

多变量 Master 方程及其波动解

陈正雄 霍裕平

(中国科学院等离子体物理研究所, 合肥)

1981 年 9 月 16 日收到

提 要

本文讨论了线性反应过程: $A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} X$ 多变量 Master 方程的波动解。除了可以由反应扩散方程得到的密度波以及由之耦合而成的多波解外, 不可能得到类似于文献 [2] 中得到的涨落波分支。在考虑压力效应后, 情况基本不变。本文讨论了由于化学反应及扩散的空间尺度(自由程)一般差别很大, 多变量 Master 方程所存在的问题。

一、引 言

化学反应体系中粒子数涨落的性质及其时间空间关联是化学反应动力学的重要课题^[1,2]。反应扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial t} N_j(x, t) = \mathcal{R}_j(N) + D_j \nabla^2 N_j, \quad (1)$$

其中 x 为空间坐标, $\mathcal{R}$ 为化学反应项, D_j 为 j 组分的扩散系数。它只描述了平均密度的变化。通常的生-灭方程 (Master 方程) 只考虑了总粒子数的涨落及其时间关联, 不能分析空间关联效应(扩散、压力等过程)^[2]。为此, Nicolis 等人将空间局域的生-灭方程作直接推广^[3]。他们将空间分成尺度为 Δ 的小格子, 认为扩散过程可以由相邻格子间的粒子交换来描述(因而必须取 $\Delta \sim l_c$, l_c 是粒子碰撞自由程)。尽管反应自由程 l_{ch} 在一般情况下远大于 $l_c \sim \Delta$, 他们却仍然假定化学反应只限于在每个格子中, 即每个格子中粒子只与本格子粒子反应。对照反应扩散方程 (1), 可以直接得到所谓多变量 Master 方程 (MME)。曾经用它讨论过一些简单的模型^[4,5]。但由于每个格子的粒子数都是独立变量, 方程的求解十分困难, 特别是空间不均匀的解, 因而很难从

	Δ	Δ	Δ	
...	N_{j-1}	N_j	N_{j+1}	...

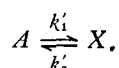
MME 出发讨论涨落空间关联的一般规律。从理论本身来看, MME 的基本问题在于: 当 $l_{ch} \gg l_c \sim \Delta$ 时(这也是反应扩散方程 (1) 成立的条件), 不能认为化学反应只限于格子内, 因而相邻格子内粒子数涨落 (N_j, N_{j+1}) 不能认为是独立的。当然, 以 Δ^{-1} 为小参数的奇异摄动理论^[5]也不能应用。如果在弱不均匀情况下 ($l_{ch}^{-1} < \nabla \ln N$), 勉强应用 MME, 则反应系数 k 与 Δ 有关。所得结果(除少数线性过程外)将依赖于格子的取法, 因而也是不

确切的.

在文献 [2, 3] 中, 作者将粒子密度也看成一个独立变量, 引入分布函数 $P(N, x, t)$. 在 P 所满足的生-灭方程中唯象地引入扩散, 压力项, 就得到描述粒子数涨落时空关联的“广义 Master 方程”. 该文所得到的主要结论是: 在化学反应体系内, 除了存在由反应扩散方程(1)所给出的波(描述平均密度起伏传播)外, 还存在一系列描述粒子数涨落局部起伏在空间传播的波, 我们称之为涨落波. 这些波对化学反应体系的耗散过程以及临界行为都会有重要影响^[3]. 在推导广义 Master 方程所作的主要近似是忽略了空间不同点上密度涨落由扩散过程引入的动力关联效应. 正是在这方面, 多变量 Master 方程处理得比较细致. 近年来一些人^[5]试图由 MME 出发, 讨论非线性体系的临界行为.

本文讨论了 MME 非均匀扰动谱. 与在文献 [2, 3] 中已得到的涨落波谱相对照指出, 由于涨落是由化学反应所引入的, 将 l_{ch} 范围内不同点上粒子数涨落看成独立变量将对波谱带来严重影响, 从而使得临界讨论可能完全不可靠. 为了能得到准确的解析解, 我们选择了最简单的模型——单分子化学反应.

在单分子反应模型中,



取 A 的密度 N_A 保持不变, 无穷一维空间, 在分格后(格子标号 $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) 引入几率分布函数 $P(\{N_i\}, t)$. MME 可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & K_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} [P(N_j - 1) - P(N_j)] + K_2 \sum_j [(N_j + 1)P(N_j + 1) \\ & - N_j P(N_j)] + d \sum_j [(N_{j+1} + 1)P(N_j - 1, N_{j+1} + 1) \\ & + (N_{j-1} + 1)P(N_{j-1} + 1, N_j - 1) - 2N_j P(N_j)], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $K_1 = k_1 N_A$, $P(N_j - 1) = P(\dots, N_{j-1}, N_j - 1, N_{j+1}, \dots, t)$, $P(N_{j-1} + 1, N_j - 1) = P(\dots, N_{j-2}, N_{j-1} + 1, N_j - 1, N_{j+1}, \dots, t)$ 等等. 如果 D 是扩散系数, 则格子间粒子交换几率 $d \simeq D/\Delta l_c$. 由于反应是线性的, 只要密度的空间变化很缓慢: $l_{ch} > \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot \ln N(x) \right|^{-1}$, (2) 式所得的结果将不显含 l_c 的具体值.

二、线性多变量 Master 方程的单波及多波解

为解 MME (2), 引入生成函数

$$G(\{z_i\}, t) = \sum_{N_j=0}^{\infty} \prod_i z_i^{N_i} P(\{N_i\}, t).$$

令 $y_i = z_i - 1$, 则 (2) 式可改写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(\{y_i\}, t) = & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(K_1 y_j - K_2 y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) G \\ & + d \sum_{j=-\infty}^{\infty} (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} G. \end{aligned} \quad (3)$$

方程(3)满足几率守恒条件

$$\sum_{\dots N_j, N_{j+1}, \dots} P(\{N_i\}, t) = G(\{y_i\}, t)|_{\{y_i=0\}} = 1. \quad (4)$$

若 $\sum_{\{N_i\}} P(\{N_i\}, 0) = 1$. 由于粒子涨落的各次矩都与 G 函数对 y 的微商相联系,

$$\begin{aligned} \langle N_j \rangle &= \frac{\partial}{\partial y_j} G|_{\{y_k=0\}} \\ \langle N_j(N_j - 1) \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} G|_{\{y_k=0\}}, \\ \langle N_j N_l \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} G|_{\{y_k=0\}}, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

则物理上允许的解 G 应在 $\{y_i = 0\}$ 点解析^[2].

$$1. \text{ 定态解} \quad \frac{\partial}{\partial t} G_0 = 0.$$

取 $y_0 = \sum_j y_j$, 认为 G_0 只是 y_0 的函数, 则(3)式写成

$$\left(K_1 y - K_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right) G_0(y) = 0. \quad (5)$$

因而均匀定态解为

$$G_0 = \exp \left(\frac{K_1}{K_2} y_0 \right). \quad (5)'$$

很容易看出, 方程(2)不可能有非均匀定态解.

2. 单波解

讨论非定态情况, 取

$$G(\{y_i\}, t) = G_0(1 + \phi(\{y_i\}, t)), \quad (6)$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \sum_j \left[-K_2 y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + d(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \phi. \quad (7)$$

对变量作傅氏变换

$$y_k = \sum_j y_j e^{ikx_j},$$

$$y_j = \frac{1}{2\pi} \sum_k y_k e^{-ikx_j}$$

(对长度为 L 的体系, $k_n = \frac{2\pi}{L} n$, $n = 1, 2, \dots$, $\sum_k \Rightarrow \frac{1}{L} \sum_n$), 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\{y_k\}, t) = & -K_2 \sum_k y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \phi \\ & - d \sum_k f(k) y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \phi, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $f(k) = 2 - e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}$. 单波解即取

$$\phi(\{y_k\}, t) = \sum_k c_k \phi_k(y_k, t), \quad (9)$$

则 $\phi_k(y_k, t) = \hat{\phi}_k e^{-\lambda_k t}$,

$$-\lambda_k \hat{\phi}_k = -K_2 y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \hat{\phi}_k - df(k) y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \hat{\phi}_k.$$

解

$$\hat{\phi}_k = y_k^{\left(\frac{\lambda_k}{K_2 + df(k)}\right)} \quad (10)$$

物理上许可的解为

$$\frac{\lambda_k}{K_2 + df(k)} = \rho \quad \rho = 1, 2, \dots,$$

得到色散关系

$$\lambda_k = \rho(K_2 + df(k)) \quad (11)$$

及本征函数

$$\hat{\phi}_k^{(\rho)} = y_k^\rho. \quad (12)$$

计算各格子中粒子数的涨落, 取 $\Delta N_j = N_j - N_0$, $N_0 = \frac{\partial}{\partial y_j} G_0|_{\{y_j=0\}}$, 由 $\phi = \phi_k^{(\rho)}(y_k, t)$ 得到

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_j \rangle &= \frac{\partial y_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \phi_k^{(\rho)} \\ &\sim e^{ikx_j - \lambda_k^{(\rho)} t} \rho y_k^{\rho-1} |_{y_k=0}. \end{aligned}$$

可见只有一阶波对平均密度的起伏有贡献, 这也就是反应扩散方程的解. 类似有

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_j^2 - \Delta N_j \rangle &\sim e^{2ikx_j - \lambda_k^{(\rho)} t} \rho(\rho-1) y_k^{\rho-2} |_{y_k=0}, \\ \langle \Delta N_j \Delta N_l \rangle &\sim e^{ik(x_j+x_l) - \lambda_k^{(\rho)} t} \rho(\rho-1) y_k^{\rho-2} |_{y_k=0}. \end{aligned} \quad (13)$$

只有 $\rho = 2$ 波的涨落二阶矩 ($\langle \Delta N_j^2 - \Delta N_j \rangle$) 才不为零. 但由 $\langle \Delta N_j \Delta N_l \rangle \approx 0 \quad j \neq l$ 来看, $\rho = 2$ 波与 (2), (3) 式中的二阶涨落波很不相同, 它似乎是两个 $\rho = 1$ 波同时传播的结果: $\phi_k^{(2)} \sim \phi_k^{(1)} \phi_k^{(1)}$. 二阶涨落波^[2]相当于要引入变换

$$z_k = \sum_j y_j^2 e^{ikx_j}.$$

但却不能使方程 (7) 对角化.

同样 $\rho = 3$, $\phi_k^{(3)} \sim (\phi_k^{(1)})^3$, 因而

$$\langle \Delta N_j \Delta N_l \Delta N_k \rangle \approx 0 \quad j \neq l \neq k.$$

3. 多波解

由于方程 (8) 只含对 ϕ 的一阶微商项, 不同的波之间没有相互作用, 还可以写出有几

个波同时存在的解. 以双波为例:

$$\psi = \sum_{k, k'} c_{kk'} \psi_k^{(1)} \psi_{k'}^{(1)} = \sum_{k, k'} c_{kk'} \psi_{kk'}. \quad (9)'$$

代入(8)式后, $\lambda_{kk'} = \lambda_k^{(1)} + \lambda_{k'}^{(1)}$, 因而

$$\psi_{kk'} \sim y_k y_{k'} e^{-\lambda_k^{(1)} t - \lambda_{k'}^{(1)} t}.$$

于是有一串解

$$\begin{aligned} \psi_{kk'}^{(\rho\rho')} &\sim y_k^\rho y_{k'}^{\rho'} e^{-(\lambda_k^{(\rho)} + \lambda_{k'}^{(\rho')})t}, \\ \psi_{kk'k''}^{(\rho\rho'\rho'')} &\sim y_k^\rho y_{k'}^{\rho'} y_{k''}^{\rho''} e^{-(\lambda_k^{(\rho)} + \lambda_{k'}^{(\rho')} + \lambda_{k''}^{(\rho'')})t} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

在上述解中若取所有 k 相同, 就可得到前面的 $\rho = 2, 3, \dots$ 解了.

由这些多波解还可以构造空间均匀非定态解.

$$G(t) = G_0 \left[1 + \sum_{k, \rho} \alpha_k^{(\rho)} \psi_k^{(\rho)} \psi_{-k}^{(\rho)} + \dots \right]. \quad (14)$$

例如 $t = 0$ 时刻, 密度涨落关联有如下形式:

$$\langle \Delta N_i \Delta N_l \rangle \sim e^{ik(x_i - x_l)},$$

则(14)式中, $\alpha_k^{(1)} \neq 0$, 但此项以 $e^{-2\lambda_k^{(1)} t}$ 形式衰减. 在文献[4]中曾对一个与单分子反应略有不同的模型直接得到上述空间平移不变的非均匀定态解. 从我们的结果来看, 这是显然的.

利用以 Δ^{-1} 为小参数的渐近展开, 文献[5]在一般非线性系统中得到了上述多波解. 但是我们已指出, 在 $l_{ch} \gg \Delta$ 情况下这种展开一般是不合法的. 实际上也很容易看出, 对非线性反应系统, 除平均密度波外, 多波解是不存在的.

4. 我们还要证明, 除了上述单波及多波解外, 单分子反应体系多变量 Master 方程不再有其它波分支.

为此, 将(7)式改写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \sum_i \left[-K_2 y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + d y_i \left(\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} + \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} - 2 \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \right] \psi. \quad (7)'$$

考虑描述涨落二阶矩的传播, 则一般可写成

$$\psi^{(2)} = \psi \left(\sum_i e^{ikx_i} y_i \sum_r u_r y_{i+r} \right). \quad (15)$$

如果 $u_r = \delta_{r,0}$, 则为(2)式中的二阶涨落波. (15)式代入(7)'式后逐项比较系数. 例如 y_i^2 的系数方程为

$$\lambda u_0 = -2(K_2 + 2d)u_0 + d e^{ik\Delta}(u_{-1} + e^{-ik\Delta}u_1) + d e^{-ik\Delta}(u_1 + e^{ik\Delta}u_{-1}),$$

同样可写出 $y_i y_{i+1}$, $y_i y_{i-1}$, $y_i y_{i+2}$, $y_i y_{i-2}$, $\dots$ 的系数方程. 解的一般形式为 $u_n = e^{-ns}$. 若 $\text{Re } s > 0$ (Re 表示实部), 则得到的波很接近涨落波. 但实际上唯一的解为 $s = -\frac{1}{2}k$, 即前面 $\psi_{k/2}^{(1)} \psi_{-k/2}^{(1)}$ 解. 同样对三阶涨落, 四...也可得到类似的结果.

三、考虑压力效应的多变量 Master 方程

在讨论气体化学反应时,压力将驱动粒子由高压的格子向低压格子流动,因而和扩散一样也将引起各阶涨落的空间关联.和文献[2]中的讨论类似,我们将对照在反应扩散方程中引入压力项的过程,在 MME 中引入压力项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\{y_i\}, t) = & \sum_j \left(K_1 y_j - K_2 y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial t} G \\ & + d \sum_j (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial^2}{\partial t \partial y_j} G \\ & + \frac{T}{m\Delta^2} \sum_j (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} G, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 T 是气体温度,假定是空间均匀的,小格 i 的气体压力 $P_i = \frac{T}{\Delta} N_i$.

方程 (16) 的定态解必须满足条件

$$\sum_j (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} G_0 = 0.$$

若仍取 $y_k = \sum_j y_j e^{ikx_j}$, G_0 只与 y_k 有关,则 $k \neq 0$, $f(k) \neq 0$, 因而有 $\frac{\partial}{\partial y_k} G_0 = 0$. 也就是说 G_0 只能与 $y_0 = \sum_j y_j$ 有关,因而即 (5)' 式.

考虑定态上的小扰动,取

$$G = G_0(1 + \phi),$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = & \sum_j [-K_2 y_j + d(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j)] \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t} \phi \\ & + \frac{T}{m\Delta^2} \sum_j (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \phi. \end{aligned} \quad (17)$$

引入傅氏变量 y_k , 取 $\phi = \phi(y_k, t) = \hat{\phi}(y_k) e^{-\lambda_k t}$,

$$\hat{\phi}_k = y_k^{\frac{\lambda_k}{[K_2 + df(k)]\lambda_k - \frac{T}{m\Delta^2} f(k)}}.$$

由各阶涨落有限得到

$$\frac{\lambda_k}{[K_2 + df(k)]\lambda_k - \frac{T}{m\Delta^2} f(k)} = \rho \quad \rho = 1, 2, \dots,$$

色散关系

$$\lambda_k^{(\rho)} = \frac{1}{2} \left\{ \rho [K_2 + df(k)] \pm \left[\rho^2 (K_2 + df)^2 - 4\rho \frac{T}{m\Delta^2} f \right]^{1/2} \right\}. \quad (18)$$

本征函数仍为

$$\phi_k^{(\rho)} \sim y_k^\rho e^{-\lambda_k^{(\rho)} t}. \quad (19)$$

各阶波 ($\rho = 1, 2, \dots$) 的物理含义与以前讨论是一样的. 特别是 $\rho \geq 2$ 波, 仍然描述了两个以上的波在空间独立传播的过程. $\rho = 1$ 与普通声波对应.

由色散关系 (19) 式, 当 k 充分小,

$$\rho(K_2 + df(k)) > 2 \left[\frac{T}{m\Delta^2} \rho f(k) \right]^{1/2},$$

波是纯耗散的. 我们主要考虑 $\frac{T}{m\Delta^2} \rho f(k) \gg (K_2 + df)^2$ 情况,

$$\lambda_k^{(\rho)} \simeq \frac{\rho}{2} (K_2 + df(k)) \pm i \sqrt{\rho} \left(\frac{T}{m\Delta^2} f(k) \right)^{1/2}. \quad (20)$$

由于 $\Delta/\lambda \ll 1$ ($\lambda = 2\pi/k$), $f(k) \simeq k^2\Delta^2$, 因而频率

$$\omega_k^{(\rho)} = \text{Im } \lambda_k^{(\rho)} \simeq \sqrt{\rho} u_0 k, \quad u_0 = \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}$$

为气体声速.

讨论上述解局部密度涨落二次矩的传播 (由二阶波决定)

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_j^2 \rangle &\sim \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \phi \\ &= e^{2ikx_j} e^{i\omega_k^{(2)}t - (K_2 + df(k))t}. \end{aligned}$$

因而传播的相速度为 $\omega_k^{(2)}/2k = \frac{1}{\sqrt{2}} u_0$, 而不是文献 [2] 中涨落波相速 $\sqrt{2} u_0$.

同样也存在多波解.

四、简单讨论

乍一看来, 我们的结果是出乎预料的. 我们从忽略了扩散动力关联效应的广义 Master 方程得到了涨落波谱 [2], MME 仔细考虑了这种关联效应却并不是修正涨落波谱, 而是根本否定了它的存在. 然而从物理上看, 涨落波的存在 (即便它的谱可能与文献 [2] 中得到的结果差别较大) 却是合理的. 因为不仅平均密度的局部变化可以在空间传播 (声波), 涨落分布的局部扰动也可以在空间传播, 这正是涨落波所描述的过程. 我们还知道, 激光在阈值上下除光子数有变化外, 光子分布也由高斯型过渡为泊松型. 同样, 非线性反应体系在临界点附近不仅平均密度会有改变或出现结构, 涨落分布也会有所变化. 涨落分布的突变相应于涨落波的分支现象.

基本的原因在于, MME 将各格子中粒子数的涨落看成是完全独立的, 即 (7) 式中的 N_j, N_{j+1} 是不同的变量. 以二阶涨落波为例:

$$\phi_k \sim \sum_j e^{ikx_j} y_j^2 e^{i\lambda_k t}.$$

代入 (7)' 式中得到

$$\lambda_k \phi_k = - \sum_j e^{ikx_j} \{ 2K_2 y_j^2 - 2dy_j (e^{ik\Delta} y_{j+1} + e^{-ik\Delta} y_{j-1} - 2y_j) \}. \quad (21)$$

如果相邻格子涨落不独立, 在 (21) 式中将等号右方 y_{i+1} , y_{i-1} 近似取成 y_i , 则得到文献 [2] 的结果. 但如果坚持将 (21) 式中不同 y_i 看成完全不同的变量, 如前所述我们只能有一阶波 $y_k = \sum_j y_j e^{ikx_j}$ 以及由之构成的多波解. 也可以直接从 (7)' 式出发, 如果认为 $\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \phi$, $\frac{\partial}{\partial y_{i-1}} \phi$ 与 $\frac{\partial}{\partial y_i} \phi$ 只差一空间移动因子, 而忽略 y_{i+1} , y_{i-1} 与 y_i 的差别, 则在弱不均匀情况 ($k\Delta \sim kl_c \ll 1$) 下, 扩散项可写成 $\sum_j d\Delta^2 \nabla^2 y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \phi$, 再取 $\phi = \prod_i \phi(y_i, x_i, t)$, 则得到文献 [2] 中的广义 Master 方程 ($D = d\Delta^2$), 从而得到所有的涨落波分支. 因此认为化学反应只限于格子内 (N_i, N_{i+1} 是独立变量), 不仅仅是引入了与格子大小有关的化学反应率 ($l_{ch}^{-1} \ll l_c^{-1}$), 而且对机率分布过程带来了本质的变化. 类似于一般对反应扩散方程的讨论, 广义 Master 方程^[2]实际上是讨论由化学反应引起 l_{ch} 范围内粒子数的涨落, 而这些粒子的空间分布 (包括在 l_{ch} 范围内) 则由扩散或压力过程决定. 也就是说, 将密度看成是另一维相空间 (类似于 x), 广义 Master 方程的反应项与扩散项的空间尺度是可以不一样的.

因此, 多变量 Master 方程只在 $l_{ch} \sim l_c \sim \Delta$ 的情况下是适用的. 但对于局部平衡的反应体系 (反应扩散方程适用的情况), 要求 $l_{ch} \gg l_c$, 用 MME 来描述涨落的空间关联看来是不合适的. 因为如果取 $\Delta \sim l_c$, 则得不到体系正确的波谱, 对临界行为的分析当然也就是不可靠的. 如果取 $\Delta \gtrsim l_{ch}$, 固然每个格子中的化学反应可看成是独立的, 而且可以用 Δ^{-1} 为渐近展开小参数^[5], 但扩散项又不合适了. 如何同时讨论不同尺度过程的涨落关联, 将是化学反应统计理论的重要课题.

作者感谢在工作过程中与胡希伟、张澄等同志的有意讨论.

参 考 文 献

- [1] G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in Non-equilibrium System, Wiley-Interscience, New York, (1977).
- [2] 霍裕平, 物理学报, **31** (1982), 355.
- [3] 霍裕平、张澄, 物理学报, **31** (1982), 369.
- [4] C. Van Dan Broeck *et al.*, *Physica A*, 101, (1980), 167.
- [5] M. Malek Mansour *et al.*, Asymptotic Properties of Markovian Master Equations, Preprint.

MULTIVARIATE MASTER EQUATION AND IT'S WAVE SOLUTIONS

CHEN ZHUEN-XION HO YU-PING

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei*)

ABSTRACT

In this article, the wave solutions of multivariate master equation for linear reaction system: $A \rightleftharpoons X$ have been discussed. Except the density waves which is obtainable from the usual reaction diffusion equation and multiwave solutions, it is not possible to obtain any fluctuation wave branch like that given in ref. [2]. We note that, due to the large difference between the spatial scales of chemical reaction and diffusion, it is doubtful to use the multivariate master equation in analysing the critical behaviour of non-linear system.