

布鲁塞尔子的球对称结构

张 纪 岳 郭 治 安

(西北大学物理系) (大连铁道学院)

1982年11月8日收到

提 要

本文利用分支点理论详细地计算了布鲁塞尔子的球对称解。结果表明,它不仅具有空间和时间耗散结构,而且其空间耗散结构还具有新的特点,即在球的中心有一个高浓度区。这对于了解生物、生物化学等现象中的核型结构可能有所帮助。

一、引 言

布鲁塞尔子,即三分子反应扩散方程的求解问题,是耗散结构理论的基本问题之一。1976年,Anchmuty 和 Nicolis 曾详细地计算了它的一维时间周期解^[1],接着 Nicolis 和 Prigogine 又在一维的时-空结构上讨论了这类现象^[2]。但具有实际意义的三维问题至今没有得到解决。本文利用分支点理论详细地计算了它的三维球对称时-空结构,这对于理解耗散结构的物理图象可能有所帮助。

我们所采用的模型是由 Lefever 和 Prigogine 于 1968 年提出来的^[3],它由一对非线性反应扩散方程组成:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= A - (B + 1)X + X^2Y + D_1 \nabla^2 X, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2Y + D_2 \nabla^2 Y,\end{aligned}\quad (1)$$

式中 A, B 是常数, X, Y 是变数, D_1 和 D_2 是扩散系数。方程组 (1) 满足固定边界条件,即在球面上:

$$X = A, \quad Y = B/A. \quad (2)$$

适合这一边界条件的均匀定态解为

$$X_0 = A, \quad Y_0 = B/A. \quad (3)$$

此即热力学分支解。

二、定态球对称解

1. 定态解的构造

首先,令

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial t} = 0,$$

则由(1)式得定态方程

$$\begin{aligned} A - (B + 1)X + X^2Y + D_1\nabla^2X &= 0, \\ BX - X^2Y + D_2\nabla^2Y &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

为了对方程组(4)进行线性稳定性分析,令

$$x = X - A, \quad y = Y - B/A. \quad (5)$$

于是,方程组(4)就化为

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x, y) \\ -h(x, y) \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

而边界条件(5)式则变为

$$x = y = 0, \quad (7)$$

式中的算子 L 为

$$L = \begin{pmatrix} B - 1 + D_1\nabla^2 & A^2 \\ -B & -A^2 + D_2\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

非线性部分 $h(x, y)$ 为

$$h(x, y) = \frac{B}{A} x^2 + x^2y + 2Axy. \quad (9)$$

求解定态方程组(6)的问题,是先求其线性化方程组的解;然后,再求它的近似解.其线性化方程组为

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

对于 $(0, a)$ 的区间,可令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (11)$$

将(11)式代入方程组(10)中,得

$$\begin{aligned} (B - 1 + D_1\nabla^2)x + A^2y &= 0, \\ -Bx - (A^2 - D_2\nabla^2)y &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

联立方程具有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} B - \left(1 + \frac{\pi^2}{a^2} D_1\right) & A^2 \\ -B & -\left(A^2 + \frac{\pi^2}{a^2} D_2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

由此即得分支点 B_c 为

$$B_c = 1 + \frac{A^2 a^2}{D_2 \pi^2} + D_1 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{D_1}{D_2} A^2. \quad (13)$$

为了求方程组在分支点附近的解,引入算子 L_c 为

$$L_c = \begin{pmatrix} B_c - 1 + D_1\nabla^2 & A^2 \\ -B_c & -A^2 + D_2\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

则有

$$L_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H(x, y) \\ H(x, y) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

式中

$$H(x, y) = (B - B_c)x + h(x, y).$$

在 B_c 附近用小参数 ε 将 x, y 与 B 展开

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \cdots, \\ B = B_c + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \cdots. \quad (16)$$

将展开式 (16) 代入 (15) 式, 并令等式两边 ε 的同次幂的系数相等, 使得方程组

$$L_c \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k \\ a_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad (17)$$

其中 a_k 为已知函数, 且其前几个分别为

$$a_1 = 0, \quad (18)$$

$$a_2 = \beta_1 x_1 + \frac{B_c}{A} x_1^2 + 2A x_1 y_1, \quad (19)$$

$$a_3 = \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 + 2 \frac{B_c}{A} x_1 x_2 + \frac{\beta_1}{A} x_1^2 + 2A(x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_1^2 y_1. \quad (20)$$

2. 定态解的计算

在求解方程 (17) 时, 需要求解方程

$$L_c^+ \begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} = 0, \quad (21)$$

式中 L_c^+ 是算子 L_c 的伴随算子. 方程 (21) 的解的形式为

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (22)$$

Fredholm 二者择一定理要求 $\begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -a_k \\ a_k \end{pmatrix}$ 正交, 即

$$\int_0^a (x^{+*} y^{+*}) \begin{pmatrix} -a_k \\ a_k \end{pmatrix} r^2 dr = 0. \quad (23)$$

由此即可求出 (23) 式中的各级项. 将方程

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a} \quad (24)$$

代入下式中

$$L_c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0, \quad (25)$$

得

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{-B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

当令 $c_1 = 1$ 时, 有

$$c_2 = \frac{-B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (26)$$

因而

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (27)$$

经过同样的步骤, 并令 $d_1 = 1$ 时, 有

$$d_2 = \frac{A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad (28)$$

因而

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (29)$$

将 x_1, y_1 代入 (19) 式, 此时有

$$a_2(r) = \beta_1 \sin c \frac{\pi r}{a} + \frac{B_c}{A} \left(1 - \frac{2A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} \right) \sin c^2 \frac{\pi r}{a}. \quad (30)$$

将 (29) 与 (30) 两式代入 (23) 式, 即可求得

$$\beta_1 = \frac{2\pi^2 B_c}{a^3 A} \left(\frac{2A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} - 1 \right) I_1. \quad (31)$$

现在, 我们进一步求解方程

$$L_c \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

令

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} \sin c \frac{k\pi r}{a}, \quad (33)$$

$$\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -b_k \\ b_k \end{pmatrix} \sin c \frac{k\pi r}{a}. \quad (34)$$

将 (33) 与 (34) 两式代入 (32) 式中, 并令等式两边 k 相同的对应项相等, 即得

$$\begin{aligned} (B_c - 1 - D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}) p_k + A^2 q_k &= -b_k, \\ -B_c p_k - (A^2 + D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}) q_k &= b_k. \end{aligned} \quad (35)$$

解之得

$$p_k = \frac{D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}}{A^2 B_c + \left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2} - B_c\right) \left(A^2 + D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)} b_k,$$

$$q_k = \frac{-\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)}{A^2 B_c + \left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2} - B_c\right) \left(A^2 + D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)} b_k. \quad (36)$$

将 (30) 式代入下式:

$$b_k \int_0^a \sin c^2 \frac{k\pi r}{a} r^2 dr = \int_0^a a_2 \sin c \frac{k\pi r}{a} r^2 dr, \quad (37)$$

即可求得

$$b_k = \frac{2\pi^3 k^2 B_c}{a^3 A} \left(1 - \frac{2A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}}\right) I_k, \quad (38)$$

式中

$$I_k = \frac{a^3}{4k\pi^3} [2S_i(k\pi) - S_i((k+2)\pi) - S_i((k-2)\pi)]. \quad (39)$$

将

$$a_3 = \beta_1 \sum p_k \sin c \frac{k\pi r}{a} + \beta_2 \sin c \frac{\pi r}{a} + \frac{2B_c}{A} \sin c \frac{\pi r}{a} \sum p_k \sin c \frac{k\pi r}{a}$$

$$+ \frac{\beta_1}{A} \sin c^2 \frac{\pi r}{a} + 2A \left(\sin c \frac{\pi r}{a} \sum q_k \sin c \frac{k\pi r}{a} - \frac{B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} \sin c \frac{\pi r}{a} \right.$$

$$\left. \cdot \sum p_k \sin c \frac{k\pi r}{a} \right) - \frac{B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} \sin c^3 \frac{\pi r}{a} \quad (40)$$

代入 (23) 式, 即得

$$\beta_2 = \frac{2\pi^2}{a^3} \left[\frac{4B_c}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}} I_2 - \frac{2B_c}{A} \left(1 - \frac{A^2}{A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2}}\right) \sum p_k I_k \right.$$

$$\left. - 2A \sum q_k I_k - \frac{\beta_1}{A} I_1 \right]. \quad (41)$$

将 (27) 式以及 (33) 式代入 (16) 式, 就得到准至二级近似下的解

$$\begin{pmatrix} x(r) \\ y(r) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -B_c \\ A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2} \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a} + \varepsilon^2 \sum \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} \sin c \frac{k\pi r}{a}, \quad (42)$$

式中的 ε 则由下式决定:

$$\varepsilon = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2(B - B_c)}}{2\beta_2}. \quad (43)$$

由(42)式的最终显式可以看出,布鲁塞尔子的球对称定态解,呈现出空间有序结构。它与一维定态解^[2]的明显区别在于,在球的中心出现一个高浓度区,如图1所示。图1是在参数

$$\begin{aligned} A &= 2, & a &= 1, \\ D_1 &= 0.016, & D_2 &= 0.08, \\ B_c &= 7.024, & B &= 1.12 B_c, \\ \varepsilon &= 0.5243 \end{aligned}$$

的情况下,经过数值计算画出的。对 y 也有相似的图形。

由图1可见,在球的中心的确出现了一个高浓度区,而这更接近于实际情况。

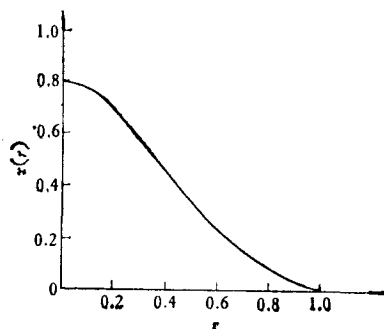


图 1

三、含时球对称解

1. 含时解的构造

求方程(1)的含时解,是先求它的线性化方程

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (44)$$

的本征解。在临界值

$$\tilde{B}_m = 1 + A^2 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (D_1 + D_2) \quad (45)$$

时,方程(44)具有纯虚数本征值 $\pm i\mu_m$ 。且

$$\mu_m = A \left[1 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (D_1 - D_2) - \frac{m^4 \pi^4}{a^4 A^2} D_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (46)$$

为了使 μ_m 为实数,就必须满足下列条件:

$$D_2 - D_1 < \frac{a^2}{m^2 \pi^2}, \quad (47)$$

$$D_2 < \frac{a^2}{m^2 \pi^2} A \left[1 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} (D_1 - D_2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

原方程(1)可以进一步化为下式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x, y) \\ -h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

式中算子

$$L_m = \begin{pmatrix} \tilde{B}_m - 1 + D_1 \nabla^2 & A^2 \\ -\tilde{B}_m & -A + D_2 \nabla^2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

令其具有周期为 $2\pi/\Omega$ 的周期解,而频率 Ω 与 B 有关。再令

$$\tau = \Omega t, \quad (51)$$

则方程(49)可化为

$$Q \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x, y) \\ -h(x, y) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

为找它在 $B = \tilde{B}_m$ 附近小振幅的周期解,我们仍用小参数 ε 将 x, y, Q 和 B 展开

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \cdots, \\ Q &= \mu_m + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots, \\ B &= \tilde{B}_m + \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \cdots. \end{aligned} \quad (53)$$

将 (53) 式代入 (52) 式,并令等式两边 ε 的同次幂的系数相等,即得

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - L_m \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = - \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ y_{n-k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n \\ -a_n \end{pmatrix}. \quad (54)$$

当 $n=1$ 时,方程 (54) 就变为

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

若 (u_m, v_m) 是算子 L_m 的本征值为 $\pm i\mu_m$ 的本征矢,不难看出方程 (55) 具有复数解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} e^{i\tau}. \quad (56)$$

这里, k 是一个任意的复数常数.

当 $n > 1$ 时,方程 (54) 一般是对 x_n 与 y_n 的非齐次线性方程,相应的齐次方程具有非平庸解. 只要满足相容性条件,方程 (54) 就只具有 2π 的周期解.

Fredholm 二者择一定理要求方程 (54) 的右边与方程

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} - L_m^+ \begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

的非平庸解正交. 式中 L_m^+ 是 L_m 的伴随算子,且 L_m^+ 与 L_m 满足相同的边界条件. 方程 (57) 的解由下式给出:

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_m^+ \\ v_m^+ \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad (58)$$

而 (u_m^+, v_m^+) 满足

$$L_m^+ \begin{pmatrix} u_m^+ \\ v_m^+ \end{pmatrix} = -i\mu_m \begin{pmatrix} u_m^+ \\ v_m^+ \end{pmatrix}. \quad (59)$$

此时, Fredholm 二者择一定理变为

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^a a_n(r, \tau) [x^{*+}(r, \tau) - y^{*+}(r, \tau)] d\tau r^2 dr \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{\partial x_{n-k}}{\partial \tau} x^{*+} + \frac{\partial y_{n-k}}{\partial \tau} y^{*+} \right] d\tau r^2 dr. \end{aligned} \quad (60)$$

对于每一个 n 值,上式提供两个实数方程,用来决定 ω_{n-1} 与 γ_{n-1} .

2. 时间周期解的计算

在本文所讨论的三维球对称的情况下, 我们只限于计算与 $\tilde{B}_1$ 相应的时间周期解. 与 $\tilde{B}_1$ 相应的本征值为 $\pm i\mu_1$,

$$\mu_1 = A \left[1 + \frac{\pi^2}{a^2}(D_1 - D_2) - \frac{\pi^4 D_2^2}{a^4 A^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (61)$$

而与之相应的本征矢则为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (62)$$

当令 $c_1^+ = c_1^- = 1$ 时, 求得

$$c_2^+ = \tilde{B}_1 \rho e^{i\theta}, \quad c_2^- = \tilde{B}_1 \rho e^{-i\theta}, \quad (63)$$

式中

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{\left(A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + \mu_1^2}, \\ \sin \theta &= \frac{\mu_1}{\left[\left(A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + \mu_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \\ \cos \theta &= \frac{-\left(A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)}{\left[\left(A^2 + D_2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + \mu_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (64)$$

这样一来, 即得方程 (55) 的实数解为

$$\begin{pmatrix} x_1(r, \tau) \\ y_1(r, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \tilde{B}_1 \rho \cos(\tau + \theta) \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (65)$$

同理, 求得方程 (57) 的复数解为

$$\begin{pmatrix} x^+(r, \tau) \\ y^+(r, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -A^2 \rho e^{-i\theta} \end{pmatrix} e^{i\tau} \sin c \frac{\pi r}{a}. \quad (66)$$

将

$$\begin{aligned} a_2(r, \tau) &= r_1 \cos \tau \sin c \frac{\pi r}{a} + \left[\frac{\tilde{B}_1}{A} \cos^2 \tau + 2A \tilde{B}_1 \rho \cos \tau \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(\tau + \theta) \right] \sin c^2 \frac{\pi r}{a} \end{aligned} \quad (67)$$

代入相容性条件 (60) 式, 即得

$$r_1(1 + A^2 \rho e^{i\theta}) - i\omega_1(1 - A^2 \tilde{B}_1 \rho^2 e^{2i\theta}) = 0, \quad (68)$$

解之即得

$$r_1 = 0, \quad \omega_1 = 0. \quad (69)$$

下面, 进一步求解方程:

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

此时有

$$a_2(r, \tau) = \left[\frac{\tilde{B}_1}{A} \cos^2 \tau + 2A\tilde{B}_1\rho \cos \tau \cos(\tau + \theta) \right] \sin c^2 \frac{\pi r}{a}. \quad (71)$$

用 r 与 τ 将 x_2 与 y_2 作广义傅里叶展开, 就得到

$$\begin{pmatrix} x_2(r, \tau) \\ y_2(r, \tau) \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} a_k + \tilde{a}_k \cos(2\tau + \phi_k) \\ b_k + \tilde{b}_k \cos(2\tau + \varphi_k) \end{pmatrix} \sin c \frac{k\pi r}{a}, \quad (72)$$

式中

$$a_k = \frac{D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}}{\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2} - \tilde{B}_1\right) \left(A^2 + D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right) + A^2 \tilde{B}_1} \alpha'_k, \quad (73)$$

$$b_k = \frac{-\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)}{\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2} - \tilde{B}_1\right) \left(A^2 + D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right) + A^2 \tilde{B}_1} \alpha'_k, \quad (74)$$

$$\tilde{a}_k = \left[\frac{\left(D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2}{\alpha_k''^2 + \beta_k''^2} \right]^{\frac{1}{2}} \beta'_k, \quad (75)$$

$$\tilde{b}_k = \left[\frac{\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2}{\alpha_k''^2 + \beta_k''^2} \right]^{\frac{1}{2}} \beta'_k, \quad (76)$$

$$\sin \phi_k = \frac{2\alpha_k''\mu_1 - \beta_k''D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}}{\left\{(\alpha_k''^2 + \beta_k''^2) \left[\left(D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (77)$$

$$\cos \phi_k = \frac{\alpha_k''D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2} + 2\beta_k''\mu_1}{\left\{(\alpha_k''^2 + \beta_k''^2) \left[\left(D_2 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (78)$$

$$\sin \varphi_k = \frac{2\alpha_k''\mu_1 - \beta_k''\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)}{\left\{(\alpha_k''^2 + \beta_k''^2) \left[\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (79)$$

$$\cos \varphi_k = \frac{-\left[\alpha_k''\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right) + 2\beta_k''\mu_1\right]}{\left\{(\alpha_k''^2 + \beta_k''^2) \left[\left(1 + D_1 \frac{k^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 4\mu_1^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (80)$$

而在从 (73) 式到 (80) 式中出现的系数 α'_k , β'_k , α_k'' 以及 β_k'' 则分别为

$$\alpha'_k = \tilde{B}_1 \frac{4k^2 \pi^2}{a^3} \left(\frac{1}{2A} + A\rho \cos \theta \right) I_k, \quad (81)$$

$$\beta'_k = \tilde{B}_1 \frac{2k^2\pi^2}{a^3} \left(\frac{1}{2A} + A\rho \cos\theta \right) I_k, \quad (82)$$

$$\alpha''_k = \left(1 + D_1 \frac{k^2\pi^2}{a^2} \right) \left(A^2 + D_2 \frac{k^2\pi^2}{a^2} \right) - \left(\tilde{B}_1 D_2 \frac{k^2\pi^2}{a^2} + 4\mu_1^2 \right), \quad (83)$$

$$\beta''_k = 2\mu_1 \left(1 + D_1 \frac{k^2\pi^2}{a^2} + A^2 + D_2 \frac{k^2\pi^2}{a^2} - \tilde{B}_1 \right). \quad (84)$$

下面,进一步求 ω_2 与 r_2 的具体表达式. 将

$$\begin{aligned} a_3(r, \tau) = & r_2 \cos \tau \sin c \frac{\pi r}{a} + \tilde{B}_1 \rho \cos^2 \tau \cos(\tau + \theta) \sin c^3 \frac{\pi r}{a} \\ & + 2A\tilde{B}_1 \left(\frac{1}{A^2} \cos \tau + \rho \cos(\tau + \theta) \right) \sin c \frac{\pi r}{a} \sum [a_k + \tilde{a}_k \cos(2\tau + \phi_k)] \\ & \cdot \sin c \frac{k\pi r}{a} + 2A \cos \tau \sin c \frac{\pi r}{a} \sum [b_k + \tilde{b}_k \cos(2\tau + \varphi_k)] \sin c \frac{k\pi r}{a} \end{aligned} \quad (85)$$

代入相容性条件,即可求得

$$r_2(1 + A^2 \rho e^{i\theta}) - i\omega_2(1 - A^2 \tilde{B}_1 \rho^2 e^{2i\theta}) = Z_1 + iZ_2. \quad (86)$$

令上式两边的实部与虚部分别相等,即可求得

$$r_2 = \frac{Z_1(1 - \tilde{B}_1 A^2 \rho^2) + 2\tilde{B}_1 A^2 \rho^2 \sin \theta (Z_1 \sin \theta - Z_2 \cos \theta)}{(1 + A^2 \rho \cos \theta)(1 - \tilde{B}_1 A^2 \rho^2) + 2\tilde{B}_1 A^2 \rho^2 \sin^2 \theta}, \quad (87)$$

$$\omega_2 = \frac{A^2 \rho (Z_1 \sin \theta - Z_2 \cos \theta) - Z_2}{(1 + A^2 \rho \cos \theta)(1 - \tilde{B}_1 A^2 \rho^2) + 2\tilde{B}_1 A^2 \rho^2 \sin^2 \theta}, \quad (88)$$

式中

$$\begin{aligned} Z_1 = & -\frac{2\pi}{a^3} (1 + A^2 \rho \cos \theta) \left[\frac{3}{4} \tilde{B}_1 \rho I_1 \cos \theta + \frac{2}{A} \tilde{B}_1 \sum I_k \left(a_k + \frac{1}{2} \tilde{a}_k \cos \phi_k \right) \right. \\ & + A\tilde{B}_1 \rho \sum I_k \tilde{a}_k \cos(\theta - \phi_k) + 2A \sum I_k \left(b_k + \frac{1}{2} \tilde{b}_k \cos \varphi_k \right) \Big] \\ & + \frac{2\pi}{a^3} A^2 \rho \sin \theta \left[\frac{1}{4} \tilde{B}_1 \rho I_1 \sin \theta + \frac{\tilde{B}_1}{A} \sum I_k \tilde{a}_k \sin \phi_k \right. \\ & \left. - A\tilde{B}_1 \rho \sum I_k \tilde{a}_k \sin(\theta - \phi_k) + A \sum I_k \tilde{b}_k \sin \varphi_k \right], \quad (89) \\ Z_2 = & -\frac{2\pi}{a^3} (1 + A^2 \rho \cos \theta) \left[\frac{1}{4} \tilde{B}_1 \rho I_1 \sin \theta + \frac{\tilde{B}_1}{A} \sum I_k \tilde{a}_k \sin \phi_k - A\tilde{B}_1 \rho \right. \\ & \cdot \sum I_k \tilde{a}_k \sin(\theta - \phi_k) + A \sum I_k \tilde{b}_k \sin \varphi_k \Big] - \frac{2\pi}{a^3} A^2 \rho \sin \theta \left[\frac{3}{4} \tilde{B}_1 \rho I_1 \cos \theta \right. \\ & + \frac{2}{A} \tilde{B}_1 \sum I_k \left(a_k + \frac{1}{2} \tilde{a}_k \cos \phi_k \right) + A\tilde{B}_1 \rho \sum I_k \tilde{a}_k \cos(\theta - \phi_k) \\ & \left. + 2A \sum I_k \left(b_k + \frac{1}{2} \tilde{b}_k \cos \varphi_k \right) \right]. \quad (90) \end{aligned}$$

将(65)式与(72)式代入(53)式中,就得到准至二级近似下的时间周期解为

$$\begin{pmatrix} x(r, t) \\ y(r, t) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos Q t \\ \tilde{B}_1 \rho \cos(Q t + \theta) \end{pmatrix} \sin c \frac{\pi r}{a}$$

$$+ \varepsilon^2 \sum \left(\frac{a_k + \tilde{a}_k \cos(2\Omega t + \phi_k)}{b_k + \tilde{b}_k \cos(2\Omega t + \varphi_k)} \right) \sin c \frac{k\pi r}{a}, \quad (91)$$

式中

$$\varepsilon = \left(\frac{B - \tilde{B}_1}{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (92)$$

$$\Omega = \mu_1 + \varepsilon^2 \omega_2. \quad (93)$$

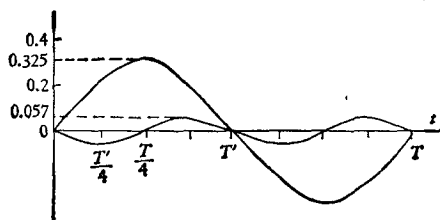


图 2

$T = 8.2$ 秒; $T' = 4.1$ 秒

由 (91) 式的最终显式不难看出, 布鲁塞尔子的球对称含时解, 呈现出时间周期结构, 如图 2 所示. 图 2 是在参数 $A = 2$, $a = 1$, $D_1 = 0.016$, $D_2 = 0.08$, $\tilde{B}_1 = 5.9475$, $B = 1.02\tilde{B}_1$,

$\varepsilon = 0.3254$ 的情况下, 经过数值计算画出的.

由图 2 可见, 它是由周期为 T 与周期为 T' 的两种振荡的迭加. 其空间图形与图 1 相似.

四、结 语

从定态解与含时解的结果可见, 布鲁塞尔子, 即三分子反应扩散方程, 在球对称的固定边界条件下, 不仅具有空间耗散结构, 而且还具有时间耗散结构. 与一维情况相比^[2], 三维球对称解具有新的特点, 就是在球的中心处有一个高浓度区, 并且随着半径的增大, 空间浓度呈规则的分布和变化. 而且, 时间周期解在空间上是衰减的; 且从 (91) 式可明显地看出, 在时间结构上是由两个频率的振荡迭加而成的.

在三维球对称情况下所出现的这些新特征, 更接近于实际情况. 无疑, 这对耗散结构理论的实际应用将会打开新的局面.

参 考 文 献

- [1] J. F. G. Auchmuty, G. Nicolis, *Bull. Math. Biol.*, **37**(1976), 325.
- [2] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems*, (1977).
- [3] R. Lefever, I. Prigogine, *J. Chem. Phys.*, **48**(1968), 1695.

SPHERICALLY SYMMETRIC STRUCTURES OF THE BRUSSELTOR

ZHANG JI-YUE

(Department of Physics, Northwest University, Xian)

GUO ZHI-AN

(Dalian Railway College, Dalian)

ABSTRACT

In this paper, spherically symmetric structures of the Brusselator are calculated in detail by using the bifurcation theory. The results show that the solutions have both temporal-spacial dissipative-structures and a high concentrative range in the centre of the sphere. These results will be greatly helpful in investigation of nuclear-type structures in biological and biochemical phenomena.