

研究简报

集中质量音叉式引力波天线的 三自由度模型

阎 永 廉 秦 荣 先

(中国科学院高能物理研究所)

1983 年 1 月 8 日收到

提 要

本文将文献 [1] 提出的集中质量音叉式引力波天线的二自由度模型改进为三自由度模型，并给出了模型天线的实验结果。

在文献 [1] 中我们提出并计算了一种接收 Vela 星引力辐射的集中质量音叉式机械谐振型低频天线。最近，我们对此天线的本征频率和主振型进行了更细致的分析和计算，并作出了模型天线。实验结果与分析计算较好地符合 [2]。

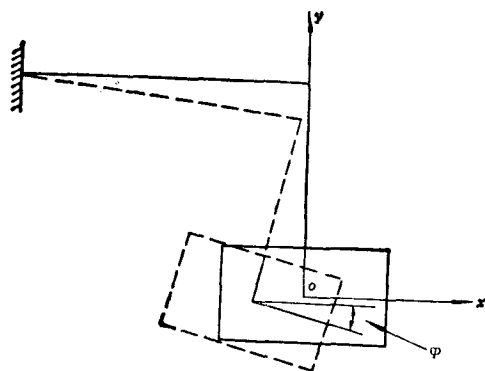


图 1

在文献 [1] 中，我们将集中质量当作质点处理，将天线简化成一个二自由度的系统。最近我们考虑了集中质量的转动惯量，将其当作刚体处理，因此天线被简化成一个三自由度系统，如图 1 所示。选取平衡位置的圆柱体质心 O 为坐标原点，系统广义坐标为质心坐标 x, y 和圆柱体绕质心的转角 φ 。对于这种三自由度模型，系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} K_x x^2 - \frac{1}{2} K_y y^2 - \frac{1}{2} K_\varphi \varphi^2 - K_{xy} x \cdot y - K_{x\varphi} x \cdot \varphi - K_{y\varphi} y \cdot \varphi, \quad (1)$$

式中 R 为圆柱体对通过质心垂直于运动平面的转动轴的迴转半径， $K_x, K_y, K_\varphi, K_{x\varphi}, K_{y\varphi}, K_{xy}$ 为曲梁的等效弹性系数。由此可得系统的自由振动微分方程为

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_x & K_{xy} & K_{x\varphi} \\ K_{xy} & K_y & K_{y\varphi} \\ K_{x\varphi} & K_{y\varphi} & K_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix} K_x - \lambda & K_{xy} & K_{x\varphi} \\ K_{xy} & K_y - \lambda & K_{y\varphi} \\ K_{x\varphi} & K_{y\varphi} & K_\varphi - R^2\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

展开得

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= -(R^2K_x + R^2K_y + K_\varphi)/R^2, \\ b &= [K_xK_\varphi + K_yK_\varphi - K_{x\varphi}^2 - K_{y\varphi}^2 + R^2(K_xK_y - K_{xy}^2)]/R^2, \\ c &= [K_xK_{y\varphi}^2 + K_yK_{x\varphi}^2 + K_\varphi K_{xy}^2 - K_xK_yK_\varphi - 2K_{xy}K_{x\varphi}K_{y\varphi}]/R^2. \end{aligned}$$

解得本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 其中 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. 进一步可得振型矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$a_{1i} = \alpha_i a_{3i}, \quad a_{2i} = \beta_i a_{3i}, \quad a_{3i} = (\alpha_i^2 + \beta_i^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

而

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{K_{xy}K_{y\varphi} - K_{x\varphi}(K_y - \lambda_i)}{(K_x - \lambda_i)(K_y - \lambda_i) - K_{xy}^2}, \\ \beta_i &= \frac{K_{xy}K_{x\varphi} - K_{y\varphi}(K_x - \lambda_i)}{(K_x - \lambda_i)(K_y - \lambda_i) - K_{xy}^2}, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

利用振型矩阵 A 可得系统的主坐标 X, Y 和 Φ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Phi \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Phi \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

最后可以得到主坐标的自由振动方程为

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

由此可解得各主振型的本征频率分别为

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9)$$

改进的三自由度模型比二自由度模型使得本征频率的计算更为准确; 至于天线对引力波的响应, 在很宽的结构参数范围内, 两种模型区别不大.

模型天线重约三公斤, 横梁由超硬铝合金 LCY-4 加工而成, 两个小圆柱的材料是

高比重钨合金。计算所得的室温和低温 (4.2K) 下的第一主振频率分别为 21.8Hz 和 22.9Hz, 实测的结果为 21.4Hz 和 22.6Hz, 误差小于 2%。

参 考 文 献

- [1] 徐步新、秦荣先, 物理学报, **31**(1982), 1097.
- [2] Feng Songling, Liu Zaihai, Qin Rongxian, Song Yuxian, Yan Yonglian, Primary Research On Tuning Fork Antenna for low Frequency Gravitational Radiation, 将发表于 Proceedings of the 3th Marcel Grossmann Meeting on the Recent Developments of General Relativity.

THE THREE-DEGREE OF FREEDOM MODEL OF THE TUNING FORK ANTENNA WITH COLLECTIVE MASS

YAN YONG-LIAN QIN RONG-XIAN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we improve the model of the tuning fork antenna with collective mass, by developing a two-degree of freedom model to a three-degree of freedom one. Finally, the experimental results of a prototype antenna are given.