

具 L -近邻键的一维渗流模型 临界指数的精确解

李铁城 张昭庆 蒲富恪

(中国科学院物理研究所)

1982年8月26日收到

提 要

应用实空间重正群方法于一维具 L -近邻键的点-渗流及键-渗流模型, 得到类-温度标度率与类-场标度率, 再利用普适标度律得到全部临界指数的精确结果. 对于点-渗流模型有

$$\alpha_p = 2 - L, \quad \beta_p = 0, \quad \gamma_p = L, \quad \delta_p = \infty, \quad \eta_p = 1 \quad \text{及} \quad \nu_p = L,$$

这与生成函数方法结果一致; 对于键-渗流模型有

$$\alpha_p = 2 - \frac{L(L+1)}{2}, \quad \beta_p = 0, \quad \gamma_p = \frac{L(L+1)}{2}, \quad \delta_p = \infty,$$

$$\eta_p = 1 \quad \text{及} \quad \nu_p = \frac{L(L+1)}{2},$$

其中的“热”临界指数与转移矩阵方法结果一致, 磁临界指数是新的结果.

由点-渗流及键-渗流模型求出 Suzuki 的弱普适律的重正化临界指数为

$$\hat{\phi} \equiv (2 - \alpha)/\nu = 1, \quad \hat{\beta} \equiv \beta/\nu = 0, \quad \hat{\gamma} \equiv \gamma/\nu = 1, \quad \hat{\delta} \equiv \delta = \infty \quad \text{及} \quad \hat{\eta} \equiv \eta = 1.$$

即重正化的临界指数不仅与 L 无关, 而且也不依赖于点键的渗流模型, 即普适律对 Suzuki 重正化临界指数仍得以保持.

一、引 言

近年来对渗流理论的兴趣迅速地增长. 一方面是渗流模型本身与实际应用有广泛而密切的联系; 另一方面是它与成为当今凝聚态物理学前沿的临界现象及无序系统的研究有密切的关系.

对于具 L -近邻键的一维渗流模型的临界指数的精确解的记载是:

Reynolds 等人^[1]于 1977 年得到 $L = 1$ 的点渗流及键-渗流临界指数精确解.

Klein 等人^[2]于 1978 年得到一般 L 的点-渗流模型的临界指数的精确解, 使用的是求生成函数的方法.

张昭庆等人^[3]用转移矩阵方法最近得到 $L = 2, 3$ 的点及键-渗流的关联长度临界指数 ν_p 的精确解.

张昭庆等人^[4]用转移矩阵方法得到一般 L 的点及键-渗流的关联长度临界指数精确解.

本文使用无穷大元胞到有限元胞的实空间重正群变换的方法求出一维 L 下点及键-

渗流的全部临界指数(热的与磁的)的精确解。本文的主要结果在文献[5]中作了简要报道,这里给出详尽的过程与结果。我们所得结果除与以上已有的精确结果的记载完全一致外,对键-渗流的磁的 β_p , γ_p , δ_p 及 η_p 四个临界指数是首次给出的结果。我们指出对于点-键渗流(site-bond percolation)的一维 L -近邻键模型的临界指数的研究将是平庸的。由于渗流问题与热力学临界现象密切相关^[6],而重正群方法在处理临界现象的很大成功(包括用到渗流问题^[7])很自然会想到试图用重正群方法。而且也显示了其优越性,例如比转移矩阵方法要简单得多,还能通过鬼场(ghost field)之引入得到转移矩阵方法所不能得到的类-场标度率,从而得到全部临界指数,当然如何使用重正群方法到 Bethe 晶格则还是个问题(一维问题是近邻数为2的 Bethe 晶格)。一方面重正群方法用于临界现象很有效,但也常带来一些不透明之处,即人们感到只知道如何使用重正群方法而对如何改进及估计误差则相当困难。对于一维渗流(L -近邻键模型)之所以能使用重正群方法得到精确结果,是由于作标度变换的单元长度 l (l 为格点数)趋于无穷大的渐近结果,即边界效应随变换标度趋于无穷而消失的精确结果。对于二维格子渗流问题也应有相应的结论,只是二维问题一般不能得到解析结果,而只能使用大元胞 Monte-Carlo 方法得到趋于收敛的结果^[8]。

将本文求出的点及键渗流的精确结果代入 Suzuki^[9]提出的新普适律,我们将会发现对于这种重正化的临界指数不仅与 L 无关(在文献[2]中曾指出过点-渗流模型的重正化临界指数与 L 无关),而且也与是点-渗流抑键-渗流无关,即通过重正化临界指数之引入恢复了更为广义的普适律。

在本文中重正群方法用于 L -近邻键一维渗流模型有两点扩展,其一是包括鬼场;其二是对键-渗流我们给出了明确的元胞定义。

二、点-渗流问题

模型如图1所示($L=2$ 情形)。所谓点-渗流即键之概率为1而点占据之随机概率为 p 。反之即键-渗流模型。

我们将具 l 个格点的单元作标度换到具 L 格点单元($l>L$),见图1($l=3$, $L=$

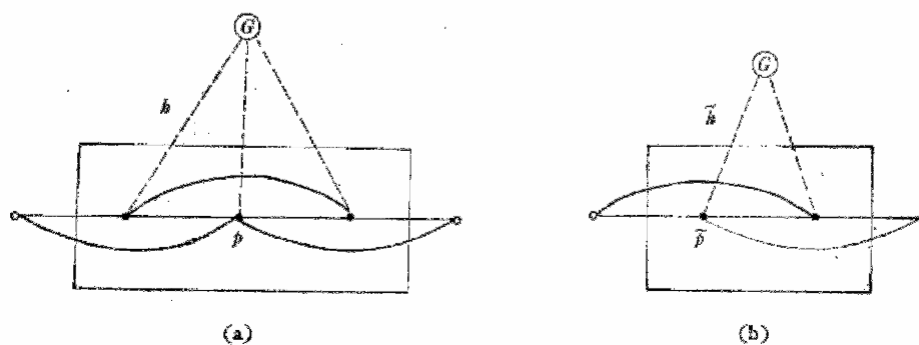


图 1

2). 这不是通常的元胞到格点的变换, 而是大元胞到小元胞的标度变换^[8]. 显然对 $L > 1$ 情形不再能作从元胞到点的标度变换, 因为这时总存在该点到其他邻近点的键^[8]. 最方便的办法是取最小元胞(具 L 格点元胞)为变换后的元胞, 图 1 中虚线为鬼场键, 占据概率为 $h (\leq 1)$. 令标度变换后的量为带“ $\sim$ ”的量.

首先考察从 L 格点元胞一端到另端的联通概率. 显然, 除非 L 个格点全不占据, 则总是联通的. 对于联通情形则将不依赖于鬼场键之存在与否; 而对于 L 格点全不占据的不联通情形, 鬼场键的存在也不能对联通作出贡献, 故格点的联通概率为

$$1 - \tilde{q}^L, \quad (1)$$

其中 $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$.

对于 $l(>L)$ 格点单胞的渗流比较复杂. 当格点出现空位时, 只要这些空位不相继排列成等于或大于 L 个空位情形, 则这些空位不能截断联通性, 而只要依赖格点及 L -键构成联通的情形, 都将与鬼场键之存在与否无关. 对于 $(l-L+1)$ 种出现一次 L 个相继排列空位情形, 则连通将由 L 个空位的两边的鬼场键“搭桥”而得以保持, 即空位两侧鬼场键的同时存在才能构成连通, 故连通概率为

$$[1 - (1-h)^{l_L}] \cdot [1 - (1-h)^{l_R}], \quad l_L + l_R = L. \quad (2)$$

由 (1) 式及 (2) 式得到第一个标度变换方程

$$\begin{aligned} 1 - \tilde{q}^L &= p^l + \binom{l}{1} p^{l-1} q + \binom{l}{2} p^{l-2} q^2 + \cdots + \binom{l}{L} p^{l-L} q^L \\ &\quad - (l-L+1)p^{l-L} q^L + p^{l-L} q^L \{ (1-t)(1-t^{l-L-1}) + (1-t^2)(1-t^{l-L-3}) \\ &\quad + \cdots + (1-t^{l-L-1})(1-t) \} + o(q^{L+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$t = 1 - h, \quad q = 1 - p.$$

现在考察从任意一端流向单胞再通向鬼场的联通概率. 对于 L -格点单胞, 由前述只要空格点数小于 L , 则通向鬼场概率由每个占据格点的鬼场键的出现概率决定, 因为单胞本身这时总是连通的, 故通过 L -格点通向鬼场概率 $\mathcal{P}(L)\mathcal{H}(L)$ 为

$$\begin{aligned} &\tilde{p}^L(1-\tilde{p}^L) + \binom{L}{1} \tilde{p}^{L-1} \tilde{q}(1-\tilde{p}^{L-1}) + \binom{L}{2} \tilde{p}^{L-2} \tilde{q}^2(1-\tilde{p}^{L-2}) + \cdots \\ &\quad + \binom{L}{L-1} \tilde{p} \tilde{q}^{L-1}(1-\tilde{p}) = 1 - (1-\tilde{p}\tilde{h})^L. \end{aligned} \quad (4)$$

对于 l -格点单胞从一端通向鬼场概率考虑如下: 首先我们认为单胞本身的连通性是应该考虑在内的, 此点有别于文献 [8], 由于文献 [8] 是研究二维问题, 只有近似结果, 故可以采用各种规定的连通规则. 但由于一维情形恒有临界点 $p^* = 1, h^* = 0$, 故对一维情形无论采用我们这里的通向鬼场规则或文献 [8] 的规则, 结果都是相同的, 由上面的考虑及方程 (4), 得到第二个标度变换方程为

$$\begin{aligned} 1 - (1-\tilde{p}\tilde{h})^L &= p^l(1-t^l) + \binom{l}{1} p^{l-1} q(1-t^{l-1}) + \cdots + \binom{l}{L} p^{l-L} q^L(1-t^{l-L}) \\ &\quad - (l-L+1)p^{l-L} q^L(1-t^{l-L}) + p^{l-L} q^L \{ (1-t)(1-t^{l-L-1}) + \cdots \} \end{aligned}$$

$$+ (1 - t^{l-L-1})(1 - t)\} + o(q^{l+1}h). \quad (5)$$

易证得, 方程 (3), (5) 给出的不稳定固定点为

$$p^* = 1, \quad h^* = 0. \quad (6)$$

对方程 (3) 两边取微分, 注意到 $dp = -dq$ 得

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right|_* \cdot \left(\frac{\tilde{q}}{q} \right)^{L-1} = (l - L + 1), \quad (7)$$

其中 * 代表在临界点 $p^* = 1, h^* = 0$ 处. 又在 $q \rightarrow 0$ 时有

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\tilde{q}}{q} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{1 - \tilde{p}}{1 - p} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\tilde{p} - \tilde{p}^*}{p - p^*} = \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right|_*. \quad (8)$$

由 (7), (8) 式得

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right|_* = (l - L + 1)^{\frac{1}{L}}. \quad (9)$$

又由 (3) 式的微分式可得

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial h} \right|_* = 0. \quad (10)$$

故由两标度变换方程所得本征值方程将脱耦合, 即得第一个本征值

$$\lambda_p = (l - L + 1)^{1/L}. \quad (11)$$

由方程 (5) 及 (6) 可得

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial h} \right|_* = l/L, \quad (12)$$

即第二个本征值

$$\lambda_h = l/L. \quad (13)$$

定义标度率 y_p 及 y_h :

$$\lambda_p = \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right|_* = b^{y_p}; \quad \lambda_h = \left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial h} \right|_* = b^{y_h} \quad (14)$$

及标度变换因子

$$b = l/L.$$

由 (11)–(14) 式得

$$y_h = 1. \quad (15)$$

及

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_p = 1/L. \quad (16)$$

有了类-温度标度率 y_p 及类场标度率 y_h , 由普适标度律^[3]

$$\begin{aligned} 2 - \alpha_p &= y_p^{-1}, & \beta_p &= (1 - y_h)/y_p, & \delta_p &= y_h/(1 - y_h), \\ \gamma_p &= (2y_h - 1)/y_p, & \nu_p &= y_p^{-1} & \text{及} & \eta_p = 3 - 2y_h \end{aligned} \quad (17)$$

得到临界指数的精确结果

$$\alpha_p = 2 - L, \quad \beta_p = 0, \quad \gamma_p = L, \quad \delta_p = \infty, \quad \eta_p = 1 \quad \text{及} \quad \nu_p = L. \quad (18)$$

此结果与用生成函数方法的结果^[2]一致.

三、键-渗流问题

键-渗流问题一般比点-渗流复杂, 生成函数方法仅求解过点-渗流问题; 转移矩阵方法只能解决键-渗流问题的类-温度临界指数。

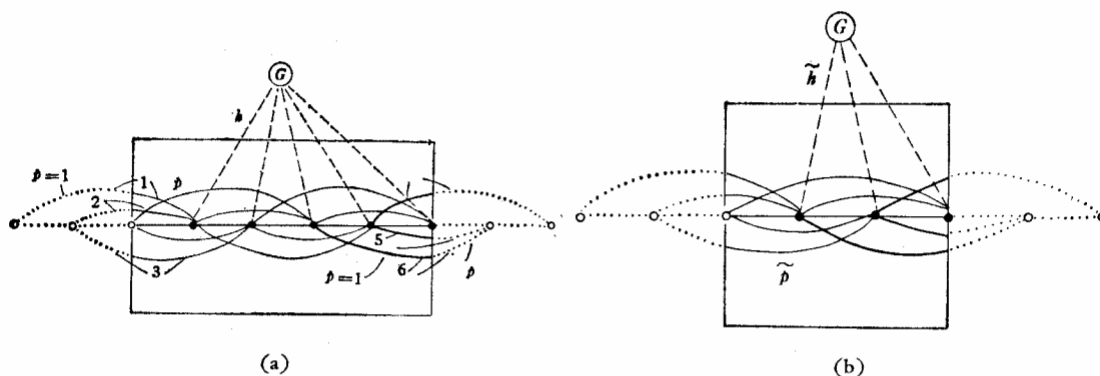


图 2

与点-渗流相同, 标度变换的最小元胞包含 L -格点. 在图 2 中给出 $l=5$, $L=3$ 的元胞及 $L=3$ 的最小元胞. 图 2 中的 p 及 $\bar{p}$ 为标度变换前后键的占据概率. 对于键-渗流问题如何明确的定义元胞是值得讨论的. 如图 2 所示, 从归一的考虑连接元胞间的键 1—6 应只有一半计入本元胞, 为保持定义的元胞满足正确的归一与周期重复性, 我们规定把连通元胞间的键分成两部份, 其一部份占据几率为 1, 另部份占据几率为 p (如图 2 的粗线代表占据几率为 1, 细线部份占据几率为 p). 如此定义的如图 2 所示的元胞, 则可保持原有的连通性, 正确的归一及可重复性. 我们仍然应用从含 $l(>L)$ 格点元胞到 L -格点元胞的实空间重整群变换的方法. 使格点元胞不渗流的唯一“最经济”方案 (即空键数目最少) 是使通过一个端点边界线的所有键为空键. 因为一维问题的临界点在 $q^*=0$ 处, 故对于“非经济”的更多数目空键情形将成为高级小量, 而通过端点边界线的键的数目为

$$L + (L-1) + (L-2) + \cdots + 1 = \frac{L(L+1)}{2}. \quad (19)$$

即分别属于第一格点 (例如从左向右数, 见图 2) 的 L 个键, 第二格点的 $(L-1)$ 个键……直到第 L 个格点的一个键. 使一般 $l(>L)$ 格点元胞不渗流的“最经济”方案与上相仿, 即通过任二相邻格点的界线的 $L(L+1)/2$ 个键成为空键. 用图的表示更为简单明瞭, 在图 2 中所有被概率为 1 的键相连的格点都是相通的, 故可将这些点并缩为一个点, 同时保持鬼场键的数目而得到图 3 所示经并缩后的元胞.

从图 3(b) 很显然对 L -格点元胞的连通概率为

$$\mathcal{P}(L) = 1 - \bar{q}^{\frac{L(L+1)}{2}}. \quad (20)$$

而其通过元胞通向鬼场的概率为

$$\mathcal{P}(L)\mathcal{H}(L) = (1 - \bar{q}^{\frac{L(L+1)}{2}}) \cdot (1 - \bar{p}). \quad (21)$$

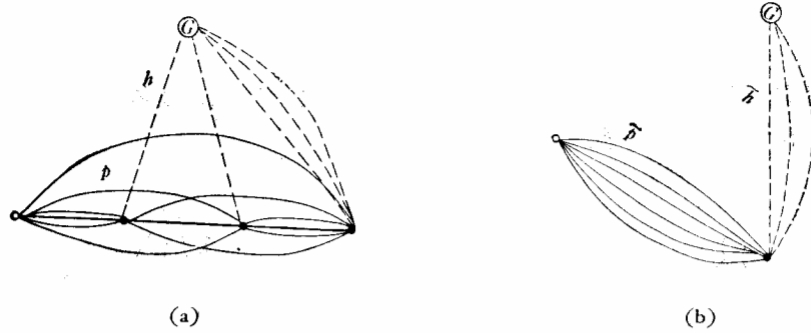


图 3

对于 l -格点元胞,由图 3(a) 可知: 并缩后的元胞有 $(l - L + 2)$ 个格点, 键的数目 m 为

$$m = lL - ((L - 1) + (L - 2) + \cdots + 2 + 1) = L \left(l - \frac{L - 1}{2} \right),$$

上式右端有 L 个 h 键与鬼场相连; 除左、右端点外还有 $(l - L)$ 个鬼场键; 穿过元胞内任二相邻格点的界线的键数目为 $\frac{L(L + 1)}{2}$, 这正是切断元胞连通至少所需的空键数目. 而这种“最经济”的切断元胞连通的方式数目为 $(l - L + 1)$. 故由图 3(a) 得并缩后 l -格点连通概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(l) = & p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \cdots + \left[\binom{m}{\frac{L(L+1)}{2} - (l-L+1)} \right] p^{\frac{m-L(L+1)}{2}} q^{\frac{L(L+1)}{2}} \\ & + p^{\frac{m-L(L+1)}{2}} q^{\frac{L(L+1)}{2}} \{ (1-t)(1-t^{l-1}) + (1-t^2)(1-t^{l-2}) + \cdots \\ & + (1-t^{l-L})(1-t^L) \} + o(q^{\frac{L(L+1)}{2}+1}). \end{aligned} \quad (22)$$

而通过元胞再通向鬼场的连通概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(l)\mathcal{H}(l) = & (1-t^l) \left\{ p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \binom{m}{2} p^{m-2} q^2 + \cdots \right. \\ & + \binom{m}{2L-1} p^{m-2L+1} q^{2L-1} \left. \right\} \\ & + p^{m-2L} q^{2L} \{ N_{l-L+2}(2L)(1-t^l) + N_{l-L+1}(2L) \\ & \times (1-t^{l-1}) \} + o(q^{2L+1}h), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $N_J(2L)$ 为空键数 $2L$, 并缩元胞中相连格点数为 J 的组合数, 即考虑到了由于 $2L$ 个空键可能造成孤立格点情形. 由于临界点在 $p^* = 1$, $h^* = 0$ 处, 即决定标度率 y_h 的仅是方程 (23) 中 $(-t^l p^m)$ 项, 故 $N_J(2L)$ 对临界行为系无关量, 无需写出 $N_J(2L)$ 具体的形式.

由方程 (20) 及 (22), 得到第一标度变换方程; 方程 (21) 及 (23), 给出第二标度变换方程. 对两标度变换方程在临界点处取微分, 并利用 (8) 式得

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \right|_* = (l - L + 1)^{2/(L(L+1))}, \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial h} \right|_* = l/L, \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial h} \right|_* = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial p} \right|_* = 0. \quad (26)$$

由 $b = l/L$ 及标度率定义 (13) 式及方程 (24)–(26) 易得

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y_p = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{2}{L(L+1)} \cdot \frac{\ln(l - L + 1)}{\ln(l/L)} = \frac{2}{L(L+1)}, \quad (27)$$

$$y_h = \frac{\ln l/L}{\ln l/L} = 1. \quad (28)$$

上式代入标度律^[6]得一维 L -近邻键的键-渗流的全部临界指数

$$2 - \alpha_p = \frac{L(L+1)}{2}, \quad \gamma_p = \nu_p = \frac{L(L+1)}{2}, \quad \eta_p = 1, \quad \beta_p = 0 \quad \text{及} \quad \delta_p = \infty, \quad (29)$$

其中“热”临界指数 α_p, ν_p 与转移矩阵方法的精确结果^[4]一致, 其余的四个磁的及温度-磁的临界指数是首次给出的结果. 因为当 $L > 1$ 时恒有 $L(L+1)/2 > L$, 故一维 L -键的点-渗流的临界行为完全由点-渗流所决定.

有趣的是, 虽然当 $L \geq 2$ 时, 点与键的渗流的临界指数不仅依赖 L , 且有不同的普适律, 但如将结果 (18) 式及 (29) 式代入 Suzuki 的普适律^[9]:

$$\hat{\phi} = (2 - \alpha)/\nu, \quad \hat{\beta} = \beta/\nu, \quad \hat{\gamma} = \gamma/\nu, \quad \hat{\delta} = \delta \quad \text{及} \quad \hat{\eta} = \eta \quad (30)$$

得

$$\hat{\gamma} = 1, \quad \hat{\beta} = 0, \quad \hat{\eta} = 1, \quad \hat{\delta} = \infty \quad \text{及} \quad \hat{\phi} = 1. \quad (31)$$

不仅与 L 无关, 即恢复了 $L = 1$ 时具有的普适律, 也与是点抑是键的渗流无关, 因而得到范围更广的普适律.

此外, 由于一维问题临界点为 $p^* = 1, h^* = 0$, 带来很大的方便, 因在临界点附近生成函数中大集团的贡献权重很大, 当 p 无限接近 p^* 时, 则几乎各个格点都是连通的, 即连通格点数 $\sim o(N)$, N 为系统中格点数. 因此我们也可将鬼场键连在键上 (处理键-渗流问题), 生成函数

$$G(h) \sim \sum' \langle n_s \rangle e^{-h s} \quad \text{变成} \quad \tilde{G} \sim \sum' \langle n_s \rangle e^{-h L s} = G(Lh).$$

故其对 h 之微商 (各次矩) 只带来个常系数而并不影响临界指数 ($\langle n_s \rangle$ 为有 s -格点连通的 s -集团的平均数目). 也正是由于临界点 $p^* = 1, h^* = 0$ 带来的方便, 也还可以有其它种定义键-渗流元胞的方案以及大集团 l 到大集团 $l' (l \gg l', l \gg 1, l' \gg 1)$ 的重正变换方法等, 都得到相同的准确的临界指数.

参 考 文 献

- [1] P. J. Reynolds, H. E. Stanley and W. Klein, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10** (1977), L203.
- [2] W. Klein, H. E. Stanley, S. Render and P. J. Reynolds, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **11** (1978), L17.
- [3] Zhang Zhao-qing and Shen Jue-lian, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15** (1982), L363.

- [4] Zhang Zhao-qing, Pu Fu-cho, Li Tie-cheng, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **16**(1983), 125.
- [5] Li Tie-cheng, Zhang Zhao-qing, Pu Fu-cho, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **16**(1983), 665.
- [6] P. W. Kasteleyn and C. M. Fortain, *J. Phys. Soc. Jap. Suppl.*, **26**(1969), 11.
- [7] R. B. Griffiths *J. Math. Phys.*, **8**(1967), 484.
- [8] P. J. Reynolds, H. E. Stanley and W. Klein, *Phys. Rev. B.*, **21**(1980), 1223.
- [9] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **51**(1974), 1692.

ONE-DIMENSIONAL PERCOLATION PROBLEM WITH FURTHER NEIGHBOUR BONDS—REAL-SPACE RENORMALIZATION GROUP METHOD

LI TIE-CHENG ZHANG ZHAO-QING PU FU-CHO

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

One-dimensional site and bond percolation problems with bonds connecting L th nearest neighbors are studied by using real-space renormalization group method. Exact thermal-like and field-like scaling powers are found. Using the scaling relations we obtain all the critical exponents. For the site percolation, we have

$$\alpha_p = 2 - L, \beta_p = 0, \gamma_p = L, \delta_p = \infty, \eta_p = 1 \text{ and } \nu_p = L$$

which are consistent with the results obtained by using generating function method. For the bond percolation, we have

$$\alpha_p = 2 - \frac{L(L+1)}{2}, \beta_p = 0, \gamma_p = L, \delta_p = \infty, \eta_p = 1 \text{ and } \nu_p = L$$

where the "thermal" exponents are consistent with the results obtained by using transfer matrix method. Magnetic exponents found here are new results. Suzuki's renormalized exponents are

$$\hat{\alpha} \equiv (2 - \alpha)/\nu = 1, \hat{\beta} \equiv \beta/\nu = 0, \hat{\gamma} \equiv \gamma/\nu = 1, \hat{\delta} \equiv \delta = \infty \text{ and } \hat{\eta} \equiv \eta = 1$$

which are independent of both L and site or bond percolations.