^{-6}	0.21	0.12	7.2×10^{-22}	0.74

注: 除 T_0 是玻色凝结温度外, 其余都是硬球近似下 $T = 0$ 时的值。

$r \approx 1$, 即 $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \approx \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$ 但 u_2 仍大于 u_1 时, 因 $\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_2^2 \frac{V^2}{Nm} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} \approx \sqrt{(u_1^2 - u_2^2)^2} = u_2^2 - u_1^2$, 所以 $u_1 \approx u_2$, $u_{11} \approx u_1$ (例如 $n = 10^{19}$, $T = 6.3$ mK 时, $u_1 = 6.7$ m/s, $u_{11} \approx 6.6$ m/s, $u_2 \approx 10.6$ m/s, $u_1 \approx 10.7$ m/s)。这一出乎意料的结果表明 $H\downarrow$ 系统中 u_1 与 u_{11} 的复杂性。 $T \approx 0$ 时, u_2 又小于 u_1 , 并且 $u_1 \approx u_{10} \approx \sqrt{\frac{\Delta}{m} \left(1 + 8\sqrt{\frac{a^3 n}{\pi}}\right)} \approx u_0$, $u_{11} \approx u_{20} \approx \frac{u_0}{\sqrt{3}}$ 。

五、讨 论

文献 [4] 忽略 $H\downarrow$ 原子间弱作用按理想玻色气体处理, 根据 $(\partial p_-/\partial V)_T = 0$ 认为凝结时将出现一级相变, 密度明显增大和连续比热峰^[12]。但 $T \approx T_c$ 时理想气体近似未必仍然正确。He-II 经验表明它也可能是 λ -型二级相变。我们虽不讨论 $H\downarrow$ 相变性质, 但由 (10) 式可见 $(\partial p_-/\partial V)_T \approx 0$, 这似乎排除了 $(\partial p_-/\partial V)_T = 0$ 的一级相变。 T 小时主要是基态贡献, $(\partial p_-/\partial V)_T \propto 1/V^3$ 将随密度增大迅速增大。目前不少实验寻找凝结时密度的增大, 很可能这个效应并不明显。研究 $H\downarrow$ 系统比热性质虽可确定相变行为, 但热测量技术还难以确定目前实验达到的 $n = 10^{16} - 10^{17}$ atom/cm³ 稀薄 $H\downarrow$ 气体的比热行为, 除非数密度再提高一两个数量级。因此超流条件下各种声模式测量技术有可能在 $H\downarrow$ 研究中起重要作用, 对于理想玻色气体 $(\partial p_-/\partial V)_T = 0$, 由 (13) 式可见, $u_{11} = 0$ 即理想气体玻色凝结时只有一种声模式。实验如发现两种声模式将是 $H\downarrow$ 系统出现超流的直接证据, 并表明只有考虑 $H\downarrow$ 系统的弱相互作用才能讨论其低温行为。

对魏荣爵、龚昌德教授的启发性讨论和关怀深表谢意。

参 考 文 献

- [1] I. F. Silvera and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 164.
- [2] R. W. Cline, D. A. Smith, T. J. Greytak and D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 2117.

- [3] W. C. Stwalley and L. H. Nosanow, *Phys. Rev. Lett.* **36**(1976), 910.
- [4] W. J. Mullin, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1420.
- [5] A. Isihara *et al.*, *Physica B+C*, **100**(1980), 74.
- [6] T. D. Lee, K. Huang and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **106**(1957), 1135; T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **112**(1958), 1419; *ibid.*, **105**(1957), 1119.
- [7] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, (1971).
- [8] I. F. Silvera and V. V. Goldman, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 915.
- [9] M. Weissblumth, *Atoms and Molecules*, Academic Press, New York, (1978).
- [10] I. M. Khalatnikov, in "the Physics of Liquid and Solid Helium", p. 1 edit R. H. Benemann and J. B. Ketterson, John Wiley, New York (1976).
- [11] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, 连续介质力学, 彭旭麟译, 高等教育出版社 (1958).
- [12] F. London, *Superfluid Vol. II*, Wiley, New York (1954).

POSSIBILITY OF GASEOUS SUPERFLUID AND ITS ACOUSTICAL PROPERTIES IN SPIN POLARIZED HYDROGEN ATOMS ($H\downarrow$)

NI WAN-SUN

(Department of Physics and Institute of Acoustics, Nanjing University)

ABSTRACT

The spin polarized hydrogen atoms ($H\downarrow$) are treated as a weak interacting Bose-Einstein system. On the basis of Isihara's finite temperature theory and hard-sphere approximation, the possibility of gaseous superfluid and two modes of sound have been discussed. The importance of acoustical measurement technique in study on $H\downarrow$ system is emphasized.