

# 研究强迫非线性振子中倍周期分岔和 “混乱”现象的分频采样方法<sup>1)</sup>

郝柏林 张淑誉

(中国科学院理论物理研究所) (中国科学院物理研究所)

1982 年 3 月 8 日收到

## 提 要

采用分频采样方法对于在周期外力作用下的非线性振子进行数值研究, 达到可与离散映象相比拟的高分辨率. 首次为常微分方程组描述的系统确定了高达 8192 分频的倍周期分岔序列和相应的“混乱”带的序列, 并证实存在着嵌在混乱带中的二阶和三阶分岔序列. 讨论了分频采样方法的优点和局限性, 以及使用这一方法时应注意的问题.

## 一、引 言

简单非线性系统中的倍周期分岔和相应的“混乱”现象, 正在引起广泛注意(参看文献 [2—5] 及其所引文献). 有关的实验报道也迅速增加. 这包括同心旋转圆柱间的流体运动不稳定(Taylor 不稳定)<sup>[6]</sup>、平面间受热液体的对流不稳定(Rayleigh-Bénard 不稳定)<sup>[7]</sup>、光学双稳腔<sup>[8]</sup>、非线性振荡电路<sup>[9]</sup>和声学湍流<sup>[10]</sup>等方面, 还有许多关于新实验的建议.

对倍周期分岔现象中的普适规律和标度不变性质的认识, 主要来自对依赖于参数  $\lambda$  的一维离散映象(即迭代过程)

$$x_{n+1} = f(\lambda, x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

的计算机实验和理论分析. 实验所研究的多是由常微分方程或偏微分方程所描述的物理系统. 因此迫切需要研究非线性微分方程中的倍周期分岔, 这里目前数值实验几乎是唯一手段.

使用现代电子计算机观察离散映象是轻而易举的, 但处理微分方程就困难得多. 这是由于对每组参数值要求解一次初值问题, 而且必须等待过渡过程消失, 达到定常态. 在分岔点  $\lambda_k$  附近, 过渡过程的时间常数发散<sup>[11]</sup>. 即使取得了大量数据, 仍然缺少高分辨力的分析手段. 借助快速傅氏变换进行频谱分析, 很难在不出现混淆现象(aliasing)的要求下, 超越  $p = 128$  分频(本文用  $p$  代表分频数,  $p = m \cdot 2^n$ , 对主分岔序列  $m = 1$ ). 直接观察轨道图形, 分辨率更低, 通常  $p \leq 32$ . 表 1 列举了我们所见到的全部关于常微分方程中倍周期分岔的报道. 这些文献都未能确定任何混乱带的系列, 更没有发现嵌在混乱带中的二阶和三阶序列.

1) 本文主要结论曾以快讯形式报道<sup>[1]</sup>.

表 1

系 统	$p_{\max}$	文 献
5 个模截断的二维 Navier-Stokes 方程	32	1979[12]
Lorenz 模型	32	1980[13]
Rössler 模型(用模拟计算机研究)	16	1980[14]
双组元 Lorenz 模型	16	1981[15]
参量激励的数学摆	32	1981[16]
同 上	128	1981[17]
强迫布鲁塞尔振子	128	1981[18]

为了判断在非线性微分方程中是否也存在着曾在离散映象中观察到的复杂的分岔结构,并进一步发现一维映象所不具备的新特点,我们必须大为提高分辨能力. 对于周期外力作用下的非线性振子(例如表 1 中最后两例),我们建议简单地推广平常的闪烁采样思想,用分频采样法来达到这一目的.

我们研究的模型是周期外力作用下的布鲁塞尔振子<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha \cos(\omega t), \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y.\end{aligned}\quad (2)$$

这个模型曾由富田和久等人<sup>[20]</sup>研究过. 他们的分辨力很低,而且工作完成在由于 Heigenbaum 发现离散映象中的普适规律<sup>[21]</sup>而引起的研究高潮之前,因而不能回答许多新问题,例如分岔序列的收敛速率,混乱带是否具有层次结构等.

引入两个新变量  $U$  和  $Z$ , 可把方程组(2)写成

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha U, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y, \\ \dot{U} &= -\omega Z, \\ \dot{Z} &= \omega U,\end{aligned}\quad (3)$$

(取  $U(0) = 1, Z(0) = 0$ ). (3)式的好处是: 第一,它是自治系统,因而除了具有三次非线性外,与表 1 中其它自治系统没有原则区别; 第二,它是一对线性和非线性振子的耦合方程组,对计算结果可有更直观的物理解释; 第三,控制参数  $A, B, \alpha, \omega$  以同等地位进入方程组,而在(1)式中  $\alpha$  与  $\omega$  的地位似不同; 第四,不明显出现余弦函数,可以节省计算时间.

## 二、频谱分析的局限性

周期运动在频谱中对应尖峰. “混乱”的特征是频谱中出现噪声背景和宽峰. 因此频谱分析自然成为研究倍周期分岔的重要手段.

设采样间隔为  $\tau$ , 每采  $N$  个点作一次快速傅氏变换, 然后计算功率谱(关于谱分析的基本概念可参看文献[22, 23]). 每个谱涉及的总采样时间是  $L = N\tau$ .  $L$  和  $\tau$  决定两个量纲为频率的量

$$f_{\max} = \frac{1}{2\tau}, \quad (4)$$

$$\Delta f = \frac{1}{L} = \frac{1}{N\tau}. \quad (5)$$

$f_{\max}$  是采样间隔  $\tau$  所能反映的最高频率. 在时间序列分析中常称(4)式为“采样定理”.  $\Delta f$  是两个相邻傅氏系数所对应的频率差, 即这种采样方式下频率分辨力的极限.  $\Delta f$  还对应一个可能出现在最低频端的假峰, 这是由于作傅氏变换时以周期  $L$  延长原始数据所致. 它可以借助低频滤波或对所求得的谱作光滑化处理(两种办法等价, 我们采用后者)而消除, 不会引起困难.

再设所研究的物理系统有一个基本频率  $f_0$  (本文中  $f_0 = 1/T_0 = \omega/2\pi$ ). 用离散采样作频谱分析, 原则上不能得到单值的结果. 有些虚假的高频成分(幅度很小)会“反射”到  $f_{\max}$  以下, 迭加在所得的谱上. 这就是引言中提到的混淆现象. 除了提高  $f_{\max}$ , 同时只保留谱的低频部分外, 没有其它办法消除混淆现象(见文献[23]第 74 页). 我们取  $f_{\max} = kf_0$ ,  $k = 4-8$ , 但只保留整个谱的一半或四分之一. 实践表明, 这样作确可有效地消除混淆.

另一方面, 研究倍周期分岔时, 我们期望观察到  $p$  分频. 为了使最精细的峰能由  $S$  个点组成, 必须要求

$$f_{\min} = f_0/p = S\Delta f. \quad (6)$$

合并以上各式, 得到不依赖于  $f_0$  和  $\tau$  的关系

$$p = \frac{N}{2kS}. \quad (7)$$

它决定了频谱分析的应用范围. 如果取  $N = 8192$ ,  $k = 4$ ,  $S = 8$ , 得到  $p = 128$ . 这基本上是在现代电子计算机上用频谱分析研究倍周期分岔序列所能分辨的限度.

每作一次快速傅氏变换至少需  $2N$  个存储单元. 通常要对几个物理量(如  $X$  和  $Y$ )同时作谱分析. 开始采样前必须等待过渡过程消逝, 而临界慢化<sup>[24]</sup>使等待时间延长. 为了获得可靠的功率谱, 须对若干个(我们至少取十个)相继的采样序列的谱作平均. 数值积分步长往往要比采样间隔小得多, 以保证局部截断误差足够小. 这一切从存储容量和计算时间两方面限制了频谱分析的使用.

应当指出, 频谱分析仍是十分有益的工具, 它特别有助于区分嵌在不同混乱带中的周期轨道<sup>[24]</sup>.

### 三、分频采样方法

这是实验物理或非线性振动理论中闪烁采样法<sup>[25,26]</sup>的简单推广, 即不限于按控制频率  $\omega$  的基本周期  $T_0$  采样, 而且按适当分频的更长周期采样. 图 1 是分频采样的一个例子, 其中每张图里都标出了 256 个采样点. 图 1(a) 中  $NS = 1$  表示按  $1T_0$  采样, 图中各个“岛屿”的性质很难判断. 改用  $NS = 8$  后, 可以借助移动初始采样时刻, 即取  $NK = 0, 1, \dots, (NS - 1)$  个周期, 分别拿出图 1(a) 中各块.  $NK = 1$  时取出图 1(a) 的右上角, 示于图 1(b) 中. 注意这里采用了纵横两个方向独立自动变比例的绘图方法, 以获得最高的分辨. 改用  $NS = 32$ ,  $NK = 1$  后, 从图 1(b) 中又取出左下角的两个岛屿, 即

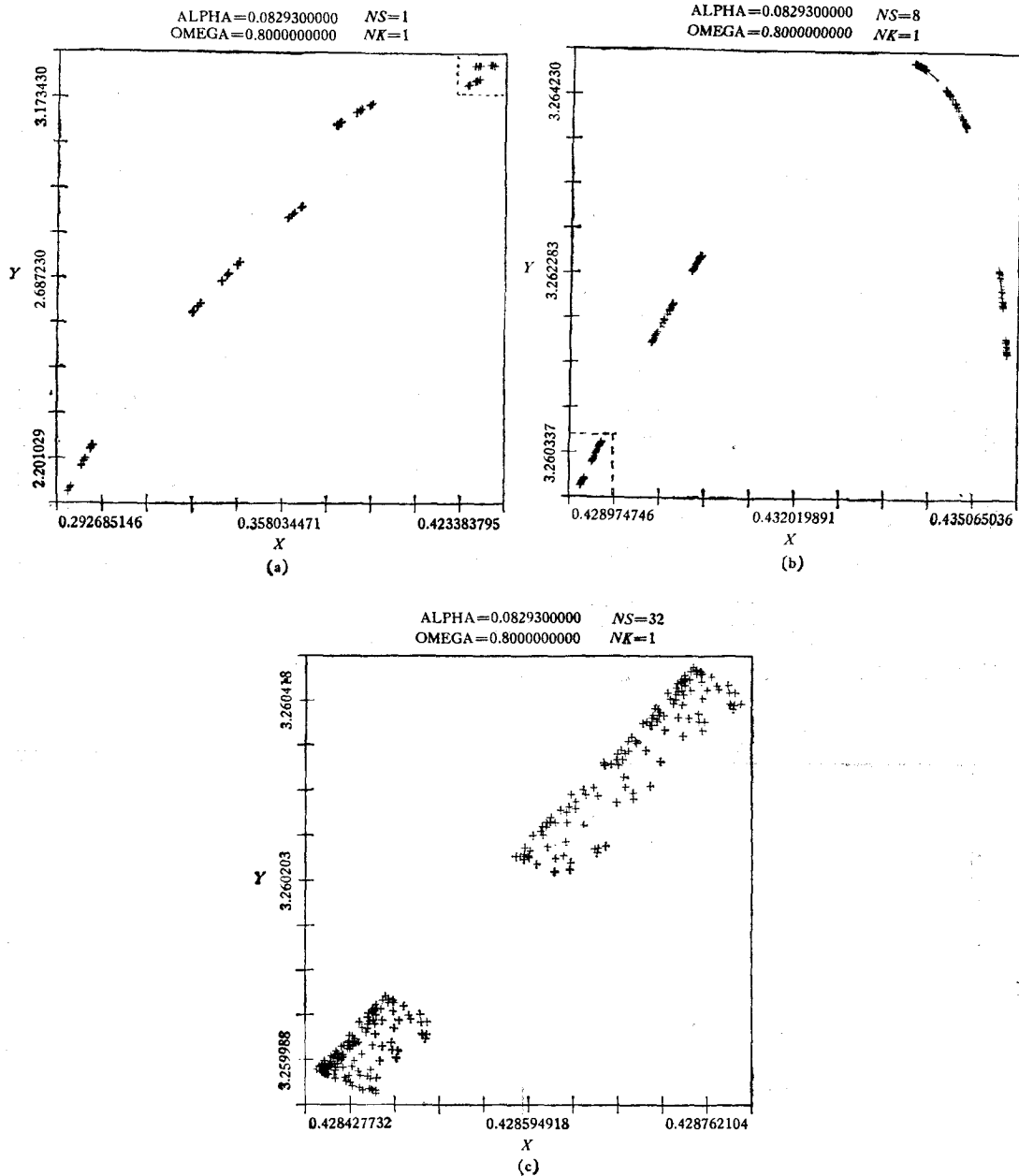


图 1

图1(c). 现在清楚看到 256 个采样点分别落在两个分开的区域中. 这是周期为 64 的“混乱”轨道, 以后记为  $64I$ ,  $I$  表示反(inverse)序列或采样图中的岛屿(islands). 周期轨道将记为  $nP$ ,  $P$  代表周期(periodic)或采样图中的点(points).

使用分频采样方法, 有一些须注意的细致问题. 首先, 作为一种离散序列的采样, 它具有和快速傅氏变换一样的两个缺点, 即解释不唯一, 而且不能分辨比采样频率更高的频率. 设非线性振子的实际周期  $T$  与采样周期  $T_0$  的关系为

$$T = \frac{n}{m} T_0, \quad (8)$$

其中  $n$  和  $m$  是不可约的整数, 则对于一切  $m \geq 1$ , 按  $T_0$  采样都给出  $n$  个(群)点. 如果  $n$  是两个整数  $l$  和  $k$  的乘积, 当然可以改用  $lT_0$  或  $kT_0$  采样, 即分频采样, 从而提高分辨率. 但如果误用了一个并非  $n$  的因子的  $k$  值, 则周期数目中就会出现虚假的因子  $k$ . 因此为可靠起见, 应当注意每次从基频逐步走向分频, 并且只要有可能就应与频谱分析的结果对照.

其次, 只要正确地应用足够长的采样周期, 总是可以区分  $nP$  与  $nI$  两种情况的. 然而由于混乱带或所谓“奇怪吸引子”一般具有稀疏的, 即 Cantor 集合类型的结构(参看文献 [2—5]), 一张  $nI$  的采样图是否能继续分解下去, 由图形本身是难以判断的. 解决的办法很简单, 只须再作几次倍周期采样. 例如用  $NS = 64$  可取出图 1(c) 中任何一个岛屿, 其中都有一些稀疏的区域. 然而改用  $NS = 128$  后, 并不能再分割下去, 得到的图形仍与  $NS = 64$  相同, 这是  $64I$  而非  $128I$  的轨道. 分频采样目前是辨认长周期的混乱带的最有效方法.

第三, 采样周期增长后, 计算机的舍入误差上升, 可能把周期轨道采样成一群点, 使  $nP$  被误认为  $nI$ . 图 2(a) 就是这种情形. 对相同的参数和初值, 改用双精度(在我们使用的 Cyber 计算机上字长达 120 位, 具有 28 位十进制有效值)计算, 得到图 2(b). 现在 256 次采样清楚地落在 16 个点上, 这是周期为  $64 \times 16 = 1024$  的轨道.

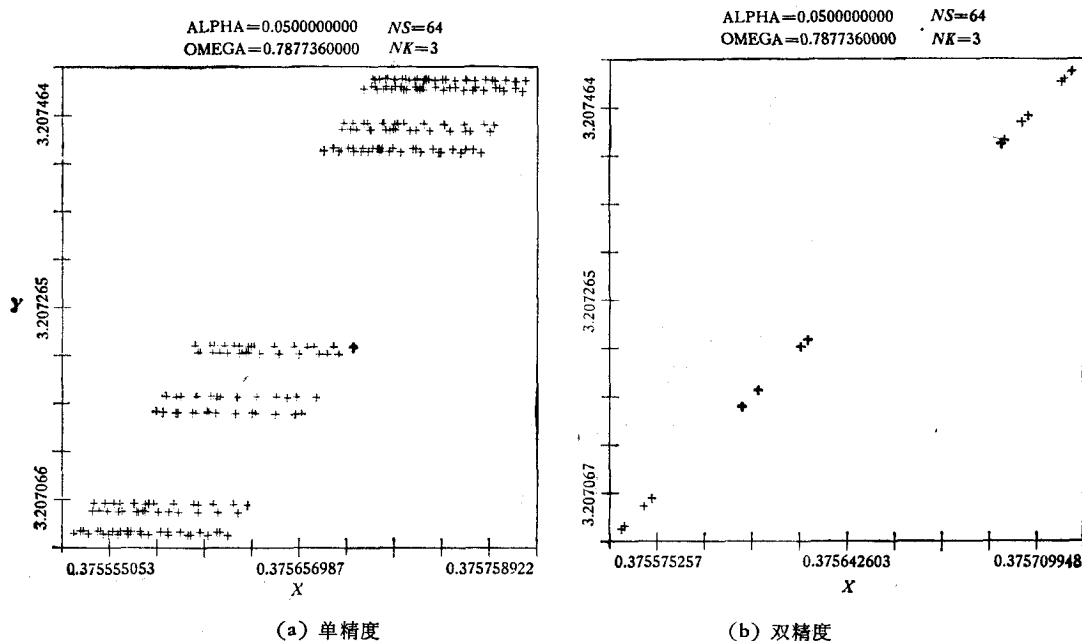


图 2

第四, 应与积累误差相区别的另一情形, 是仍在收敛中的过渡过程. 在每个分岔点附近, 收敛速度显著慢化<sup>[11]</sup>, 在有限的计算时间内甚至看不到这个过程结束. 然而收敛的点列可以容易地与或多或少均匀分布的积累误差区别开. 图 3 是  $\alpha = 0.032$ ,  $\omega = 0.8$

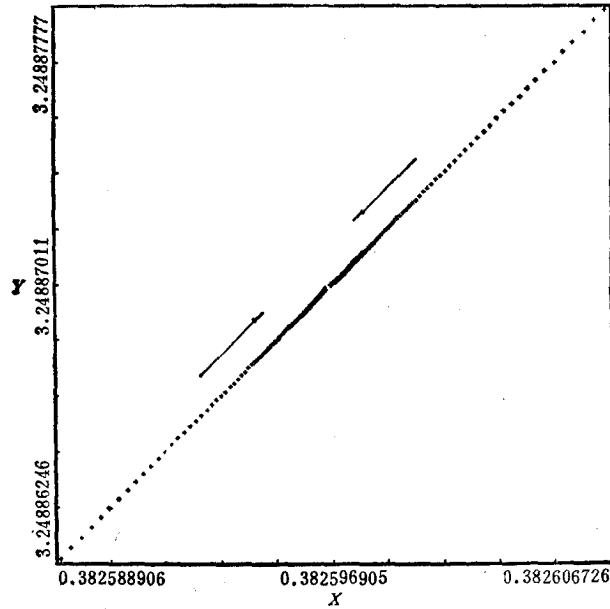


图 3

时, 收敛向  $2P$  周期中一个点的情形 ( $NS = 2$  采样). 图中对角线上最远两点间的坐标差为  $10^{-5}$  量级, 经过 512 个周期后, 图中心空白处两侧的坐标差达到  $10^{-7}$  量级. 图 3 与图 2(a) 对比, 可以看出点分布的定性差别. 只要具有一定的实践经验, 即不难区分积累误差、收敛点列和混乱带三种情况, 而不必每次求助于耗费时间的双精度计算.

从实用角度看, 分频采样方法的限制仅仅是机器字长和计算时间, 而频谱分析还受到存贮容量限制. 我们在单精度计算中, 可以有把握地分辨  $p \lesssim 1000$  以内的周期, 因而对微分方程描述的系统的混乱带结构, 首次取得了一些细致的结果.

#### 四、混乱带的层次结构

离散映象(1)的混乱带具有无穷嵌套的层次结构<sup>[3]</sup>. 作为实例, 图 4(a)<sup>1)</sup> 给出映象

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (9)$$

在  $\lambda = 0-2$  区的分岔概貌. 最醒目地嵌在  $1/1$  混乱带中的是从  $\lambda = 1.75$  处开始的  $3 \cdot 2^n$  序列, 它自己也具有混乱带构成的反序列. 图 4(b) 给出  $\lambda = 1.78-1.79$  一段, 即二阶反序列的尾部, 而且是用  $NS=3$  的分频采样法, 只显示图 4(a) 三个序列居中的那一个. 这里又清楚看到许多三阶序列. 图 4(c) 用  $NS=9$  的分频采样, 取出图 4(b) 居中的三阶序列的尾部 ( $\lambda = 1.78632-1.78650$ ), 其中又嵌套着四阶序列. 这些图只是把横坐标  $\lambda$  分成 200 步的计算结果, 反映不出分岔序列的更精细部分, 但无穷嵌套的整体结构已经清楚. 非线性微分方程描述的系统有没有类似的层次结构, 迄今未见报道. 下面对此给出肯定答复.

方程组(2)或(3)有四个控制参数  $A, B, \alpha$  和  $\omega$ . 图 5 给出  $\alpha-\omega$  平面中混乱区的位置.

1) 图 4(a) 至(c)是与 G. Parisi 一齐在罗马大学的 VAX 计算机显示终端绘制的.

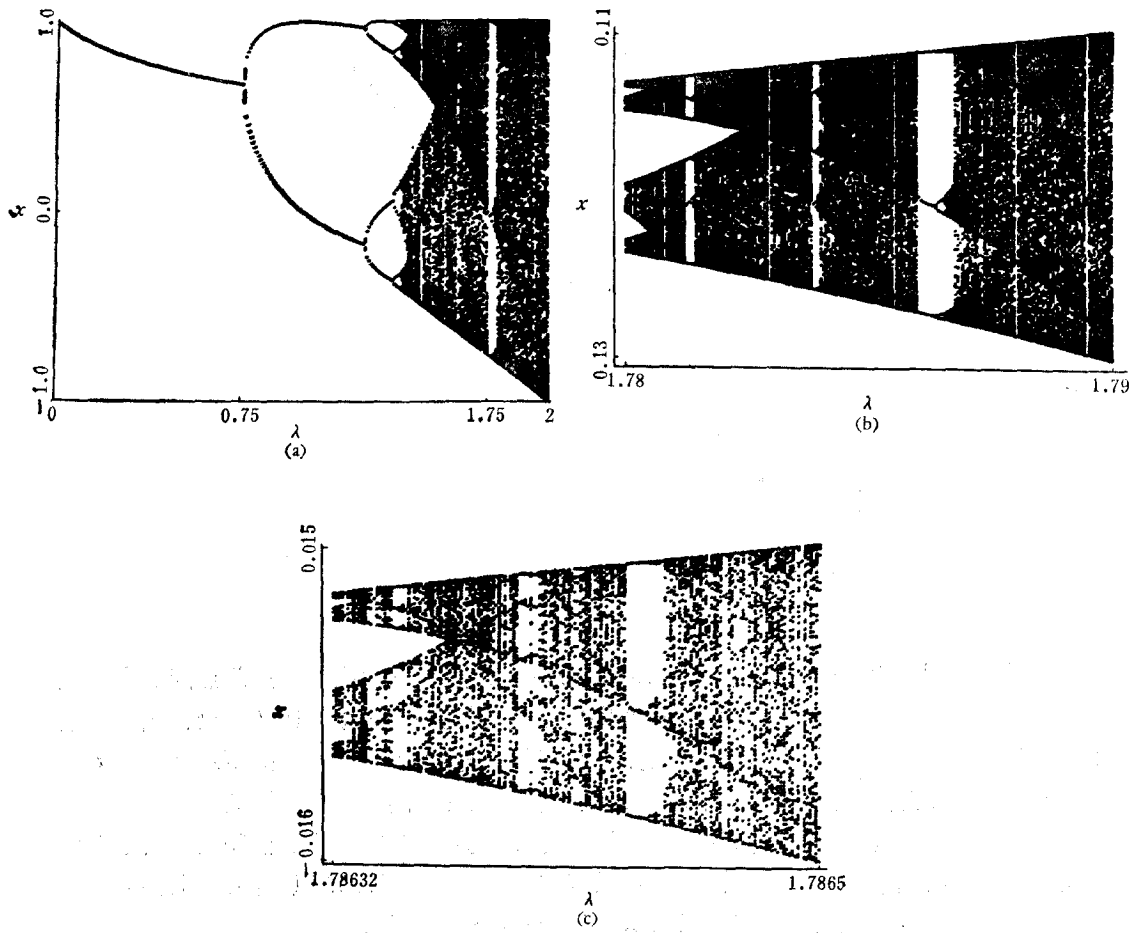


图 4

表 2

( $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.05$ )

$n$	周期	$\omega$ 的范围	$\omega_n$	$\delta_n$
0	1	-0.39820	0.398205	5.53
1	2	0.39821 -0.71305	0.7130625	4.24
2	4	0.713075 -0.769996	0.7699998	4.02
3	8	0.770000 -0.78337	0.783435	4.46
4	16	0.78350 -0.786752	0.786776	4.41
5	32	0.78680 -0.78752	0.787525	5.40
6	64	0.78753 -0.78769	0.787695	4.04
7	128	0.78770 -0.787726	0.7877265	4.88
8	256	0.787727 -0.787734	0.78773425	4.92
9	512	0.7877345 -0.7877358	0.78773585	
10	1024	0.7877359 -0.78773615	0.787736175	
11	2048	0.78773620		
12	4096	0.78773624		
13	8192	0.78773625		

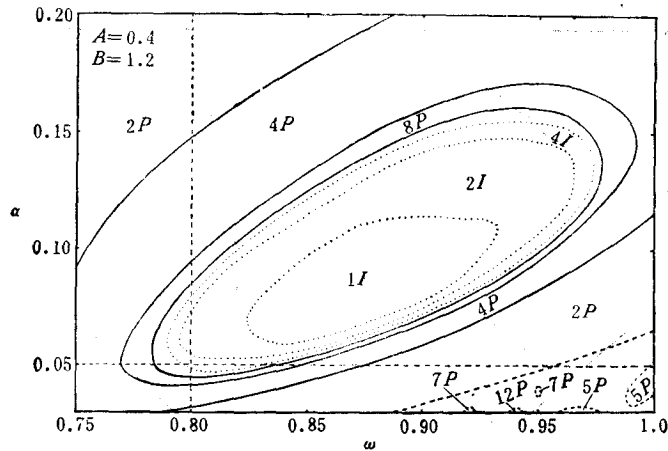


图 5

——为周期区边界; .....为混乱区边界; ----为周期与拍频区边界

这个图中从任何方向进入混乱区都要经过无穷的倍周期分岔序列. 表 2 给出一个最长的正分岔序列, 其中最后一列是分岔点的收敛速率, 按下式估算:

$$\delta_n = \frac{\omega_n - \omega_{n+1}}{\omega_{n+1} - \omega_{n+2}}. \quad (10)$$

表 2 所列结果, 比我们的快讯<sup>[1]</sup>更完备.

图 5 中只画出 1I, 2I, 4I 区的边界, 事实上我们确认了高达 256I 的混乱带. 表 3 和表 4 分别给出沿  $\alpha = 0.05$  和  $\omega = 0.8$  两条直线的混乱带的范围, 以及收敛速率的估值. 从图 5 看出,  $\alpha = 0.05$  直线没有穿过 1I 和 2I 区, 而  $\omega = 0.8$  直线没有经过 1I 区. 这是表中  $n = 0$  对应 4I 或 2I 的原因.

图 6 是沿  $\omega = 0.8$  直线的分岔示意, 其中只绘出了一个嵌在 8I 区中的二阶分岔序列. 我们定出了这个  $8 \cdot 3 \cdot 2^n$  序列  $n = 0-5$  的分岔点位置, 从而可以计算它的收敛速率.

表 3

( $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.05$ )

$n$	带	$\omega$ 的范围	边界 $\omega_n$	$\delta_n$
6	256I	-0.787737	0.7877375	5.94
5	128I	0.787738-0.7877428	0.7877429	3.66
4	64I	0.787743-0.787770	0.787775	5.60
3	32I	0.78778 -0.78789	0.7878925	3.65
2	16I	0.787895-0.7885	0.78855	
1	8I	0.7886 -0.7909	0.79095	
0	4I	0.791 -0.8295		
1	8I	0.83 -0.8325	0.82975	
2	16I	0.8327 -0.83304	0.8326	
3	32I	0.83306 -0.83314	0.83305	6.33
4	64I	0.83315 -0.83317	0.833145	4.74
5	128I	0.833175	0.8331725	3.45
6	256I	0.83318	0.8331775	5.5

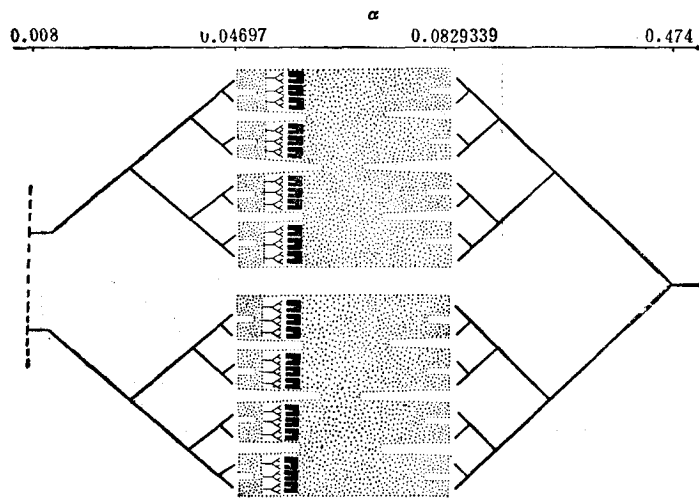


图 6

纵轴是  $\alpha$ , 没有比例

表 4

 $(A = 0.4, B = 1.2, \omega = 0.8)$ 

$n$	带	$\alpha$ 的范围	边界 $\alpha_n$	$\delta_n$
4	32I	0.04698 — 0.04701	0.0470175	6.82
3	16I	0.047025 — 0.047197	0.0471975	3.73
2	8I	0.047198 — 0.04840	0.048425	
1	4I	0.04845 — 0.0535	0.053	
0	2I	0.0545 — 0.0725		
1	4I	0.0735 — 0.0809	0.073	
2	8I	0.08092 — 0.0825	0.08091	
3	16I	0.08255 — 0.08285	0.082525	4.90
4	32I	0.08286 — 0.082914	0.082855	4.89
5	64I	0.082916 — 0.08293	0.082915	5.59
6	128I	0.0829302 — 0.0829327	0.08293145	3.38
7	256I	0.0829330 — 0.0829332	0.08293285	12.46

结果示于表 5 中.

表 5

 $(A = 0.4, B = 1.2, \omega = 0.80)$ 

$n$	周期	$\alpha$ 的范围	边界 $\alpha_n$	$\delta_n$
0	24	0.047591 — 0.047637	0.0476375	4.05
1	48	0.047638 — 0.0476575	0.04765775	3.85
2	96	0.047658 — 0.0476625	0.04766275	6.50
3	192	0.0476630 — 0.0476640	0.04766405	
4	384	0.0476641 — 0.0476642	0.04766425	
5	768	0.0476643		

在这个二阶序列的尾部, 还看到了 192I, 96I, 48I 和 24I 的混乱带组成的反序列.

这些混乱带中还嵌有三阶分岔序列。图 7 是在这个  $8I$  带内所发现的二阶和三阶序列的示意。在其它混乱带中也看到了许多类似的二、三阶序列。它们的出现顺序, 是否也遵从离散映象的同样规则<sup>[3]</sup>, 目前尚不清楚。我们所观察到的全部周期(包括混乱带的周期), 均可写成

$$p = k \cdot m \cdot 2^n, \quad (11)$$

其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ 。对于主分岔序列  $k = m = 1$ , 对于高阶序列  $k$  是所在混乱带的周期,  $m = 3, 5, 7, 11$ 。由于计算机时间限制, 不可能对参数空间进行极细致的搜索, 因此尚不能排除  $m = 9$  的可能性。

## 五、讨 论

分频采样方法适用于一切由周期外力驱动的非线性系统。本文显示了它所提供的远远高于频谱分析的分辨能力。

依靠这样的高分辨率, 我们首次证实了在非线性微分方程描述的系统中也存在嵌套着的周期带和混乱带的分岔序列。对分频采样方法的限制, 主要是计算时间和计算机字长。舍入误差与外噪声一样, 将掩盖分岔结构的细节。然而为了与实验<sup>[6-10]</sup>相比, 本文的精度已是绰绰有余。我们主要研究了强迫布鲁塞尔振子的分岔结构, 完全没有涉及奇怪吸引子的测度性质。这将是另一个更有意义的研究课题。

校时注 混乱带的分频采样图还应和阵发混沌区分, 见王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, 待发表。

本文主体是在访问索尔威国际物理和化学研究所期间完成的。布鲁塞尔自由大学计算中心免费提供了数百万秒处理时间。作者问这两个单位表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] Bai-lin Hao (郝柏林), Shu-yu Zhang (张淑誉), *Phys. Lett. A*, **87**(1982), 267.
- [2] 郝柏林, 大连铁道学院学报, No. 3/4 (1980), 43.
- [3] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, (1980).
- [4] 郝柏林, 1981 年全国统计物理和凝聚态理论学术会议综述报告汇编, 华中工学院出版社 (将出版).
- [5] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 655.
- [6] P. R. Fenstermacher, H. L. Swinney, J. P. Gollub, *J. Fluid Mech.*, **94**(1979), 103.
- [7] A. Libchaber, J. Maurer, *J. de Physique (Paris)*, *Colloq.* **41**(1980), C3-51; J. P. Gollub, S. V. Benson, *J. Fluid Mech.*, **100**(1980), 449; M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 243.
- [8] H. M. Gibbs *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 474.
- [9] P. S. Linsay, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1349.

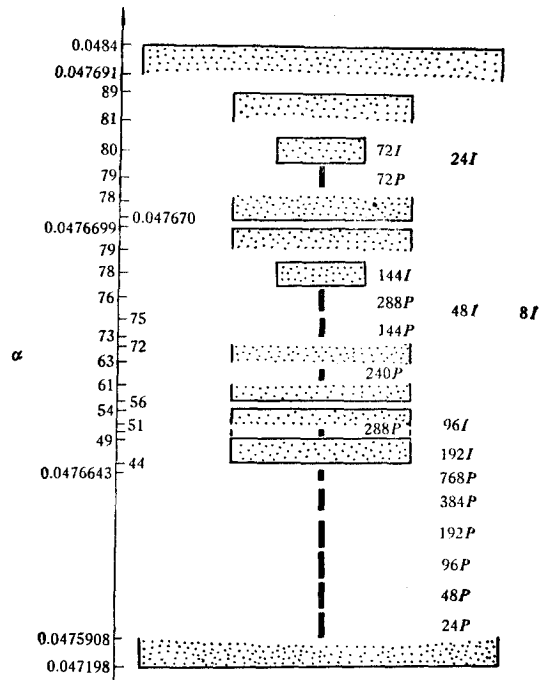


图 7

- [10] W. Lauterborn, E. Cramer, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1445.  
[11] Bai-lin Hao (郝柏林), *Phys. Lett. A*, **86**(1981), 267.  
[12] V. Franceschini, C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 707.  
[13] V. Franceschini, *J. Stat. Phys.*, **22**(1980), 397.  
[14] J. Crutchfield *et al.*, *Phys. Lett.*, **76A**(1980), 1.  
[15] E. Knobloch, N. O. Weiss, *Phys. Lett.*, **85A**(1981), 127.  
[16] J. B. McLanghlin, *J. Stat. Phys.*, **24**(1981), 377.  
[17] R. W. Leven, B. P. Koch, *Phys. Lett.*, **86A**(1981), 71.  
[18] T. Kai, *Phys. Lett.*, **A**, **86**(1981), 263; 王光瑞, 物理学报, 待发表.  
[19] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-organisation in Nonequilibrium Systems*, Wiley, (1977).  
[20] T. Kai, K. Tomita, *Progr. Theor. Phys.*, **61**(1979), 54; K. Tomita, T. Kai, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 65.  
[21] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25; **21**(1979), 669.  
[22] C. Y. Yuen, D. Fraser, *Digital Spectral Analysis*, Pitman, 1979.  
[23] J. N. Rayner, *An Introduction to Spectral Analysis*, Pion Limited, London, (1971).  
[24] Bai-lin HAO (郝柏林), Shu-yu ZHANG (张淑誉), *Commun. Theor. Phys.*, **1**(1982), 111; *J. Stat. Phys.*, **28**(1982), 769.  
[25] N. Minorsky, *Théorie des Oscillations*, Gauthier-Villars, Paris, (1967).  
[26] K. Tomita, T. Kai, *Phys. Lett. A*, **66**(1978), 91.

## SUBHARMONIC STROBOSCOPIC SAMPLING METHOD FOR STUDY OF PERIOD-DOUBLING BIFURCATION AND CHAOTIC PHENOMENA IN FORCED NONLINEAR OSCILLATORS

HAO BAI-LIN

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ZHANG SHU-YU

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

By using subharmonic stroboscopic sampling method, very high resolution, comparable with that for discret mappings, has been reached in numerical study of periodically forced nonlinear oscillators. For the first time period-doubling bifurcation sequences up to 8192th subharmonics and corresponding sequences of chaotic bands are identified for a system, described by ordinary differential equations. Secondary and tertiary bifurcation sequences embedded in chaotic bands are shown to exist. Merits and limitations of this method as well as some precaution in using it are discussed briefly.