

反散射变换和正规 Riemann-Hilbert 问题

王 世 坤

(中国科学院应用数学研究所)

郭 汉 英 吴 可

(中国科学院理论物理研究所)

1983 年 1 月 18 日收到

提 要

本文指出,非线性演化方程 Lax 表示的反散射变换可以化为关于亚纯函数的正规 Riemann-Hilbert 问题,并导出了相应的积分方程,后者在实质上与 Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程等价. 本文进而导出 Lax 表示的不同基本解组之间的 Darboux-Bäcklund 变换所满足的正规 Riemann-Hilbert 问题. 与反散射变换直接联系的正规 Riemann-Hilbert 问题是其特殊形式.

1. 最近,我们从非线性(演化)系统的延拓结构^[1,2]的不变性出发,通过 Lax 对^[3],将 Darboux-Bäcklund 变换化为正规的齐性 Riemann-Hilbert (以下简称 R-H) 问题及相应的积分方程的求解^[4];并以主手征模型为例指出^[5],无穷小的正规 R-H 变换就是导出相应的 Kac-Moody 代数^[6,7]的变换.

另一方面, Zakharov 等人指出^[8,9],对于某些非线性演化系统的 Lax 表示,可以通过求解特定的正规的或非正规的 Riemann 问题,得到散射反演方法的结果. 正规与否,分别对应于纯非孤子部分与纯孤子部分.

显然,基于延拓结构的不变性,进一步探讨散射反演变换与 R-H 问题,及其与上述 Darboux-Bäcklund 变换之间的联系,无疑是有意义的.

本文将指出,无论是否包含孤子, Lax 表示的散射反演变换可以一般地化为正规的 R-H 问题,只是当含有孤子时,是关于亚纯函数的 R-H 问题. 我们并导出了相应的积分方程,在实质上,它与 Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程(以下简称 G-L-M 方程)等价. 本文并进而导出了由 Lax 表示的已知基本解组出发,求新的基本解组的 Darboux-Bäcklund 变换所满足的正规 R-H 问题,在形式上它与我们在文献 [3] 给出的正规 R-H 问题完全一致. 同时,又以与反散射变换直接联系的正规 R-H 问题为其特殊形式. 这样,我们就在延拓结构的不变性的基础上,通过正规 R-H 问题,将散射反演理论和 Darboux-Bäcklund 变换的理论在实质上统一了起来.

2. 本文将以非线性 Schrödinger 方程 (NLSE)^[10]

$$iu_t + u_{xx} + 2c|u|^2u = 0 \quad c > 0 \quad (1)$$

为例进行分析. 然而,本文的结果是带有一般性的,容易推广到其它非线性演化方程的散射反演变换上去.

对一给定的 1+1 维非线性演化方程 (NEE), 其 Lax 表示通常写为

$$L\phi = \lambda\phi, \quad (2)$$

$$i\phi_t = A\phi. \quad (3)$$

其可积条件给出原方程

$$iL_t + [L, A] = 0 \iff \text{NEE}. \quad (4)$$

通过适当的变换, 也可以将 Lax 表示及其可积条件化为

$$W_x = FW, \quad (2')$$

$$W_t = GW, \quad (3')$$

$$F_t - G_x + [F, G] = 0 \iff \text{NEE}. \quad (4')$$

散射反演理论^[1] 将非线性演化方程的初值 (Cauchy) 问题分解为一系列线性问题: 与初值 $u(x, 0)$ 相联系的本征值问题 (2) 或 (2') 式, 时间演化问题 (3) 或 (3') 式, 以及由 G-L-M 积分方程表述的反问题. 在实际求解过程中, 首先由初值 $u(x, 0)$ 相应的伪势, 即本征值问题的基本解组, 定义散射数据; 给出其时间演化; 然后求解 G-L-M 方程得到 t 时刻伪势的核函数, 进而由伪势与原方程解的关系给出 t 时刻的解 $u(x, t)$.

对于 NLSE (1) 式, 可以证明^[10] 本征值 λ 可以延拓为复数, 且若 ϕ 为本征方程的列解, 则

$$\bar{\phi} := \sigma\phi^* \quad \sigma_{12} = -\sigma_{21} = 1, \text{ 余为零}. \quad (5)$$

为同一本征方程对应于 λ^* 的基本解, 同时, 存在满足如下渐近条件的两组基本解阵:

$$\det(\varphi, \bar{\varphi}) = \det(x, \bar{x}) = -1, \quad (6)$$

$$(\varphi, \bar{\varphi}) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} & \\ & -e^{i\lambda x} \end{pmatrix} \quad \text{当 } x \rightarrow -\infty, \text{Im } \lambda = 0, \quad (7)$$

$$(x, \bar{x}) \rightarrow \begin{pmatrix} & e^{-i\lambda x} \\ e^{i\lambda x} & \end{pmatrix} \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty, \text{Im } \lambda = 0. \quad (8)$$

且 φ 与 x 可以解析开拓到 $C_+(\lambda) + \{\infty\}$, $\bar{\varphi}$ 与 $\bar{x}$ 相应地可以解析开拓到 $C_-(\lambda) + \{\infty\}$, 这里 C_+ 与 C_- 分别为复谱参数 λ 的上半平面与下半平面.

由于 $(\varphi, \bar{\varphi})$ 与 $(x, \bar{x})$ 已分别构成本征方程的基本解组, 因此, 必定存在不依赖于 x 的 2×2 矩阵 $T(\lambda)$,

$$T(\lambda) := \begin{pmatrix} b(\lambda) & -a^*(\lambda) \\ a(\lambda) & b^*(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad (9)$$

使得

$$(\varphi, \bar{\varphi}) = (x, \bar{x})T(\lambda), \quad \det T(\lambda) = 1, \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad (10)$$

其中 $a^{-1}(\lambda)$ 称为透射系数, 而

$$r(\lambda) := b(\lambda)a^{-1}(\lambda) \quad (11)$$

称为反射系数. 可以证明

$$a = \det(\varphi, x), \quad a^* = \det(\bar{\varphi}, \bar{x}), \quad (12)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = 1. \quad (13)$$

因此, $a(\lambda)$ 在 $C_+(\lambda) + \{\infty\}$ 解析, 但可具有有限个零点, 通常假定是简单零点. 在这

些零点处,基本解组退化,对于 NLSE(1) 式,可以证明

$$\varphi(x, \lambda_n) = c_n x(x, \lambda_n), \quad a(\lambda_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N < \infty, \quad (14)$$

其中 c_n 为任意常数,它们与

$$Q'(\lambda_n) = \left. \frac{da}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_n}, \quad (15)$$

以及透射系数和反射系数构成散射数据,这些零点恰恰对应于 NLS 方程的孤子.

3. 现在,我们将基本解组按解析性重新排列,将它们与确定的正规 R-H 问题的解相联系. 并给出 Riemann 数据和散射数据的关系.

定义

$$X_+(x, \lambda) = (a^{-1} \varphi(x, \lambda) e^{i\lambda x}, X(x, \lambda) e^{-i\lambda x}); \quad (16)$$

$$X_-(x, \lambda) = (\bar{x}(x, \lambda) e^{i\lambda x}, -a^*(\lambda)^{-1} \bar{\varphi}(x, \lambda) e^{-i\lambda x}). \quad (17)$$

显然,它们分别是 $C_+(\lambda) + \{\infty\}$ 或 $C_-(\lambda) + \{\infty\}$ 上的解析函数(如果 $a(\lambda)$ 没有简单零点),或亚纯函数(如果 $a(\lambda)$ 有简单零点). 且满足

$$\det X_+ = \det X_- = 1, \quad (18)$$

$$X_+(x, \lambda = \infty) = X_-(x, \lambda = \infty) = 1. \quad (19)$$

同时,在实轴 $R + \{\infty\}$ 的围道上它们满足如下的连接条件:

$$X_+(x, \lambda) = X_-(x, \lambda) U_0 u(\lambda) U_0^{-1} \quad \lambda \in R + \{\infty\}, \quad (20)$$

$$u(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & r^*(\lambda) \\ \frac{1}{a(\lambda)a^*(\lambda)} & r(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \det u(\lambda) = 1, \quad U_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda x} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

利用基本解组,以及散射数据的性质,不难证明这些公式.

应该指出,如果给定 $u(\lambda)$, 即给定散射数据,求满足条件 (18)–(20) 式的分别定义在 $C_+(\lambda) + \{\infty\}$ 与 $C_-(\lambda) + \{\infty\}$ 的解析函数(如果 $a(\lambda)$ 没有零点),或亚纯函数(如果 $a(\lambda)$ 有零点) X_+ 与 X_- , 这就是正规的 Riemann-Hilbert 问题^[12]. 而按照方程 (16) 与 (17), 已知 X_+ 与 X_- 就可以得到基本解组. 这样,我们就把散射反演变换和一类正规的 R-H 问题直接联系了起来.

假定亚纯函数 X_+ 与 X_- 分别按照方程 (16) 与 (17) 定义,极点全部来自 $a^{-1}(\lambda)$ 与 $a^{*-1}(\lambda)$. 按照 Cauchy 公式和留数理论,我们便可以导出与上述正规 R-H 问题相联系的积分方程.

考虑经实轴和在 $\{\infty\}$ 处的上半平面的周线的迴道 $R + L_+$, 以及经反向实轴和在 $\{\infty\}$ 处下半平面的周线的迴道 $-R + L_-$. 不难求出如下的迴道积分,

$$\oint \frac{X_+(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_+(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + i\pi I \quad \text{Im } \lambda < 0.$$

另一方面,由留数定理,此迴路积分等于

$$2\pi i \sum_{n=0}^N \left(\frac{C_n e^{i\lambda_n x}}{\lambda'_n - \lambda} x(\lambda'_n); 0 \right) \quad \text{Im } \lambda < 0,$$

其中

$$C_n = c_n a'^{-1}(\lambda'_n), \quad (22)$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_+(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i \sum_{n=0}^N \left(\frac{C_n e^{i\lambda'_n x}}{\lambda'_n - \lambda} x(\lambda'_n); 0 \right) - i\pi I \quad \text{Im } \lambda < 0. \quad (23)$$

类似地,由积分

$$\int_{\infty} \frac{X_-(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \quad \text{Im } \lambda < 0,$$

可以得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_-(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = i\pi I - 2\pi i \left\{ \bar{x}(\lambda) e^{i\lambda x}, -\bar{\varphi}(\lambda) a^{*-1}(\lambda) e^{-i\lambda x} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^N \frac{C_n^* e^{-i\lambda'_n x}}{\lambda'_n - \lambda} \bar{x}(\lambda'_n) \right\} \quad \text{Im } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (24)$$

不难证明

$$X_+(\lambda) - X_-(\lambda) = (\tilde{r}(\lambda)X(\lambda)e^{-i\lambda x}, \tilde{r}^*(\lambda)\bar{x}(\lambda)e^{i\lambda x}) \quad \lambda \in R + \infty.$$

利用这个公式,以及积分方程(23)与(24),立即可以得到 $x(\lambda)$ 与 $\bar{x}(\lambda)$ 满足的积分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda')x(\lambda')e^{+i\lambda'x}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}(\lambda)e^{i\lambda x} \\ + \sum_{n=0}^N \frac{C_n e^{i\lambda'_n x}}{\lambda'_n - \lambda} x(\lambda'_n) \quad \text{Im } \lambda < 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^*(\lambda')\bar{x}(\lambda')e^{-i\lambda'x}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -r^*(\lambda)\bar{x}(\lambda)e^{-i\lambda x} \\ + x(\lambda)e^{-i\lambda x} + \sum_{n=0}^N \frac{C_n^* e^{-i\lambda'_n x}}{\lambda'_n - \lambda} \bar{x}(\lambda'_n) \quad \text{Im } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

可以证明,这些方程与 G-L-M 方程是等价的.

在上面的讨论中,我们没有涉及散射数据的时间演化. 然而,不难看出,无论对于正规 R-H 问题,还是对于与之相联系的积分方程,时间 t 仅起任意参数的作用. 因此,只要将上述 R-H 问题及其积分方程中的散射数据代之以它们的时间演化数据,我们就可以得到任意时刻 t 的正规 R-H 问题及其积分方程.

4. 最后,我们导出 Lax 表示的不同基本解组之间的 Darboux-Bäcklund 变换所满足的正规 R-H 问题,并指出,与反散射变换直接联系的正规 R-H 问题是其特殊形式.

我们考虑方程(2')所对应的本征值问题. 假定有两组不同的初值所对应的散射数据,按照上一节,可将它们的基本解组与相应的正规 R-H 问题的解相联系:

$$W_{i-} = X_{i-}U_0, \quad W_{i+} = X_{i+}U_0u_i(\lambda)^{-1} \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

$$X_{i+} = X_{i-}U_0u_i(\lambda)U_0^{-1} \quad \lambda \in R + \{\infty\}. \quad (28)$$

可以证明,这两组基本解组之间的 Darboux-Bäcklund 变换 $B_{\pm}: W_{1\pm} \rightarrow W_{2\pm}$, 使得

$$W_{2-} = B_-W_{1-}, \quad W_{2+} = B_+W_{1+}u(\lambda)^{-1}, \quad (29)$$

也满足正规 R-H 问题:

$$B_+ = B_-W_{1-}u(\lambda)W_{1-}^{-1} \quad \lambda \in R + \{\infty\},$$

$$B_+|_{\lambda=\infty} = B_-|_{\lambda=\infty} = 1,$$

$$\det B_+ = \det B_- = \det u(\lambda) = 1, \\ u(\lambda) = u_2(\lambda)u_1(\lambda)^{-1}. \quad (30)$$

事实上,利用变换(29)式以及关于 $W_{1\pm}, W_{2\pm}$ 的 R-H 问题(21)式与(28)式,不难导出方程(30). 显然,方程(30)也是关于亚纯函数的 R-H 问题. 而我们只要选取

$$W_{1-} = U_0, \quad u_1 = 1, \quad (31)$$

R-H 问题(30)式就回到 R-H 问题(28)式. 因此,与反散射变换直接联系的 R-H 问题是从平凡基本解组或渐近条件出发的 Darboux-Bäcklund 变换所满足的 R-H 问题.

容易看出,正规 R-H 问题(30)式在形式上与我们基于延拓结构或 Lax 表示的不变性所导出的伪势之间的 Darboux-Bäcklund 变换所满足的正规齐性 R-H 问题^[4]完全一致. 不同之处在于这里仅由本征方程(2')导出 R-H 问题,方程(3')所决定的时间演化,是以散射数据随时间演化的形式进入 R-H 问题的. 然而,这是由于 Lax 表示的具体类型,特别是对谱参数的依赖的不同而引起的. 对于反散射变换、Darboux-Bäcklund 变换与正规 R-H 问题之间的本质联系,只是表现方式上的差别.

本文内容是作者于一九八二年十一月先后访问兰州大学和中山大学期间完成的,作者感谢段一士、葛墨林、卢文、李华钟等的热情款待. 同时感谢赵保恒、蒲富恪的有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] H. D. Wahlquist & F. B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1.
- [2] Guo Han-ying, Hsiang Yan-yu & Wu Ke, *Commun Theor. Phys.*, **1**(1982), 495.
- [3] P. D. Lax, *Commun. Pure & Appl. Math.*, **21**(1968), 467.
- [4] Guo Han-ying, Wu Ke & Wang Shi-kun, *Commun. Theor. Phys.*, **2** (1983), 883.
- [5] 郭汉英、吴可、王世坤,规范场及有关物理问题会议集. 将发表
- [6] L. Dolan & A. Roos, *Phys. Rev. D*, **22** (1980), 2018; L. Dolan, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 1371.
- [7] B. Y. Hou, Yale Report, No. YTP 80-029, (1980); B. Y. Hou, M. L. Ge & Y. S. Wu, *Phys. Rev. D*, **24** (1981), 2238.
- [8] V. E. Zakharov & A. B. Shabat, *Func. Anal. & Appl.*, **13** (1979), 13.
- [9] A. V. Mikhailov, *Physica D*, **3** (1981), 73; *Phys. Lett. A*, **92** (1982), 51.
- [10] V. E. Zakharov & A. B. Shabat, *Soviet Phys. JETP*, **34** (1972), 62.
- [11] M. J. Ablowitz, *Studies in Appl. Math.*, **58**(1978), 17.
- [12] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff N. V. (1953).

INVERSE SCATTERING TRANSFORM AND REGULAR RIEMANN-HILBERT PROBLEM

WANG SHI-KUN

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

GUO HAN-YING WU KE

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is shown that the inverse scattering transform method to solve the Lax pair of given nonlinear evolution equation can be reduced to a kind of Riemann-Hilbert (R-H) problem of meromorphic functions with respect to the complex spectral parameter. The R-H problem is generally regular no matter whether the solitons are involved in it. The linear singular integral equation connected with the R-H problem has been derived, which is essentially equivalent to the Gel'fand-Levitan-Marchenko equation. Furthermore, the regular R-H problem satisfied by the Darboux-Bäcklund transformation from a fundamental solution set of the eigenvalue equation of Lax pair to a new set has been given as well. The R-H problem reduced from the inverse scattering transform is in fact a special case of that satisfied by the Darboux-Bäcklund transformation.