

混合型光学双稳特性分析

李永贵 张洪钧

(中国科学院物理研究所)

1982 年 1 月 11 日收到

提 要

本文从理论上分析了带有光电反馈的电光调制器所具有的光学双稳特性, 讨论了双稳工作时对阶跃输入的“临界延迟”效应。

一、引 言

自从 1977 年 Smith 等人^[1]提出混合型光学双稳装置以来, 文献 [2—6] 先后介绍了利用正交偏光镜下的电光调制器、双光束干涉仪、各向异性界面反射器等, 取代 Smith 的 F-P 标准具, 同样获得光学双稳性的实验结果。后来, 文献 [7, 8] 又报道了正交偏光镜光学双稳装置的某些稳态和瞬态特性。但这些文献都只是讨论具体实验装置的工作原理和实验结果。本文试图从更普遍的角度, 对这类混合型光学双稳装置的某些物理特性从理论上进行一般分析。

二、物理模型及动态方程

一个线性的对时间 t 为平移不变的系统, 其输出 $x(t)$ 可用下述卷积的形式给出:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (1)$$

其中 $g(t)$ 表示系统的脉冲响应, $u(t)$ 为系统的输入。若 $g(t) = be^{-at}$, a, b 为系统常数, 初始条件 $x|_{t=0} = x_0$, 则 (1) 式可改写如下:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t be^{-a(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \quad (2)$$

由 (2) 式立即得到

$$\dot{x}(t) = -a(x(t) - x_0) + bu(t). \quad (3)$$

容易看出, a 是系统的损耗率, b/a 是稳态时输入到输出的传输系数。

混合型光学双稳装置一般由 (相干或非相干型) 光调制器 M 、光束分离器 P 、光电检测器 D 、反馈放大器 F 所组成, 如图 1 所示。单独地看待 M, D, F , 其输出输入间各具有线性的关系 (当调制器 M 的控制端参量 φ 固定时, M 的输出输入间也是线性的), 并各具有不同的时间常数。图 1 中, 强度为 u 的输入光线进入调制器 M , 输出光的一部分由 P 取

样,经 D 光电转换后由 F 放大,反馈回去再控制调制器 M 的控制参量 φ .

将 M, P 所组成的系统称为“传输系统”, D, F 以及 F 到 φ 间的转换元件所组成的系统称“反馈系统”.一般情况下,可把传输和反馈系统看作具有线性与对时间平移不变的特点,按照方程(3),该两系统可用下述方程描述:

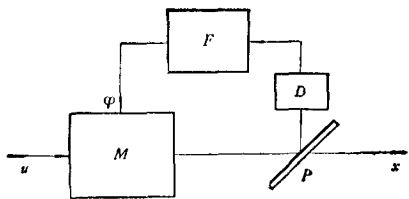


图 1

$$\tau_1 \dot{x} = -x + T(\varphi)u, \quad (4)$$

$$\tau_2 \dot{\varphi} = -(\varphi - \varphi_0) + kx, \quad (5)$$

其中 x, u 为混合系统的输出和输入, τ_1, τ_2 分别为传输和反馈系统的时间常数, k 为反馈系统的传输系数(取 $k > 0$), $T(\varphi)$ 为光调制器 M 的稳态透过率函数, φ_0 为光调制器的初始偏置. 为简单起见, 记 $ku \rightarrow u, kx \rightarrow x$ 为约化输入和输出, 则(4), (5)式变为

$$\tau_1 \dot{x} = -x + T(\varphi)u, \quad (6)$$

$$\tau_2 \dot{\varphi} = \varphi_0 - \varphi + x. \quad (7)$$

该方程组描述了混合型光学双稳装置的动态特性.

三、稳定性分析及光学双稳特性

平衡态时, 由(6), (7)式得到

$$x = T(\varphi)u, \quad (8)$$

$$\varphi = \varphi_0 + x \quad (9)$$

或者

$$u = \frac{x}{T(\varphi)}. \quad (10)$$

(10)式中不管 $T(\varphi)$ 是何种函数形式, u 永远是 x 的单值函数, 但是, x 可以是 u 的单值函数, 也可以是 u 的多值函数, 取决于 $T(\varphi)$ 的形式和 φ_0 的选取. 典型的多值情形如图2所示.

可以证明, 在图2所示的平衡态曲线上, 状态点不全是稳定的平衡态点. 为讨论稳定性, 将方程(6), (7)在平衡态点处展开, 取线性项得到

$$\Delta \dot{x} = -\frac{1}{\tau_1} \Delta x + \frac{1}{\tau_1} T'_{\varphi}(\varphi)u \Delta \varphi, \quad (11)$$

$$\Delta \dot{\varphi} = \frac{1}{\tau_2} \Delta x - \frac{1}{\tau_2} \Delta \varphi. \quad (12)$$

其特征方程的根为

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2}\right)^2 - \frac{1}{\tau_1\tau_2}(1 - T'_{\varphi}(\varphi)u)}. \quad (13)$$

设微分方程组(11), (12)具有如下形式的解:

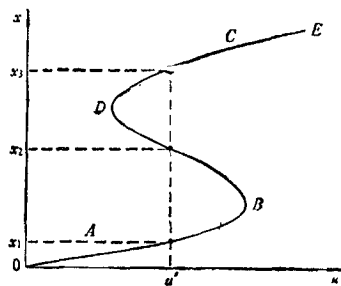


图 2 典型的平衡态输出输入曲线

$$\Delta x = c_1 r_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 r_2 e^{\lambda_- t},$$

$$\Delta \varphi = c_1 s_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 s_2 e^{\lambda_- t},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 显然, 只要有一个 λ 的实部大于零, 则系统对扰动是不稳定的. 反之, 如果 λ_+, λ_- 的实部都小于零, 则系统对扰动是稳定的.

由 (13) 式, $\lambda_+ > 0$ 对应着

$$1 - T'_\varphi(\varphi)u < 0. \quad (14)$$

由 (8), (9), (10) 式得到

$$\frac{dx}{du} = \frac{T(\varphi)}{1 - T'_\varphi(\varphi)u}. \quad (15)$$

比较 (14), (15) 式, 不稳定条件可写成

$$\left. \frac{dx}{du} \right|_{x, \varphi} < 0. \quad (16)$$

而 $\lambda_\pm < 0$ 对应着 $\left. \frac{dx}{du} \right|_{x, \varphi} > 0$. 可见在平衡态输出输入曲线上, 斜率大于零的状态点是稳定的, 小于零的状态点是不稳定的. 斜率为无穷大的状态点是稳定与非稳定的分界点, 称为“临界点”.

稳定性分析表明, 图 2 中 BD 段上的状态点是不稳定的. 因此, 对应同一个输入 $u = u'$, 有 x_1, x_3 两个稳定的输出状态, 不稳定状态 x_2 在实验中是观察不到的.

BD 段的不稳定性决定了当 u 从零逐渐增大时, 输出 x 将沿 $OABCE$ 的方向变化, 当 u 再减小到零时, x 又沿 $ECD AO$ 的方向变化, 产生滞后迴线. 在 B 点输出向上跳跃, 在 D 点输出向下跳跃. 当输入满足 $u^- < u < u^+$ 时, 系统有光学双稳出现. 如图 3 所示.

由于 λ 是平衡态曲线上状态点的函数, 所以, 若定义 $\tau = 1/|\operatorname{Re} \lambda|$ 为时间常数, 则不同的状态点对应不同的时间常数.

由 (13), (15) 式看出, $\frac{dx}{du}$ 愈大, $|\operatorname{Re} \lambda|$ 愈小, τ 愈大. 该事实说明双稳曲线的斜率不仅反映系统在该状态点处稳定的程度, 而且也反映系统处在该状态时对时间响应的快慢. 在“临界点”处, 响应时间最慢. 这是导致后面所述的“临界延迟”效应的原因.

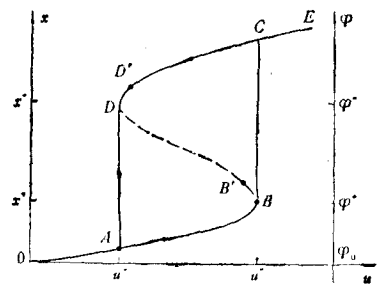


图 3

四、对 $T(\varphi)$ 曲线的要求

由上述分析, 要得到光双稳输出, 必须有图 2 所示“S”型的平衡态曲线, 或者说 $x-u$ 曲线上必须有负斜率状态点的存在. 考虑物理上的限制, 在有限的输入光强范围内, 若 $\frac{dx}{du} > 0$ (由 (15) 式知, 此时 $T'_\varphi(\varphi) < 1/u$) 总是成立, x 是 u 的单值函数, 不可能产生双

稳;若对于给定的 u , $\frac{dx}{du} > 0$ 和 $\frac{dx}{du} < 0$ 都存在, x 一定是 u 的多值函数, 有可能出现双稳. 由此知, 产生双稳除输入 u 要有足够的幅度外, $T(\varphi)$ 必须满足一定的函数形式.

按照平衡态方程 (9), 将 φ 与 x 的对应关系画出 (如图 3 右边的纵坐标), 可以看到, 在双稳曲线上, 随 φ 的增加, $\frac{dx}{du}$ (或 $T'_\varphi(\varphi)$) 经历两次符号的变化, 符号变化时的 φ 对应临界点处的 φ^+ , φ^- . 现考察 $T'_\varphi(\varphi)$ 随 φ 变化的情况: 注意到在 B 点有 $T'_\varphi(\varphi^+) = 1/u^+$, 在 D 点有 $T'_\varphi(\varphi^-) = 1/u^-$. 对 BD 段上 B 点一个小邻域内的 B' 点, 该点的状态显然满足 $T'_\varphi(\varphi) > (1/u) > (1/u^+)$, 因为在 BD 段上存在 $T'_\varphi(\varphi) > 1/u$ (即 $\frac{dx}{du} < 0$); 对 DC 段上 D 点一个小邻域内的 D' 点, 该点满足 $T'_\varphi(\varphi) < (1/u) < (1/u^-)$, 这同样是因为在 DC 段上存在 $T'_\varphi(\varphi) < 1/u$ (即 $\frac{dx}{du} > 0$). $T'_\varphi(\varphi)$ 随 φ 的上述变化, 如图 4 所示. 假定 $T'_\varphi(\varphi)$ 曲线是光滑连续的, 考虑到平衡态双稳曲线的“S”形状, 在 φ^+ 与 φ^- 间必存在一点 φ_ξ , 使得 $T''_\varphi(\varphi_\xi) = 0$. 当 $\varphi < \varphi_\xi$ 时, $T''_\varphi(\varphi) > 0$, 对应 $T(\varphi)$ 曲线的凹弧段. 当 $\varphi > \varphi_\xi$ 时, $T''_\varphi(\varphi) < 0$, 对应 $T(\varphi)$ 曲线的凸弧段. $T''_\varphi(\varphi_\xi) = 0$ 表明产生光学双稳的必要条件是光调制器的透过率函数必须有拐点存在. 这样, 当输入 u 较小时, 系统工作在 $T(\varphi)$ 曲线的凹段上, 当 u 较大时, 工作在凸段上.

反过来, 若调制器的透过率曲线有拐点存在, 那末在 $T(\varphi)$ 曲线的凹段上可任选一点作为 $B(\varphi^+, T(\varphi^+))$ 点, 该点应满足平衡态方程 (8), (9) 及 $\frac{dx}{du} = 0$ 的临界点条件, 即

$$\varphi^+ = \varphi_0 + T(\varphi^+)u^+, \quad (17)$$

$$T'_\varphi(\varphi^+)u^+ - 1 = 0. \quad (18)$$

联立求解上式得

$$\varphi_0 = \varphi^+ - \frac{T(\varphi^+)}{T'_\varphi(\varphi^+)}. \quad (19)$$

只要以 φ_0 为静态偏置点, 就会得到以 φ^+ 为临界点的光学双稳曲线. φ_0 确定后, 另一个临界点 D 的位置由下式求得

$$\varphi^- = \varphi_0 + \frac{T(\varphi^-)}{T'_\varphi(\varphi^-)}. \quad (20)$$

可以证明, D 点位于 $T(\varphi)$ 曲线的凸段上.

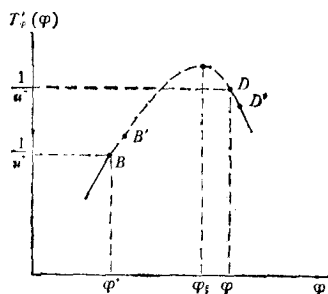


图 4

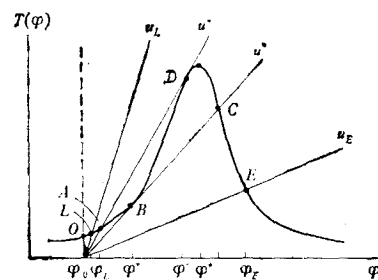


图 5 双稳特性的图解分析

事实上,对 $T(\varphi)$ 函数的要求,从下述的图解分析中可清楚的了解. 改写 (8), (9) 式为

$$T = T(\varphi), \quad (21)$$

$$T = \frac{1}{u} (\varphi - \varphi_0). \quad (22)$$

假定 $T(\varphi)$ 有前述的曲线特征,如图 5,而方程 (22) 是以 $1/u$ 为斜率的直线方程,则系统工作点应是曲线和直线的交点. 输入 u 小时,直线斜率很大,系统工作在 L 点,随 u 的增加,工作点连续向 A, B 点滑动. 到达 B 后, u 的继续增加使工作点上跳到 C 点,之后沿 CE 滑动;当 u 再逐渐减小时,工作点又沿 ECD 连续滑动,到达 D 后, u 的减小使工作点下跳到 A 点,然后沿 AL 回到 O 点. 工作点随 u 的这种变化导致双稳系统输出与输入间有如图 3 所示的滞后迴线.

称“临界点” $B(\varphi^+, x^+, u^+)$ 为“开启点”, $D(\varphi^-, x^-, u^-)$ 为“关闭点”. $T(\varphi)$ 的函数形式确定后,该两点的位置唯一由初始偏置 φ_0 确定.

当 B 与 D 点重合时,双稳消失. 很容易求得此时所对应的偏置点 φ_0 为

$$\varphi_0 = \Phi_0 \equiv \varphi_\xi - \frac{T(\varphi_\xi)}{T'_\varphi(\varphi_\xi)}, \quad (23)$$

其中 φ_ξ 满足 $T''_\varphi(\varphi_\xi) = 0$. 称 Φ_0 为产生双稳与否的临界偏置点.

五、阶跃响应及“临界延迟”效应

同一般非线性问题中常出现的情况一样,光学双稳装置对阶跃脉冲的响应与阶跃脉冲的幅度有关^[9,10].

为简单起见,取 $\tau_1 \ll \tau_2$ (实验上的情况往往如此),方程 (4), (5) 化为

$$x = T(\varphi)u, \quad (24)$$

$$\tau_2 \dot{\varphi} = \varphi_0 - \varphi + T(\varphi)u. \quad (25)$$

现考虑幅度 $u > u^+$ 和 $u < u^-$ 两种不同阶跃情况下的输出响应,并假定系统已经处在双稳工作状态 ($\varphi_0 < \Phi_0$).

1. 开启延迟

“开启延迟”是指输入阶跃幅度大于开启点所对应的输入幅度 u^+ 时,系统对输入响应的延迟现象. 设 $t = 0$ 时, $\varphi = \varphi_0$, $u = u_E I(t)$ (其中 $u_E > u^+$, $I(t)$ 是单位阶跃函数); $t = \infty$ 时, $\varphi = \varphi_E > \varphi^+$.

先考察 x 随 t 变化的特点. 由 (24), (25) 式, u 恒定时, $x(t)$ 的变化由 $T(\varphi)$ 和 $\dot{\varphi}$ 决定. 从图 5 看出,在 $u_E I(t)$ 作用下 φ 要从初态 φ_0 变化到终态 φ_E . 在 φ 从 φ_0 到 φ^+ 变化的过程中, $T(\varphi)$ 很小,输出 x 也很小,从 (25) 式知,在这期间 $\dot{\varphi}$ 很小, $\varphi(t)$ 变化很慢;当 φ 超过 φ^+ 时, $T(\varphi)$ 急剧增加, x 也急剧增加,从 (25) 式知,这时 $\varphi(t)$ 变化很快;当 $\varphi = \varphi^*$ 时, $T(\varphi)$ 达最大值,输出达到峰值;此后, φ 向稳态值 φ_E 过渡, $T(\varphi)$ 减小, x 也减小到稳态值 x_E . 由此看到,双稳系统在向稳态趋近的开初阶段 ($\varphi < \varphi^+$),由于

$T(\varphi)$ 小, $\dot{\varphi}$ 小, 输出 x 以很低的幅度维持一段相当的时间后才会迅速达到峰值, 而且, 在开启点 φ^+ 处, 从 (17), (25) 式看出 $\dot{\varphi} \rightarrow 0$, 这使得输出 x 在迅速增加之前以几乎为零的变化速率维持在低输出状态, 由此导致了对阶跃输入的“临界延迟”效应. 在开启点产生的这种响应波形定性如图 6 所示.

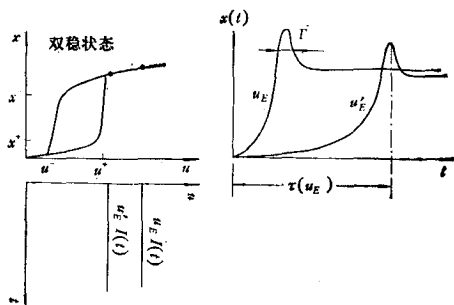


图 6 开启点处的“临界延迟”

定义输出 x 从零变化到最大值所用的时间 τ 为开启延迟时间是方便的, 该时间间隔对应着 φ 从 φ_0 变化到 φ^* . 由 (25) 式得到

$$\tau(u_E) = \tau_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi^*} \frac{d\varphi}{\varphi_0 - \varphi + T(\varphi)u_E}. \quad (26)$$

显然, 当 $u_E \rightarrow u^+$ 时, 在积分区间内的 $\varphi = \varphi^+$ 点, 被积函数的分母为零, $\tau(u_E) \rightarrow \infty$.

$\tau(u_E)$ 也可以从近似公式中求得. 这时仅需知道系统初始点、临界点处的 φ 及 $T(\varphi)$

值. 方法是用 $[\varphi_0, T(\varphi_0)]$ 与 $[\varphi^+, T(\varphi^+)]$ 及 $[\varphi^+, T(\varphi^+)]$ 与 $[\varphi^-, T(\varphi^-)]$ 间的直线方程代替 (26) 式中的 $T(\varphi)$, 分段积分后得如下结果:

$$\begin{aligned} \tau(u_E) = & \frac{\tau_2}{k_1 u_E - 1} \ln \left| \frac{A}{A + (k_1 u_E - 1)(\varphi_0 - \varphi^+)} \right| \\ & + \frac{\tau_2}{k_2 u_E - 1} \ln \left| \frac{A + (k_2 u_E - 1)(\varphi^- - \varphi^+)}{A} \right|, \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $A = \varphi_0 - \varphi^+ + T(\varphi^+)u_E$, $k_1 = \frac{T(\varphi_0) - T(\varphi^+)}{\varphi_0 - \varphi^+}$ 和 $k_2 = \frac{T(\varphi^+) - T(\varphi^-)}{\varphi^+ - \varphi^-}$ 分别为上述两直线的斜率.

在“开启延迟”的波形中, 还存在着“过冲”现象, 它来源于状态在向稳态值趋近的过程中, 先通过透过率曲线的峰值点, 而后再趋近于较小的稳态值. “过冲”峰值 $x^* = T(\varphi^*)u_E$. 定义“过冲”波形的半宽度为 $x = \frac{1}{2}(x^* - x_E)$ 时对应的时间间隔 Γ , 则 Γ 与 $T(\varphi)$ 及 $\dot{\varphi}$ 有关. 由 (25) 式, τ_2 愈小, u_E 愈大, 透过率曲线 $T(\varphi)$ 的峰愈锐, Γ 愈小.

2. 关闭延迟

“关闭延迟”是指系统原已处于高输出态时(此时输入已保持一定的幅度)对负阶跃输入响应的延迟现象. 同“开启延迟”类似, 如果负阶跃以后的光输入幅度(负阶跃并不使光输入幅度一下子变为零, 而仍保留有一定值)使保留的光输入幅度 u 愈接近关闭点所对应的输入幅度 u^- , 系统输出波形后沿所拖的时间愈长.

设 $t = 0^-$ 时, $u = u_E$, φ 对应高输出态的 φ_E , 如图 5. 此时 $x_E = T(\varphi_E)u_E$; 当 $t = 0^+$ 时, 一个负阶跃脉冲输入, 使系统输入幅度由

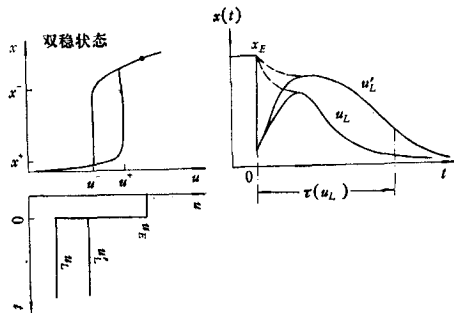


图 7 关闭点处的“临界延迟”效应

u_E 变为 $u_L (u_L < u^-)$, 但此时 $\varphi = \varphi_E$; $t \rightarrow \infty$ 时, $\varphi \rightarrow \varphi_L$.

同“开启延迟”的分析一样, x 的变化决定于 $T(\varphi)$ 和 $\dot{\varphi}$ 的值. 由图 5, 当 φ 从 φ_E 变化到 φ^+ 过程中, 输出为高状态; 从 φ^+ 变化到 φ_L 过程中, 输出为低状态; “关闭延迟”表现为输出从高状态向低状态的过渡. φ 从 φ^- 变化到 φ^+ 所用时间愈长, 输出波形后沿所拖时间愈长. 事实上, 当 $u_L \rightarrow u^-$ 时, 在关闭点 $\varphi = \varphi^-$ 处, 由 (8), (9), (25) 式容易看出 $\dot{\varphi} \rightarrow 0$, 这使得输出在 $x = T(\varphi^-)u_L$ 附近维持相当一段时间后才迅速趋近于 (几乎为零的) 稳态值.

定义 φ 从 φ_E 变化到 φ^+ 所用时间为“关闭延迟”时间 τ , 则 τ 是 u_L 的函数,

$$\tau(u_L) = \tau_2 \int_{\varphi_E}^{\varphi^+} \frac{d\varphi}{\varphi_0 - \varphi + T(\varphi)u_L}. \quad (28)$$

同样取 $[\varphi^+, T(\varphi^+)]$ 与 $[\varphi^-, T(\varphi^-)]$ 间的直线方程及 $[\varphi^-, T(\varphi^-)]$ 与 $[\varphi_E, T(\varphi_E)]$ 间的直线方程代替上式中的 $T(\varphi)$, 积分后得到 $\tau(u_L)$ 的近似公式

$$\begin{aligned} \tau(u_L) = & \frac{\tau_2}{k_3 u_L - 1} \ln \left| \frac{B + (k_3 u_L - 1)(\varphi_E - \varphi^-)}{B} \right| \\ & + \frac{\tau_2}{k_2 u_L - 1} \ln \left| \frac{B + (k_2 u_L - 1)(\varphi^- - \varphi^+)}{B} \right|, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $B = \varphi_0 - \varphi^- + T(\varphi^-)u_L$, $k_3 = \frac{T(\varphi_E) - T(\varphi^-)}{\varphi_E - \varphi^-}$.

在 (28), (29) 式中, 当 $u_L \rightarrow u^-$ 时, $\tau(u_L)$ 都趋于无穷大. 图 7 示出了关闭点处输出波形后沿的延迟情况.

在开启点和关闭点, 输入阶跃幅度愈接近这些“临界点”所对应的输入幅度时, 输出波形延迟时间愈长的现象称“临界延迟”效应. 该效应一方面来源于 $T(\varphi)$ 的非线性, 另一方面正如稳定性分析一节所指出的, 它产生于系统状态点愈接近于临界点, 系统的时间响应愈慢的缘故. 将光双稳装置用作光开关、逻辑元件或光学延时器时, 必须注意这个问题.

六、结 论

透过率曲线具有拐点的相干或非相干光调制器, 可以通过电学反馈构成混合型光学双稳装置. 在适当偏置的情况下, 稳态时有光学双稳特性, 瞬态时, 对阶跃型光脉冲输入有“临界延迟”效应. 上述分析与实验结果是吻合的^[7,8,11].

参 考 文 献

- [1] P. W. Smith, et al., *Appl. Phys. Lett.*, **30**(1977), 280.
- [2] E. Garmire, et al., *Appl. Phys. Lett.*, **32**(1978), 320.
- [3] A. Schnapper, et al., *Opt. Commun.*, **29**(1979), 364.
- [4] P. W. Smith, et al., *Appl. Phys. Lett.*, **35**(1979), 846.
- [5] K. H. Levin and C. C. Tang, *Appl. Phys. Lett.*, **34**(1979), 376.
- [6] Cros, et al., *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-14**(1978), 577.
- [7] E. Garmire, *Appl. Phys. Lett.*, **34**(1979), 374.

- [8] 张洪钧等, 物理学报, **30** (1981), 810.
[9] J. J. 斯托克, 力学及电学系统中的非线性振动.
[10] R. Landaner and J. W. F. Woo, in "Synergetics", edited by H. Haken, Teubner, Stuttgart, (1973).
[11] 李永贵等, 物理学报, **31** (1982), 466.

AN ANALYSIS ON CHARACTERISTIC OF THE HYBRID OPTICAL BISTABILITY

LI YUNG-GUI ZHANG HONG-JUN
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The characteristic of optical bistability is analysed theoretically for the photo-electric modulator with a feedback circuit. The effect of the "critical slowing down" for a step input as it operates in the bistable mode is discussed.