第32卷 第11期 物 理 学 报 Vol. 32, No. 11
1983年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1983

运动磁单极子的规范势

石 康 杰
(西北大学物理系)

1982年9月9日收到

提 要

本文利用诱导 $SU(2)$ 规范势 $\boldsymbol{A}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ 的一些性质，从磁单极子的辐射电磁场强的已知表达式出发，构造出一个 $\boldsymbol{n}$ 场，使得由它得到的诱导势经约化之后得到的 $U(1)$ 场强与磁单极子的辐射电磁场强一致. $\boldsymbol{n}$ 得到之后，就得到 $SU(2)$ 规范势，再经约化，就得到相等价的 $U(1)$ 势，既然它的场强与磁单极子场强一致，它的 $U(1)$ 势就是磁单极子的 $U(1)$ 势. 这个 $U(1)$ 势是有奇异的(奇异弦)，可以用分区表示的方法来避免它. 当粒子静止时，这个势的结果与著名的吴-杨势一致.

自从 Dirac 提出磁单极子概念，尤其是作为杨-Mills 场无源解的吴-杨磁单极势提出之后，关于磁单极子的规范势曾经有过很多讨论.

1948 年 Dirac 讨论了作任意运动的磁单极子和伴随的奇异弦的运动方程，给出了解 ($U(1)$ 势)的一般以积分表达的形式[1].

1976 年，Kaku 给出了作任意运动的类粒子的杨-Mills 场无源解的一个具体的洛仑兹协变形式，它在静止时，规范势与吴-杨势等价[2].

还有文献给出一个作直线加速运动的磁单极子[3]以及多个静止磁单极子的 $SU(2)$ 规范势及其等价的 $U(1)$ 势[4].

本文给出作任意运动的一个磁单极子的 $SU(2)$ 规范势的具体形式，进一步得到与它等价的 $U(1)$ 势，与吴-杨势类似，用分区表示的方法避免奇异弦. 它的场强正是磁单极子作任意运动时的场强. 在粒子静止时，它的规范势与吴-杨势等价.

由于 $U(1)$ 势是可以迭加的，当然可以用迭加的方法得到多个磁单极子的 $U(1)$ 规范势.

为叙述方便，我们作以下记号的规定:

1. 希腊字母指标 μ, ν 等从 0 到 3, $x_0 = ct$ 拉丁字母 i j k 从 1 到 3. 重复指标表示求和.

2. 对任何矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ $\hat{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}|$ 矢量表示三维矢量.

3. 对三维旋转矩阵 g 的无穷小算子 dgg^{-1}，我们规定一个矢量 $[\boldsymbol{dgg}^{-1}]$，它们的关系为

$$(dgg^{-1})_{ij} = -\varepsilon_{ijk}[\boldsymbol{dgg}^{-1}]_k,$$

由于 dgg^{-1} 是反对称矩阵，这样规定总是可能的. 在这种规定下，对任意矢量 $\boldsymbol{\phi}$:

$$(dgg^{-1})\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{dgg}^{-1}] \times \boldsymbol{\phi} \text{ 总能成立.}$$

对 $g^{-1}dg$ 也作类似规定．

4．一个粒子的运动方程用 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\tau)$ 表示，

$$\boldsymbol{v}\equiv\frac{d\boldsymbol{y}}{d\tau}\equiv c\boldsymbol{\beta}.$$

如果在 τ 时刻从 $\boldsymbol{y}(\tau)$ 沿 $\hat{R}$ 方向发出的光在 t 时刻到达 $\boldsymbol{x}$ 点，也就是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(\tau)+\hat{R}c(t-\tau)\qquad|\hat{R}|=1.$$

我们称时空点 $(\boldsymbol{y}(\tau),\tau)$ 是 $(\boldsymbol{x},t)$ 的源点．定义 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=c(t-\tau)\hat{R}=R\hat{\boldsymbol{R}}$．具有同一个源点 $\boldsymbol{y}(\tau)$ 和同一个方向 $\hat{R}$ 的不同时空点，我们称它们处于同一根“光线”上．

将四维闵空的规范场表为

$$D_\mu\boldsymbol{\phi}\equiv\partial_\mu\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{\phi}.$$

如果它的规范势可以用一个三维单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 表示出来，

$$\boldsymbol{A}_\mu=\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n},$$

式中

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(x_\mu),$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1.$$

则称它是由 $\boldsymbol{n}$ 诱导的规范场，这种规范场总可以通过规范变换变为阿贝耳势 $\boldsymbol{A}'_\mu=\boldsymbol{k}a_\mu$（其中 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量），从而得到等价的 $U(1)$ 势 a_μ，这称为 $SU(2)$ 势的“约化”．

约化之后得到等价的 $U(1)$ 规范势和场强．

$$F_{\mu\nu}=-\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n},$$

$$E_i\,(\text{电场强度})=F_{i0}=-\partial_i\boldsymbol{n}\times\partial_0\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n},$$

$$B_i\,(\text{磁场强度})=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}=\frac{-1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j\boldsymbol{n}\times\partial_k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}),$$

$$F_{ij}=\epsilon_{ijk}B_k.$$

诱导势具有下列性质：

由于 $SU(2)$ 规范势满足边基恒等式

$$D_\mu F_{\nu\lambda}+D_\nu F_{\lambda\mu}+D_\lambda F_{\mu\nu}=0,$$

所以在约化之后就有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\quad(\text{令 } x_0=ct),\tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\tag{2}$$

如果在某个方向 $\hat{l}$ 上 $\boldsymbol{n}$ 不变，即 $\hat{l}_i\partial_i\boldsymbol{n}=0$，则

$$0=\hat{l}_i\partial_i\boldsymbol{n}\times\partial_j\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=-\hat{l}_iF_{ij}=-\hat{l}_i\epsilon_{ijk}B_k=(\hat{l}\times\boldsymbol{B})_j$$

对一切 j 成立，

所以　$\hat{l}\times\boldsymbol{B}=0$，　如果　$\boldsymbol{B}\neq0$，　则　$\boldsymbol{B}/\!/\hat{l}$．　(3)

此外，如果某个矢量 $\boldsymbol{u}$ 使

$$u_i\partial_i\boldsymbol{n}+\partial_0\boldsymbol{n}=0,$$

则

$$E_i = -\partial_i \boldsymbol{n} \times \partial_0 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -\partial_i \boldsymbol{n} \times (-u_j \partial_j \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}$$
$$= -u_j F_{ij} = -u_j \epsilon_{ijk} B_k = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{u})_i,$$

所以

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{u}. \tag{4}$$

以上都是诱导势的场强自然满足的关系.

一个作任意运动的点电荷 e 的辐射电磁场强为

$$\boldsymbol{E}_e = e \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}}{c}\right)^3} \left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot R\right)$$
$$+ e \frac{1}{c^2 \left(R - \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}}{c}\right)^3} \boldsymbol{R} \times \left\{\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{V}}{c} R\right) \times \frac{1}{V}\right\},$$

$$\boldsymbol{B}_e = \frac{\boldsymbol{R}}{R} \times \boldsymbol{E}_e.$$

令 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}_e$, $\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{B}_e$, $Q = e = 1$, 就得到作任意运动的磁单极子的辐射电磁场,它是满足麦克斯韦方程组的. 用我们在前面规定的记号,

$$\boldsymbol{B}' = \frac{1 - \beta^2}{R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} (\hat{R} - \boldsymbol{\beta})$$
$$+ \frac{1}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} \left\{ \hat{R} \times \left[(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \left(\frac{d}{c d\tau} \boldsymbol{\beta} \right) \right] \right\},$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{B}' \times \hat{R}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}', \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}' = 0. \tag{7}$$

在粒子所在位置以外都成立. 可以证明,对于这个电磁场, t 时刻的任意一根磁力线通过当时粒子所在位置 $\boldsymbol{y}(t)$.

我们现在构造一个 $\boldsymbol{n}(x_\mu)$, 使它满足如下要求. (我们用 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ 表示由它诱导出来的规范场强,与磁单极子的场强 $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{E}'$ 相区别.)

1) 在某个时刻 t_0, 在 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 附近很小的邻域内有 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$.

2) 在 t_0 时刻, 使磁单极子的每根磁力线上 $\boldsymbol{n}$ 相同. 则由 (3) 式 $\boldsymbol{B}' /\!/ \boldsymbol{B}$ 处处成立 (除 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 以外). 又由于 (2) 式和 (7) 式: $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{B}' = 0$, 因此对任意通过点 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 的磁力线上 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$,另外由于一切磁力线都通过当时的粒子位置 $\boldsymbol{y}(t_0)$,所以 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$ 在 t_0 时刻处处成立.

3) 在不同的时刻,我们使处于同一根"光线"上的时空点的 $\boldsymbol{n}$ 相同,则

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x} + c\hat{R}dt, t + dt),$$

$$0 = dn = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} dt + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_i} (c\hat{R}dt)_i$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} dt + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_i} (c\hat{R}_i) dt,$$

所以

$$\hat{R}_i \partial_i \boldsymbol{n} + \partial_0 \boldsymbol{n} = 0.$$

而由 (4) 式得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times \hat{R} \text{ 在任意时空点成立.} \tag{8}$$

如果这三个条件都满足，则在任意时空点，由 (1), (8) 式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \boldsymbol{E} = -c\nabla \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{R}).$$

又由 (6) 式和 (5) 式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} = -c\nabla \times \boldsymbol{E}' = -c\nabla \times (\boldsymbol{B}' \times \hat{R}).$$

而在初始时刻 t_0，又有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ 对一切时空点成立. 这样，我们由 t_0 时刻 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ 可以推知当时 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}$，因而在 $t_0 \pm dt$ 时刻 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ 处处成立，继续下去，可以推知任意时刻 $t < t_0$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ 成立.

又由于 (5), (8) 式 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'$ 在 $t < t_0$ 的任何时空点成立. 规定 $t < t_0$ 是因为要使每个时空点能找到 t_0 时刻在同一根“光线”上对应的点.

直接将得到的 $\boldsymbol{n}(x_\mu)$ 算出诱导场强，与磁单极子的场强比较，结果确实是对的，不过计算烦琐，不在这里赘述.

为了进一步得到具体结果，我们讨论如何构造一个 $\boldsymbol{n}(x_\mu)$ 使它分别达到上述三点要求. 先对每个时空点定义两个矢量 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{q}$：设时空点 $(\boldsymbol{x}, t)$ 的源点为 $(\boldsymbol{y}, \tau)$,

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = c\hat{R}(t - \tau).$$

对每个时空点 x_μ，都可以找到相应的 $\hat{R}$ 以及 $\boldsymbol{\beta}(\tau)$，定义 $\boldsymbol{S} \equiv \hat{R} - \boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{s} + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1}{\beta^2} \right) (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta}$$

$$= \hat{R} + \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1}{\beta^2} (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \boldsymbol{\beta}.$$

再定义一个 $|\boldsymbol{\beta}| = \beta$ 的函数 f,

$$f \equiv \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1}{\beta^2}.$$

(1) 在很接近磁单极子的地方，

$$\boldsymbol{B} \doteq \frac{1 - \beta^2}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} (\hat{R} - \boldsymbol{\beta})$$

也就是与一个匀速直线运动的磁单极子的场几乎相同．因而在这个邻域内找到 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t_0)$ 使它满足条件 1) 是容易的，计算表明，一个作匀速直线运动的粒子，只要令 $\boldsymbol{n}(x_\mu) = -\hat{\boldsymbol{q}}$ 就可以使诱导场强 $F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}$（磁单极子的场强）．

因此在 t_0 时刻，在当时粒子所在位置的无穷小邻域内，只要令 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}(t_0)t_0) = -\hat{\boldsymbol{q}}$，就可以使在这个邻域中 $F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}$．

(2) 为了找出在 t_0 时刻 $\boldsymbol{n}$ 在整个空间中的分布规律，我们来讨论沿着磁单极子磁力线前进时 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 怎样变化．按前面的第二个条件，这时 $\boldsymbol{n}$ 是应该不变的．

因为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(\tau) + \hat{R}c(t - \tau),$$

所以

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \frac{d\boldsymbol{y}}{d\tau} d\tau + d\hat{R}c(t - \tau) + \hat{R}c(dt - d\tau) \\ &= c\boldsymbol{\beta} d\tau + d\hat{R}R + \hat{R}cdt - \hat{R}cd\tau \\ &= cd\tau(\boldsymbol{\beta} - \hat{R}) + Rd\hat{R} + \hat{R}cdt, \end{aligned}$$

在同一时刻，$dt = 0$，得到

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= cd\tau(\boldsymbol{\beta} - \hat{R}) + Rd\hat{R} \\ &= cd\tau\left[\boldsymbol{\beta} - \hat{R} + R\frac{d\hat{R}}{cd\tau}\right]. \end{aligned}$$

而在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 点的磁单极子的磁场强度

$$\boldsymbol{B}' = -\frac{1 - \beta^2}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3}\left\{\boldsymbol{\beta} - \hat{R} - R\frac{\left[\hat{R} \times \left(\boldsymbol{s} \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{cd\tau}\right)\right]}{1 - \beta^2}\right\},$$

其中 $\boldsymbol{s} \equiv \hat{R} - \boldsymbol{\beta}$.

只要

$$\frac{d\hat{R}}{cd\tau} = \frac{-1}{1 - \beta^2}\left\{\hat{R} \times \left(\boldsymbol{s} \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{cd\tau}\right)\right\},$$

就有 $d\boldsymbol{x} /\!/ \boldsymbol{B}'$，由于

$$\frac{d\hat{R}}{cd\tau} \cdot \hat{R} = 0,$$

而且 $\boldsymbol{B}' \cdot \hat{R} \neq 0$，这个解是唯一的．

所以，在同一时刻沿着磁力线前进时

$$d\hat{R} = \frac{-1}{1 - \beta^2}[\hat{R} \times (\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{\beta})]. \qquad (9)$$

因为 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}$ 和 $\hat{R}$ 的函数，我们可以由 (9) 式导出沿磁力线前进时 $d\boldsymbol{q}$ 的表达式．结果为

$$d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\left[\left(\frac{-1}{1 - \beta^2}\right)(\hat{R} \cdot d\boldsymbol{\beta})\right] + (d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}f) \times \boldsymbol{q},$$

$$f \equiv \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1}{\beta^2}.$$

从而可以推得在同一时刻沿磁力线移动时，

$$d\hat{q} = (d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} f) \times \hat{q}.$$

若以 τ 为参量，就是

$$\hat{q}(\tau + d\tau) = \hat{q}(\tau) + (d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} f) \times \hat{q}(\tau).$$

这是一个对 $\hat{q}(\tau)$ 的微转动，转动矩阵本身与 $\hat{R}$ 无关．当粒子运动确定后，只与 τ 和 $d\tau$ 有关．我们定义微转动 $g(\tau + d\tau, \tau)$ 使得

$$g\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} + (d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} f) \times \boldsymbol{\phi},$$

所以

$$\hat{q}(\tau + d\tau) = g(\tau + d\tau, \tau)\hat{g}(\tau).$$

因此，在同一根磁力线上

$$\begin{aligned}\hat{q}(\tau_2) = q(\tau_2, \tau_2 - d\tau)g(\tau_2 - d\tau, \tau_2 - 2d\tau)\cdots \\ g(\tau_1 + d\tau, \tau_1)\hat{g}(\tau_1) = g(\tau_2, \tau_1)\hat{q}(\tau_1).\end{aligned}$$

当 τ_1 改变时，

$$\begin{aligned}g^{-1}dg &= g^{-1}(g(\tau_2, \tau_1 + d\tau) - g(\tau_2, \tau_1)) \\ &= g^{-1}(\tau_1 + d\tau, \tau_1) - I,\end{aligned}$$

所以

$$g^{-1}dg\boldsymbol{\phi} = -(d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} f) \times \boldsymbol{\phi},$$

也就是，按本文开始约定的记号

$$-d\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} f = [\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{dg}]. \tag{10}$$

从这里可以看出 $g(\tau_2\tau_1)$ 仅与粒子在 $\tau_1 \to \tau_2$ 这段时间内的运动 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\tau)$ 有关，而与在什么时刻、沿哪一条磁力线都没有关系．

由于要求在同一根磁力线（磁单极子的磁力线）上，$\boldsymbol{n}$ 要不变（在 t_0 时刻），所以

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}(t_0), t_0) = -\hat{q}(\tau_0).$$

$\hat{q}(\tau_0)$ 是沿着 $\boldsymbol{x}$ 点所在的磁力线走向当时粒子所在位置 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 时 $\hat{q}(\tau)$ 的极限，在数值上，

$$\tau_0 = t_0,$$

而

$$\hat{q}(\tau_0) = g(\tau_0, \tau)\hat{q}(\tau),$$

所以

$$\boldsymbol{n}(x, t_0) = -g(\tau_0, \tau)\hat{q}(\boldsymbol{x}, t_0).$$

（3）在其它时刻，对于同一根"光线"上的两点 $(\boldsymbol{x}', t')$ 和 $(\boldsymbol{x}, t_0)$，$\boldsymbol{n}$ 应该相同．我们要求

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}', t') = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t_0) = -g(\tau_0, \tau(x, t_0))\hat{q}(\boldsymbol{x}, t_0).$$

由于这两点处在同一根"光线"上，所以

$$\tau' = \tau, \qquad \hat{R}' = \hat{R}, \qquad \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta},$$

$$\hat{q}(\boldsymbol{x}', t') = \hat{q}(\boldsymbol{x}, t_0),$$
$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}', t') = -g(\tau_0, \tau(\boldsymbol{x}', t'))\hat{q}(\boldsymbol{x}', t'). \tag{11}$$

到此,我们导出了 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}', t')$ 的表达式.

令 $\overline{A}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, 就得到所要的规范势.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_\mu &= \partial_\mu(-g\hat{q}) \times (-g\hat{q}) = \partial_\mu(g\hat{q}) \times (g\hat{q}) \\ &= [(gg^{-1}\partial_\mu g)\hat{q} + g\partial_\mu\hat{q}] \times (g\hat{q}) \\ &= g[\partial_\mu\hat{q} \times \hat{q} + (g^{-1}\partial_\mu g\hat{q}) \times \hat{q}].\end{aligned}$$

我们作一个规范变换,(由于 $g(\tau_0, \tau(\bar{x}'t'))$ 是 (x', t') 的函数),可以得到规范等价的势 $\boldsymbol{B}_\mu$

$$\boldsymbol{A}_\mu = g(\boldsymbol{B}_\mu - [\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\partial}_\mu\boldsymbol{g}]),$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_\mu &= g^{-1}A_\mu + [\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\partial}_\mu\boldsymbol{g}] \\ &= \partial_\mu\hat{q} \times \hat{q} + \hat{q}\{[\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\partial}_\mu\boldsymbol{g}] \cdot \hat{q}\},\end{aligned}$$

由 (10) 式
$$= \partial_\mu\hat{q} \times \hat{q} + \hat{q}\{-\partial_\mu\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}f \cdot \hat{q}\},$$

其中

$$\partial_\mu\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \cdot \frac{\partial\tau}{\partial x_\mu}.$$

下面我们把它约化为阿贝耳势. 令

$$b_\mu = -\partial_\mu\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{q}f, \qquad \boldsymbol{B}_\mu = \partial_\mu\hat{q} \times \hat{q} + \hat{q}b_\mu.$$

设在某个坐标架下,

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{e}_1 \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_3\cos\theta,$$

因而 θ, φ 就都是时空点的函数.

令
$$G = e^{\varphi J_3}e^{-\theta J_2}e^{-\varphi J_3},$$

则
$$G\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{e}_3,$$

其中 J_i 为转动矩阵生成元,

$$(J_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}, \qquad 故 \qquad J_i\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{\phi}.$$

我们推得

$$\begin{aligned}dGG^{-1} = {}& J_1[d\theta\sin\varphi + d\varphi\sin\theta\cos\varphi] + J_2[-d\theta\cos\varphi + d\varphi\sin\theta\sin\varphi] \\ &+ J_3(1-\cos\theta)d\varphi,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{dGG^{-1}}] = {}& \boldsymbol{e}_1(d\theta\sin\varphi + d\varphi\sin\theta\cos\varphi) + \boldsymbol{e}_2(-d\theta\cos\varphi + d\varphi\sin\theta\sin\varphi) \\ &+ \boldsymbol{e}_3(1-\cos\theta)d\varphi.\end{aligned}$$

经规范变换得到与 $\boldsymbol{B}_\mu$ 等价的规范势 $\boldsymbol{C}_\mu$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_\mu = \boldsymbol{B}'_\mu &= -\boldsymbol{e}_3\{[\boldsymbol{\partial}_\mu\boldsymbol{GG}^{-1}] \cdot \boldsymbol{e}_3\} + \boldsymbol{e}_3 b_\mu \\ &= \boldsymbol{e}_3\left[(\cos\theta - 1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + b_\mu\right].\end{aligned}$$

若取

$$G' = e^{\pi J_x}Ge^{-\pi x} = e^{-\varphi J_3}e^{(\theta-\pi)J_2}e^{\varphi J_3},$$

就得到

$$\boldsymbol{C}'_\mu = -\boldsymbol{e}_3\left\{(\cos\theta + 1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + b_\mu\right\}.$$

考虑到在第一种情况下，$\boldsymbol{n}'' = Gg^{-1}\boldsymbol{n} = G(-\hat{\boldsymbol{q}}) = -\boldsymbol{e}_3$. 在第二种情况下，$\boldsymbol{n}'' = G'g^{-1}\boldsymbol{n} = G'(-\hat{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{e}_3$. 由于要使得在 t_0 时刻源点附近很小的邻域内诱导势 $[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}(\tau = t_0), t_0) = -\hat{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{A}_\mu = \partial_\mu\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}]$

经约化之后得到的 $U(1)$ 势和推导出来的场强与磁单极子的场强一致，必须令 $U(1)$ 势 C_μ

$$C_\mu = \boldsymbol{n}''\cdot\boldsymbol{C}_\mu,$$

其中 $\boldsymbol{C}_\mu$ 为约化之后的 $SU(2)$ 势，$\boldsymbol{n}''$ 为规范变换之后的 $\boldsymbol{n}$ 矢量.

这样就得到

$$C_\mu = \begin{cases}(1-\cos\theta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \partial_\mu\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}f\cdot\hat{\boldsymbol{q}}; \\ (-1-\cos\theta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \partial_\mu\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}f\cdot\hat{\boldsymbol{q}}.\end{cases}$$

为了看出奇异性，利用 $\hat{q}_2/\hat{q}_1 = \mathrm{tg}\,\varphi$，$\hat{q}_3 = \cos\theta$（$\hat{q}_i$ 是 $\hat{q}$ 的第 i 个分量），

$$C_\mu = \begin{cases}\dfrac{\partial_\mu\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_3}{\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_3+1} + \partial_\mu\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}f & \text{仅当 } \hat{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{e}_3 \text{ 时奇异;} \\ \dfrac{\partial_\mu\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_3}{\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_3-1} + \partial_\mu\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}f & \text{仅当 } \hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{e}_3 \text{ 时奇异.}\end{cases}$$

这样，我们就得到分区表示的正磁单极子的 $U(1)$ 规范势. 当然，用它可以得到多个磁单极子以及还有电荷及自由电磁场的 $U(1)$ 规范势.

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817.
[2] Michio Kaku, *Phys. Rev. D*, **13** (1976), 2881; **14** (1976), 2023.
[3] 侯伯宇，兰州大学学报，(2)(1977)，37.
[4] 王永康、张高有、侯伯宇，高能物理与核物理，**2**(1978)，368

THE GAUGE POTENTIAL OF MOVING MONOPOLE

SHI KANG-JIE
(*Northwest University, Xian*)

ABSTRACT

If $SU(2)$ potential $\boldsymbol{A}_\mu$, with $D_\mu\boldsymbol{\phi} \equiv \partial_\mu\boldsymbol{\phi} + A_\mu \times \boldsymbol{\phi}$, can be expressed by $\boldsymbol{n}(x_\mu)$ with $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \equiv 1$ as

$$\boldsymbol{A}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n},$$

we call it "deduced potential". Because $D_\mu\boldsymbol{n} = 0$, it can be transformed into Abellian. Then, we find equivalent $U(1)$ potential and strength of field $F_{\mu\nu} = \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{n}$. This kind of $F_{\mu\nu}$ (namely E_i and B_i) has the same specific properties and relations between $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{n}$. Using this properties and relations, from the known strength of electric and magnetic field of monopole, we can construct a $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x_\mu)$ with $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$. Then obtain the potential $\boldsymbol{A}_\mu$ and its equivalent $U(1)$ potential C_μ.

In this way, we find a definite expression of potential for a moving monopole just like the Lienard-Wiechert potential for a moving charged particle. When monopole is at rest, the potential reduces to the famous Wu-Yang potential.