第32卷 第3期 物理学报 Vol. 32, No. 3
1983年3月 ACTA PHYSICA SINICA Mar., 1983

等离子体波-粒子非线性作用的有质动力和自生磁场效应

贺贤土
(中国科学院原子能研究所)

1982年2月13日收到

提　　要

本文从 Vlasov-Maxwell 方程组出发,用自洽场方法首先建立了低频振荡粒子分布函数、密度与高频电场、低频磁场在 Fourier 表象中的耦合关系,然后对低频线性介电函数作各种近似展开,在时空表象中得到了包括磁场效应、有质动力和 Landau 阻尼的一套非线性作用方程组最后还给出了 Lagrangian 密度和守恒量,并简单地讨论了磁场能否促进三维 Soliton 形成问题.

一、引　　言

本文是文献[1]的继续.在文献[1]中,我们只考虑了低频场的离子声波效应,从而高频场方程中的非线性高频电流内只包含了高频场力与粒子低频振荡的作用部分;至于低频场力与粒子高频振荡的相互作用项,由于因子 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}/\omega_{pe}\ll 1$ 被略去,因而高频场的变化只取决于通常的有质动力效应.但是当低频场力包含横波时,正如本文所表明的那样,其所激发的非线性电流的有旋分量可以导致等离子体中磁场的产生.这种自生磁场的作用虽然包含有 β_e^2 因子,但在电子温度较高的系统中,它的效应与有质动力相比是不能忽略的.

早在1971年时,激光等离子体中自生磁场效应就被发现[2], Chase 等人[3]和 Stamper, Tidman[4] 从宏观磁流体力学方程出发研究了这个问题,他们指出:当粒子流体密度和温度的梯度方向不平行时,或者有较大的辐射压时都可产生强磁场.但是,实际上等离子体中自生强磁场还可由我们这里讨论的两个或两个以上的强高频电场不平行传播的非线性无碰撞作用来产生. 这样的高频场非线性拍频成为低频时就可导致低频横电场的激发,从而由感应定律就导致低频磁场的形成.近几年来,由于激光等离子体、天体等离子体工作的发展以及与它们有关的强湍流理论的研究,这种自生磁场效应开始引起注意,Kono 等人[5]就计算过这种磁场的形式.最近 Haar 和 Tsytovich[6] 又进一步在双流体力学理论框架下把它应用于天体等离子体由调制不稳定性激发的强湍流研究中.本文的目的便是从 Vlasov 方程和电磁场的 Maxwell 方程组出发,利用我们在文献[1]中发展的方法,在二级场近似下,仔细地导得包含有质动力和上述自生磁场效应的波和粒子相互作用方程组.我们在文献[1]中也已提到,从粒子速度分布函数耦合电磁场的自洽场方法去导得上述方

程组是十分必要的，这不仅是在推导中考虑了细致的微观过程，所作的近似要比流体力学方法明确得多，而且可以确切得到各种近似下包括 Landau 阻尼效应的方程组形式．最后我们还将给出包含自生磁场效应的无阻尼方程组的拉氏密度和守恒量．

二、Fourier 表象中粒子与波的非线性耦合关系

把粒子分布函数、电磁场量和非线性电流分成高频和低频振荡两部分，引入 F 变换：$(k)=\int(\boldsymbol{x},t)e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x\,dt$，这里 $k\equiv\{\boldsymbol{k},\omega\}$，从 Vlasov-Maxwell 方程组就得到 F 表象中诸量表达式如下：

粒子高频分布：

$$
\begin{aligned}
f_\alpha(k)\equiv f_\alpha(k,\boldsymbol{v})=\frac{e_\alpha}{im_\alpha(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}\Big\{&\boldsymbol{G}_h(k)\cdot\frac{\partial F'_{0\alpha}}{\partial\boldsymbol{v}}\\
&+\int\boldsymbol{G}_h(k_1)\cdot\frac{\partial\delta F_\alpha(q)}{\partial\boldsymbol{v}}\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}\\
&+\int\boldsymbol{G}_d(q)\cdot\frac{\partial f_\alpha(k_1)}{\partial\boldsymbol{v}}\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}\Big\}.
\end{aligned}\tag{1}
$$

与文献[1]不一样，在(1)式中我们保留了低频场力与粒子高频振荡作用的第三项，以后将会看到它就是我们现在感兴趣的高频电流激发低频磁场有关的项．

粒子低频分布扰动部分：

$$
\begin{aligned}
\delta F_\alpha(q)\equiv\delta F_\alpha(q,\boldsymbol{v})=\frac{e_\alpha}{im_\alpha(\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})}\Big\{&\boldsymbol{G}_d(q)\cdot\frac{\partial F'_{0\alpha}}{\partial\boldsymbol{v}}\\
&+\int_{(d)}\boldsymbol{G}_h(k_1)\cdot\frac{\partial f_\alpha(k_2)}{\partial\boldsymbol{v}}\delta^4(q-k_1-k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}\Big\}.
\end{aligned}\tag{2}
$$

我们只感兴趣频率接近等离子体频率的高频场拍频作用和二级场拍频效应，所以(1)式中略去了高频场向更高频的拍频作用项，(2)式中略去了两个低频场向更低频拍频作用项．(1)，(2)式中积分号 $\int_{(d)}$ 表示积分只作用于两个高频场向低频波拍频过程，脚标 "h" 和 "d" 分别为高频、低频记号．其余表示：$dk\equiv d^3k\,d\omega$，$\delta^4(k)=\delta(\omega)\delta^3(\boldsymbol{k})$，$F'_{0\alpha}=n_0F_{0\alpha}(\boldsymbol{v})$，以后 $F_{0\alpha}$ 取为 Maxwell 分布，满足 $\int F_{0\alpha}(\boldsymbol{v})d^3v=1$，$n_0=n_{0\alpha}$，$\alpha=i,e$．(1)，(2)式中低频场力

$$
\boldsymbol{G}_d(q)=\sum_{\sigma=l,t}\boldsymbol{e}^{\sigma\prime}_{\boldsymbol{q}}E^\sigma_d(q).\tag{3}
$$

这里 $\sigma=l$（纵波），$\sigma=t$（横波）；$E^\sigma_d(q)=\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{E}^\sigma_d(q)$ 为 σ 波低频电场标量强度，对横波 $\boldsymbol{E}^t_d$ 已作了两个偏振方向求和；$\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}$ 为单位偏振矢量，$\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}=1$，我们约定 $\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{e}^\sigma_{-\boldsymbol{q}}$，$E^\sigma_d(-q)=-E^\sigma_d(q)^*$，"$*$" 表示复数共轭．(3) 式中

$$
\boldsymbol{e}^{\sigma\prime}_{\boldsymbol{q}}\equiv\left(1-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}{\Omega}\right)\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}+\frac{\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{v}}{\Omega}\boldsymbol{q}.\tag{4}
$$

显然 $\boldsymbol{e}^{\sigma\prime}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}^\sigma_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{v}$．当磁场不存在时，$\boldsymbol{G}_d$ 就化为通常的 Poisson 场力．关于高频场力

$\boldsymbol{G}_h(k)$ 有类似于 (3)，(4) 式的形式，这里不再说明.

高频和低频标量场 $E_h(k)$ 和 $E_d(q)$ 分别满足方程

$$\epsilon_h^\sigma(k)E_h^\sigma(k_1) = -\frac{4\pi}{\omega}\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha}\int \frac{\boldsymbol{e_k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\left[\sum_{\sigma_1}\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial\delta F_\alpha(q)}{\partial\boldsymbol{v}}E_h^{\sigma_1}(k_1) + \sum_{\sigma_d}\boldsymbol{e}_d'\cdot\frac{\partial f_\alpha(k_1)}{\partial\boldsymbol{v}}E_d^{\sigma_d}(q)\right]\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}d^3v. \tag{5}$$

$$\epsilon_d^\sigma(q)E_d^\sigma(q) = -\frac{4\pi}{\Omega}\sum_{\alpha\sigma_1}\frac{e_\alpha^2}{m_\alpha}\int_{(d)}\frac{\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{v}}{\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial f_\alpha(k_2)}{\partial\boldsymbol{v}} \times E_h^{\sigma_1}(k_1)\delta^4(q-k_1-k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}d^3v, \tag{6}$$

其中 $\epsilon_h^\sigma(k)$，$\epsilon_d^\sigma(q)$ 分别为高频和低频线性介电函数；因子 $(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}$ 在速度积分时一律指 $(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i0_+)^{-1}$ 形式，积分线路沿实轴上岸向下绕过极点；对于因子 $(\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}$ 也同样. 为了简便，(5)，(6)式还应用了简化表示 $\boldsymbol{e}_1 \equiv \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1}^{\sigma_1}$，$\boldsymbol{e}_d \equiv \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}}^{\sigma}$，以下亦同样.

现在以 (1) 式中 $f_\alpha(k_2)$ 代入 (6) 式，取到二级场并略去离子对非线性电流的贡献，得

$$E_d^{\sigma_d}(q) = \frac{\omega_{pe}^2 e}{im_e}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\int_{(d)}\frac{H_e^{\sigma_d\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)}{\Omega\epsilon_d^{\sigma_d}(q)}E_h^{\sigma_1}(k_1)E_h^{\sigma_2}(k_2)\delta^4(q-k_1-k_2) \times\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}. \tag{7}$$

这里 $\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n_0e^2}{m_e}\right)^{1/2}$ 为电子等离子体频率而 (7) 式中激发非线性电流跃迁矩阵元

$$H_\alpha^{\sigma_d\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2) \equiv \frac{1}{2}\int\frac{\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{v}}{\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}\left[\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{e}_2'\cdot\frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\omega_2 - \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}} + 1\longleftrightarrow 2\right]d^3v. \tag{8}$$

上式对脚标 1，2 对称，在 $(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})_{1,2} = 0$ 无奇点条件下，无论 σ_d，σ_1，σ_2 为纵波和横波均可证明有下列性质：

$$\frac{1}{\Omega}H_\alpha^{\sigma_d\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2) = \frac{1}{\omega_2}H_\alpha^{\sigma_2\sigma_d\sigma_1}(k_2,q,-k_1)\quad \alpha = i, e. \tag{9}$$

从 (2) 和 (7) 式可见，低频场和粒子低频振荡分布函数最低阶为二级高频场效应.

注意到我们只感兴趣非线性拍频效应，高频波的线性 Landau 阻尼自然可略去，于是这部分迴路积分只保留了主值，所以无奇点的关系式 (9) 在以下讨论中总是能很好适用. 同时也由于我们研究的是非线性效应，高频波主值中 Doppler 频移部分可以取到 $o(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}/\omega)$ 项. 经这样考虑后，上述关系式可以明显地简化.

对 $\sigma = t$，

$$2H_e^{\sigma_2 l\sigma_1}(k_2,q,-k_1) = \int\frac{\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{v}}{\omega_2 - \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}}\left[\boldsymbol{e}_d^{l\prime}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\omega_1 - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{e}_d^{l\prime}\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}\right]d^3v$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2\Omega}\int\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{e}_d^l(\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{e}_d^l\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}]\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_1\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}d^3v$$
$$+ \frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{\omega_2\Omega}\int\left[(\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_d^l\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{e}_d^l\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}\right]$$

$$\times(\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}d^3v+o\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right)_{1,2}. \tag{10}$$

因为

$$\int\frac{\boldsymbol{e}_d^t\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}\cdot\dfrac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v=\int\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_d^t\cdot\dfrac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v=\Omega\int\frac{\boldsymbol{e}_d^t\cdot\dfrac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v=0.$$

这样，(10) 式中第二个等号右端只剩下第一项，即有

$$2H_e^{\sigma_2 t\sigma_1}(k_2,q,-k_1)=\frac{1}{\omega_1\omega_2\Omega}\boldsymbol{e}_d^t\cdot(\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2))+o\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right)_{1,2}. \tag{11}$$

对 $\sigma=l$，文献 [1] 给出了

$$2H_e^{\sigma_2 l\sigma_1}(k_2,q,-k_1)=\frac{|\boldsymbol{q}|}{\omega_{pe}^2\omega_2}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)[\epsilon_e^l(q)-1]+o\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right)_{1,2}. \tag{12}$$

利用 (11),(12) 式可以得到低频场的进一步表达式．注意到我们只研究两个高频场向低频场的拍频过程，所以求和号 $\sum\limits_{\sigma_1\sigma_2}$ 只有两种组合，于是 (6) 式两边乘上 $\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{e}_d$ 后，对 $\sigma_d=t$，

$$\boldsymbol{E}_d^t(q)=\frac{e}{im_e\omega_{pe}\Omega\epsilon_d^t(q)}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int[\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)\times\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*)]$$

$$\times\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}, \tag{13}$$

其中 $\sigma^\pm$ 分别表示四度动量为 $\pm k$ 的波，

$$\epsilon_d^t(q)=1-\frac{c^2q^2}{\Omega^2}+\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega}\int\frac{\boldsymbol{e}_d^t\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_d^{t'}\cdot\dfrac{\partial F_{0\alpha}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v$$

$$=1-\frac{c^2q^2}{\Omega^2}+\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega^2}\zeta_\alpha Z(\zeta_\alpha). \tag{14}$$

这里 $\zeta_\alpha=\dfrac{\Omega}{\sqrt{2}qv_{T_\alpha}}$，$v_{T_\alpha}$ 为粒子热速度，c 为光速，

$$Z(\zeta_\alpha)^{[7]}=\begin{cases}-2\zeta_\alpha+\dfrac{4}{3}\zeta_\alpha^3\cdots+i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_\alpha^2} & \text{对 } |\zeta_\alpha|\ll1,\\[2ex] -\dfrac{1}{\zeta_\alpha}-\dfrac{1}{2\zeta_\alpha^3}-\cdots & \text{对 } |\zeta_\alpha|\gg1.\end{cases} \tag{15}$$

对 $\sigma_d=l$，

$$\boldsymbol{E}_d^l(q)=\frac{(\epsilon_e^l(q)-1)}{\epsilon_d^l(q)}\frac{e}{im_e\omega_{pe}^2}\boldsymbol{q}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)\cdot\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*$$

$$\times\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}, \tag{16}$$

其中

$$\epsilon_{\alpha}^{l}(q) = 1 + \frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{|\boldsymbol{q}|}\int \frac{\boldsymbol{e}_{d}^{l}\cdot\dfrac{\partial F_{0\alpha}}{\partial \boldsymbol{v}}}{\Omega - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}} d^{3}v, \tag{17}$$

$$\epsilon_{d}^{l}(q) = \sum_{\alpha=i,e} \epsilon_{\alpha}^{l}(q) - 1. \tag{18}$$

从(13)，(16)式可以清楚地看到，低频场在纵波情况下，就是高频纵场或横场拍频形成的有质动力源；在横波情况下，则是两个互不平行的高频场拍频作用激发非线性电流的结果，它是低频磁场源．应用电磁感应定律，立刻可得 Vlasov-Maxwell 体系中自生低频磁场为

$$\boldsymbol{B}_{d}^{t}(q) = \frac{c}{\Omega}\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{E}_{d}^{t}(q). \tag{19}$$

由于强自生磁场的出现，低频振荡带电粒子绕磁力线"螺旋"运动，有可能阻滞高频随机场导致的无碰撞扩散过程．

为了进一步给出 $\boldsymbol{B}_{d}(q)$，需要给出高频场方程的形式，以 (2) 式代入 (5) 式后得

$$\epsilon_{h}^{\sigma}(k)E_{h}^{\sigma}(k) = \mathrm{I}^{\sigma}(k) + \mathrm{II}^{\sigma}(k), \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\sigma}(k) &= -\frac{4\pi}{\omega}\sum_{\sigma_1}\frac{e^2}{m_e}\int \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial\delta F_e(q)}{\partial\boldsymbol{v}}E_{h}^{\sigma_1}(k_1)\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}\\ &= \sum_{\sigma_1}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\int(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{e}_1)E_{h}^{\sigma_1}(k_1)\frac{n_e(q)}{n_0}\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4} + o\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

文献 [1] 中已给出了(21)式的详细形式，它是低频波引起的低频振荡电子密度扰动 n_e 与高频场作用项，

$$n_e(q) = \int \delta F_e(q)d^3v. \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}^{\sigma}(k) &= -\frac{4\pi}{\omega}\sum_{\sigma_d=l,t}\frac{e^2}{m_e}\int\frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{e}_d'\cdot\frac{\partial f_e(k_1)}{\partial\boldsymbol{v}}E_d^{\sigma_d}(q)\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}d^3v\\ &= \frac{1}{i\omega}\frac{\omega_{pe}^2e}{m_e\Omega}\sum_{\sigma_d\sigma_1}\int\frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}[(\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_d+\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}]\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{e}_1'\cdot\dfrac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}}\\ &\quad\times E_{h}^{\sigma_1}(k_1)E_d^{\sigma_d}(q)\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}d^3v\\ &= +\frac{\omega_{pe}e}{i\omega^2m_e\Omega}\sum_{\sigma_1,\sigma_d}\int\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot[\boldsymbol{q}\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_d\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e}_1]E_{h}^{\sigma_1}(k_1)E_d^{\sigma_d}(q)\\ &\quad\times\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}+o\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right)_{1,2}.\end{aligned} \tag{23}$$

上式对 $\sum\limits_{\sigma_d=l,t}$ 求和时，准确到 $o(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}/\omega)_{1,2}$，只留下低频横波项，这也就是我们为什么在文献 [1] 的粒子高频分布函数中不包括第三项的原因．现在 (20) 式为

$$\epsilon_h^\sigma(k)E_h^\sigma(k)=\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\sum_{\sigma_1}\int\left\{\frac{n_e(q)}{n_0}(\boldsymbol{e_k}\cdot\boldsymbol{e}_1)E_h^{\sigma_1}(k_1)-i\frac{e}{m_e\omega_{pe}\Omega}\boldsymbol{e_k}\cdot[\boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{e}_d)]\right.$$
$$\left.\times E_h^{\sigma_1}(k_1)E_d^t(q)\right\}\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}. \tag{24}$$

再一次应用电磁感应定律,得高频场与低频磁场耦合关系为

$$\epsilon_h^\sigma(k)E_h^\sigma(k)=\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\sum_{\sigma_1}\int\left\{\boldsymbol{e_k}\cdot\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1}(k_1)\frac{n_e(q)}{n_0}-\frac{ie}{m_ec\,\omega_{pe}}\boldsymbol{e_k}\cdot[\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1}(k_1)\times\boldsymbol{B}_d(q)]\right\}$$
$$\times\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}. \tag{25}$$

最后,写出低频振荡电子密度扰动的表达式,取到二级场得

$$n_e(q)=\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_d}\frac{\omega_{pe}^2}{4\pi m_e}\int_{(d)}\left\{\omega_{pe}^2\frac{H_e^{\sigma_d\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)}{\epsilon_d^{\sigma_d}(q)\Omega}\int\frac{\boldsymbol{e}_d'\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v-\mathrm{I}_e^{\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)\right\}$$
$$\times E_h^{\sigma_1}(k_1)E_h^{\sigma_2}(k_2)\delta^4(q-k_1-k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}, \tag{26}$$

其中

$$\mathrm{I}_\alpha^{\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}\left[\boldsymbol{e}_1'\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{e}_2'\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}}+1\longleftrightarrow2\right]d^3v,$$
$$\alpha=i,\ e. \tag{27}$$

$\mathrm{I}_\alpha^{\sigma_1\sigma_2}$ 对脚标 1, 2 对称,不难证明

$$\mathrm{I}_\alpha^{\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)=\frac{|\boldsymbol{q}|}{\Omega}H_\alpha^{l\sigma_1\sigma_2}(q,k_1,k_2)\approx\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{2\omega_2^2\omega_{pe}^2}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)[\epsilon_e^l(q)-1]. \tag{28}$$

注意到横波 $\int\frac{\boldsymbol{e}_d^{t'}\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}d^3v=\int\frac{\boldsymbol{e}_d^l\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial F_{0e}}{\partial\boldsymbol{v}}}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}=0$, 最后 (26) 式变为

$$n_e(q)=\frac{\omega_{pe}^2}{2\pi m_e}\frac{|\boldsymbol{q}|\epsilon_i^l(q)}{\epsilon_d^l(q)\Omega}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int H_e^{l\sigma_1^+\sigma_2^-}(q,k_1,-k_2)E_h^{\sigma_1^+}(k_1)E_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*$$
$$\times\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}$$
$$=-\frac{1}{4\pi m_e}\frac{\epsilon_i^l(q)(\epsilon_e^l(q)-1)}{\epsilon_d^l(q)}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_{pe}^2}$$
$$\times\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)\cdot\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}. \tag{29}$$

这里,我们看到,准确到 $o(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}/\omega)_{1,2}$ 阶, 低频振荡粒子密度扰动完全由低频纵场(离子声)驱动所产生,自发磁场不发生明显的作用,它只通过非线性有旋电流与高频场的耦合来间接发生对低频密度扰动的影响.

方程 (19), (25) 和 (29) 构成了 F 表象中波与粒子非线性作用的耦合关系.

三、时空表象中粒子与波非线性作用方程组

为了得到粒子与场动力学方程组在时空坐标中的表达式，进行 Fourier 逆变换后需要对低频波的线性介电函数部分作各种近似展开，因为我们讨论的是非线性色散关系支配下有限幅波的相互作用，线性介电函数部分不可能有零值，故有多种情况出现，现在分别讨论于下:

1. 当低频波频率 Ω 处在 $|\boldsymbol{q}|v_{T_i} \ll \Omega \ll |\boldsymbol{q}|v_{T_e}$ 之间时，低频波的电子、离子 Landau 阻尼可忽略，于是

$$\epsilon_i^l(q)(\epsilon_e^l(q)-1)/\epsilon_d^l(q) \approx -\omega_{pi}^2(\Omega^2-q^2v_s^2)^{-1} \quad (\text{离子声}), \tag{30}$$

$$\epsilon_d^t(q) \approx 1-\frac{c^2q^2}{\Omega^2}-\frac{1}{q^2\lambda_e^2}\left(1+\frac{q^2v_s^2}{\Omega^2}\right). \tag{31}$$

这里 $v_s=\sqrt{T_e/M}$，T_e 为电子温度，M 为离子质量；ω_{pi} 为离子等离子体频率，λ_e 为电子 Debye 长度. 因为 $c|\boldsymbol{q}| \gg \Omega$，$|\boldsymbol{q}|\lambda_e \ll 1$，所以

$$\epsilon_d^t(q) \approx -\frac{1}{q^2\lambda_e^2}\left(\frac{c^2\lambda_e^2q^4}{\Omega^2}+\frac{q^2v_s^2}{\Omega^2}+1\right). \tag{32}$$

利用 $-i\Omega \to \frac{\partial}{\partial t}$，$i\boldsymbol{q}\to\nabla$，$\boldsymbol{E}^\sigma=\boldsymbol{E}^{\sigma+}+\boldsymbol{E}^{\sigma-}$，$\boldsymbol{E}=\sum_\sigma \boldsymbol{E}^\sigma$，对 (29) 式逆变换后得密度扰动方程(这里及以下已略去高频场脚标 h 记号)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_s^2\nabla^2\right)n_e(\boldsymbol{x},t)=\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)|^2}{8\pi M}. \tag{33}$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 包含纵波和横波.

注意到横场的旋量性质，纵场的 $\boldsymbol{E}^l(k)=\boldsymbol{kk}\cdot\boldsymbol{E}^l(k)/k^2$ 关系以及 $\sum_{\sigma=l,t}\boldsymbol{e}_k^\sigma(\boldsymbol{e}_k^\sigma\cdot\boldsymbol{e}_1^{\sigma_1})=\boldsymbol{\sigma}_1^{\sigma_1}$，对 (25) 式两边乘 $\boldsymbol{e}_k$ 并进行 σ 求和，最后得逆变换后高频场方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}+c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-3v_{T_e}^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}\\&=-\omega_{pe}^2\left(1+\frac{n_e}{n_0}\right)\boldsymbol{E}+i\,\frac{\omega_{pe}e}{m_ec}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}.\end{aligned} \tag{34}$$

(34) 式中的 $\boldsymbol{B}$ 可由 (13) 和 (19) 式并利用 (32) 式作逆变换后得到，即

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\lambda_e^2c^2\nabla^2-v_s^2)\nabla^2\right]\boldsymbol{B}=\frac{\lambda_e^2ce}{i2m_e\omega_{pe}}\nabla^2\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)]. \tag{35}$$

在条件

$$|\boldsymbol{q}|\lambda_e \gg \frac{v_s}{c} \quad 及 \quad |\boldsymbol{q}|\lambda_e \gg \frac{\Omega}{|\boldsymbol{q}|v_{T_e}}\beta_e \quad \left(\beta_e=\frac{v_{T_e}}{c}\right), \tag{36}$$

下，由 (13)，(19)，(32) 式，则 (35) 式退化为

$$\boldsymbol{B}=\frac{e}{i2m_e\omega_{pe}c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*. \tag{37}$$

这时，方程 (34) 为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}+c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-3v_{T_e}^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\omega_{pe}^2\left(1+\frac{n_e}{n_0}\right)\boldsymbol{E}$$
$$+\frac{\omega_{pe}^2\beta_e^2}{8\pi n_0 T_e}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*). \tag{38}$$

方程 (33), (34), (35) 或 (33), (38) 便是无阻尼时的方程组.

2. 当 $\Omega<|\boldsymbol{q}|v_{T_e}$ 时，电子的 Landau 阻尼不能忽略，取到一级项便有

$$\frac{\epsilon_i^l(q)[\epsilon_e^l(q)-1]}{\epsilon_d^e(q)}\approx-\omega_{pi}^2\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega}{|\boldsymbol{q}|v_{T_e}}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_e}^2}}\right)$$
$$\times\left(\Omega^2-q^2v_s^2+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Omega^3}{|\boldsymbol{q}|v_{T_e}}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_e}^2}}\right)^{-1}$$
$$\approx-\omega_{pi}^2(\Omega^2-q^2v_s^2)^{-1}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{q^2v_s^2}{(\Omega^2-q^2v_s^2)}\right.$$
$$\left.\times\frac{\Omega}{|\boldsymbol{q}|v_{T_e}}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_e}^2}}\right)^{-1}, \tag{39}$$

$$\epsilon_d^t(q)\approx-\frac{1}{q^2\lambda_e^2\Omega^2}\left\{c^2q^4\lambda_e^2+q^2v_s^2+\Omega^2-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Omega|\boldsymbol{q}|v_{T_e}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_e}^2}}\right\}. \tag{40}$$

这时密度扰动方程变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_s^2\nabla^2\right)n_e+\Gamma_e\frac{\partial n_e}{\partial t}=\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{8\pi M}, \tag{41}$$

其中

$$\Gamma_e\frac{\partial n_e}{\partial t}=\sqrt{\frac{\pi m_e}{2M}}v_s\frac{\partial}{\partial t}\int|\boldsymbol{q}|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}n_e(\boldsymbol{q},t)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$
$$=-(2\pi)^{-3/2}\left(\frac{m_e}{M}\right)^{1/2}v_s\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{n_e(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x'. \tag{42}$$

磁场方程 (35) 变为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_e\frac{\partial}{\partial t}-(\lambda_e^2c^2\nabla^2-v_s^2)\nabla^2\right]\boldsymbol{B}=(35)\text{式右边}, \tag{43}$$

其中

$$\gamma_e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}v_{T_e}\frac{\partial}{\partial t}\int|\boldsymbol{q}|e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},t)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$
$$=(2\pi)^{-3/2}v_{T_e}\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x'. \tag{44}$$

一般情况下条件 (36) 式极易满足，这时 (43) 式便为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{e}{i2m_e\omega_{pe}c}\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)]$$
$$-(2\pi)^{-3/2}\frac{\omega_{pe}^2}{c^2v_{T_e}}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x'. \tag{45}$$

上述形式磁场方程曾被 Kono 等人[5]得到过，右端第二项就是非线性 Landau 阻尼项．应当指出，文献[5]中这一项的前面是个加号，对空间阻尼项来说，这是不对的．

3. 当 $\Omega \gtrsim |\boldsymbol{q}| v_{T_i}$ 时，离子的 Landau 阻尼起作用，这时

$$\frac{\epsilon_i^l(q)[\epsilon_e^l(q)-1]}{\epsilon_d^l(q)} = -q^2v_s^2\left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\frac{\Omega^3}{(qv_s)^3}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_i}^2}}\right)$$

$$\times\left(\Omega^2 - q^2v_s^2 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\frac{\Omega^3}{qv_s}e^{-\frac{\Omega^2}{2q^2v_{T_i}^2}}\right)^{-1}$$

$$\approx -q^2v_s^2\left(\Omega^2 - q^2v_s^2 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Omega|\boldsymbol{q}|v_{T_i}e^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}, \tag{46}$$

$$\epsilon_d^t(q) = -\frac{1}{q^2\lambda_e^2\Omega^2}\left\{c^2\lambda_e^2q^4 + q^2v_s^2 + \Omega^2 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{m_e}{M}\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}\Omega q v_{T_e}e^{-\frac{1}{2}}\right\}. \tag{47}$$

于是 (33) 和 (35) 式便分别为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2\nabla^2\right)n_e + \Gamma_i\frac{\partial}{\partial t}n_e = \nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{8\pi M}, \tag{48}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_i\frac{\partial}{\partial t} - (\lambda_e^2c^2\nabla^2 - v_s^2)\nabla^2\right]\boldsymbol{B} = (35)\text{ 式右边}, \tag{49}$$

其中

$$\Gamma_i\frac{\partial n_e}{\partial t} = -(2\pi)^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}}v_{T_i}\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{n_e(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x', \tag{50}$$

$$\gamma_i\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (2\pi)^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{m_eT_e}{MT_i}\right)^{1/2}v_{T_e}\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x' \tag{51}$$

分别为对密度扰动和自生磁场的 Landau 阻尼项．

当取条件 (36) 式时，由 (49) 与 (50) 式便得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{e}{i2m_e\omega_{pe}c}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)$$

$$-\frac{\omega_{pe}^2}{(2\pi)^{3/2}e^{1/2}v_{T_e}c^2}\xi_0\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x', \tag{52}$$

式中 $\xi_0 = \left(\frac{m_eT_e}{MT_i}\right)^{1/2} \ll 1$．(50)，(51) 式中的 $e^{-\frac{1}{2}}$ 及 (52) 式中的 $e^{\frac{1}{2}}$ 均为自然对数底开方．

4. 当 $\Omega \ll |\boldsymbol{q}|v_{T_i}$ 时(即所谓静态近似)

$$\frac{\epsilon_i^l(q)[\epsilon_e^l(q)-1]}{\epsilon_d^l(q)} = \frac{1}{q^2\lambda_e^2}\frac{T_e}{(T_i+T_e)}, \tag{53}$$

$$\epsilon_d^t(q) = -\frac{1}{q^2\lambda_e^2}\left(\frac{c^2q^4\lambda_e^2}{\Omega^2} + \frac{T_e+T_i}{T_i}\right). \tag{54}$$

于是 (33) 和 (35) 式变为

$$n_e = -|\boldsymbol{E}|^2/8\pi(T_i+T_e), \tag{55}$$

$$\left(\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda_e^2c^2\nabla^4\right)\boldsymbol{B} = \frac{ec\lambda_e^2}{i2m_e\omega_{pe}}\nabla^2\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*). \tag{56}$$

当 $|\boldsymbol{q}|\lambda_e \gg \left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}\frac{\Omega}{c|\boldsymbol{q}|}$ 时，与得到方程 (37) 式时类似讨论，有

$$\boldsymbol{B}=\frac{e}{i2m_e\omega_{pe}c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*. \tag{57}$$

(55) 和 (57) 式代入(34)式就得到一个单一 $\boldsymbol{E}$ 的方程.

5. 当 $\Omega \gg |\boldsymbol{q}|v_{T_e}$ 时，即快振荡过程.这时没有低频粒子密度扰动，只有电子 Langmuir 振荡. 但是如果有高频 Pump 场入射，拍频后可以产生低频磁场，因为这时

$$\varepsilon_d^t(q)\approx-\frac{1}{\Omega^2}(c^2q^2+\omega_{pe}^2), \tag{58}$$

自生磁场方程便为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{e}{i2m_e\omega_{pe}c}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)-\frac{\omega_{pe}^2}{c^2}\boldsymbol{B}. \tag{59}$$

可见自生磁场的空间阻尼长度 $\sim c/\omega_{pe}=\lambda_e(c/v_{T_e})\gg\lambda_e$. 方程 (59) 与文献 [5] 所得的一样.

至此，我们在各种近似下导得了缓变粒子密度扰动 n_e，快变电场 $\boldsymbol{E}$ 和缓变磁场 $\boldsymbol{B}$ 之间耦合关系的动力学方程组. 我们看到除了不感兴趣的 $\Omega\gg|\boldsymbol{q}|v_{T_e}$ 近似以外，如果 Landau 阻尼可忽略，在极易满足 (36) 式条件下，磁场方程都可用形如 (37) 式的静态形式表示出来，这时方程组简化为 n_e 和 $\boldsymbol{E}$ 的两个方程，它们最近已被文献 [6] 用于关于天体等离子体的强湍流研究中.

为了使方程便于求解，我们需要把快变电场方程变成缓变振幅 $\boldsymbol{\phi}$ 的方程. 令

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}e^{-i\omega_{pe}t}+\text{c. c.})\quad 及取\quad \omega_{pe}\boldsymbol{\phi}\gg\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi},$$

便使 (34) 式变为

$$i2\omega_{pe}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi}-c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\phi})+3v_{T_e}^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=\omega_{pe}^2\frac{n_e}{n_0}\boldsymbol{\phi}-\frac{i\omega_{pe}e}{m_ec}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{B}. \tag{60}$$

在磁场和密度扰动均为静态近似下，即如 $\Omega\ll qv_{T_i}$ 时，便得包含磁场效应的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned}&i2\omega_{pe}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi}-c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\phi})+3v_{T_e}^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\\&=\omega_{pe}^2\left[-\frac{|\boldsymbol{\phi}|^2}{16\pi n_0(T_e+T_i)}\boldsymbol{\phi}-\frac{\beta_e^2}{16\pi n_0T_e}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\phi}^*)\right].\end{aligned} \tag{61}$$

四、Lagrangian 密度和守恒量

现在讨论无阻尼方程 (33) 和 (60) 的运动积分，其中取磁场 $\boldsymbol{B}=\frac{e}{i4m_e\omega_{pe}c}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\phi}^*$. 首先对它们进行无量纲化，作如下替换：

$$\frac{2}{3}\omega_{pe}\mu t\to t,\quad \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_e}\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x},\quad \frac{3n_e}{4\mu n_0}\to n,$$

$$\frac{\sqrt{3}\ \boldsymbol{\phi}}{(64\pi\mu n_0 T_e)^{1/2}} \to \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mu = \frac{m_e}{M}, \quad \alpha_e^2 = \frac{c^2}{3v_{T_e}^2}. \tag{62}$$

这样，方程组(33)，(60)式便变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) n = \nabla^2 |\boldsymbol{\varepsilon}|^2, \tag{63}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_e^2 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = n\boldsymbol{\varepsilon} - \beta_e^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*). \tag{64}$$

从(63)，(64)式可以得到拉氏密度函数

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} i(\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \alpha_e^2(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^*) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \varphi_t(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)$$

$$+ \frac{1}{2}[(1 + \beta_e^2)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)^2 - \beta_e^2(\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \varphi_t^2 - (\nabla\varphi)^2], \tag{65}$$

其中 φ 相当于流体力学流势，即流 $\boldsymbol{u} = -\nabla\varphi$；$\varphi_t = n + |\boldsymbol{\varepsilon}|^2$. 利用变分方程很容易证明从(65)可导得(63)和(64). 现在从(65)式可得“能量-动量”张量密度

$$T_{\mu\nu} = \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - \Phi^r_{,\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi^r_{,\nu}}. \tag{66}$$

这里

$$\Phi^r = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^*; \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^*; \cdots; \varphi_t; \nabla\varphi), \tag{67}$$

$$\Phi^r_{,\mu} = \left(\frac{\partial \Phi^r}{\partial x}, \cdots\right). \tag{68}$$

于是由(66)式可得线动量守恒量

$$P_\mu = \int T_{\mu 0} d^3x = \int \left\{\sum_j \frac{1}{2} i \left(\varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_j^* - \varepsilon_j^* \frac{\partial}{\partial x_\mu}\varepsilon_j\right) + nu_\mu\right\} d^3\boldsymbol{x}, \tag{69}$$

能量守恒量

$$H = -\int T_{00} d^3\boldsymbol{x}$$

$$= \int \left\{\alpha_e^2 |\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + |\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \frac{1}{2}[\beta_e(|\boldsymbol{\varepsilon}|^4 - \boldsymbol{\varepsilon}^{*2}\boldsymbol{\varepsilon}^2) - n^2 - u^2]\right\} d^3\boldsymbol{x}. \tag{70}$$

去掉磁场效应后(70)式退化为(9)式中给出的形式.

最后，由规范不变，得四度流守恒量

$$j_\mu = -i\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\Phi - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi^*_{,\mu}}\Phi^*\right). \tag{71}$$

由此得等离子体中准粒子数守恒量

$$N = \int j_0 d^3x = \int |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 d^3\boldsymbol{x}. \tag{72}$$

如果对(61)式无量纲化，取 $\sqrt{3}\ \boldsymbol{\phi}/(64\pi n_0\mu(T_i + T_e))^{1/2} \to \boldsymbol{\varepsilon}, \beta = \left(\frac{T_e + T_i}{m_e c^2}\right)^{1/2}$，而其余量同(62)式就得非线性 Schrödinger 方程(无量纲化)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_e^2 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + |\boldsymbol{\varepsilon}|^2\boldsymbol{\varepsilon} + \beta^2\boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*) = 0. \tag{73}$$

(73) 式的拉氏密度函数为

$$\mathscr{L}_s = \frac{1}{2} i(\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \alpha_e^2 |\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}|^2 - |\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varepsilon}|^4 + \frac{\beta^2}{2} (|\boldsymbol{\varepsilon}|^4 - \boldsymbol{\varepsilon}^{*2} \boldsymbol{\varepsilon}^2). \quad (74)$$

在一维空间情况下 (65) 和 (74) 式中含 β_e 或 β 因子项抵消. 它们的拉氏密度函数分别为熟知的

$$\mathscr{L}^{(1)} = \frac{1}{2} i(\varepsilon^* \varepsilon_t - \varepsilon_t^* \varepsilon) - |\varepsilon_x|^2 - \varphi_t |\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon|^4 + \frac{1}{2} (\varphi_t^2 - \varphi_x^2), \quad (75)$$

$$\mathscr{L}_s^{(1)} = \frac{1}{2} i(\varepsilon^* \varepsilon_t - \varepsilon_t^* \varepsilon) - |\varepsilon_x|^2 + \frac{1}{2} |\varepsilon|^4. \quad (76)$$

从它们很快可以得到一维守恒量形式.

五、结果与讨论

1. 本文全部结果对高频波取到 $o(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}/\omega)$ 展开. 这意味着高频磁场的 Lorentz 力已被忽略. 这时取低频场为纵波和横波,我们便扩展了文献 [1] 的结果,成为包括自生磁场效应的方程组. 这样,除了有质动力驱动着粒子密度变化外,自生磁场影响着高频波的发展从而影响低频粒子密度的变化. 还应当提到的是,这里只考虑了两个高频波拍频产生低频波效应. 当调制不稳定性使场强足够大时,四级场以上高频波向低频波的拍频作用不能忽略,在低频波为纵波情况下我们已在文献 [8] 中作了讨论.

2. 从 (38) 或 (61) 式可以看到,当系统电子温度 T_e 很高时,调制不稳定性发展后期,只要两个高频波(例 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$) 传播方向不平行,非线性有旋电流的贡献就不能忽略,磁场项 $\beta_e/8\pi n_0 T_e |\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*|$ 就会起到一定作用. 但在通常情况下, 电子的 n_e/n_0 贡献仍然是主要的.

3. 从方程可以直接看到自生磁场只在大于一维情况下发生作用. 因此, 一维 Soliton 的形成仍然是有质动力与色散力平衡的结果. 在大于一维情况下文献 [10] 已指出,无磁场的三维 Soliton 不可能存在. 在有磁场时可作类似直观地讨论. 如引进波的宽度为 δ, 空间维数为 d, 显然与有质动力有关的非线性凝聚项中场能 $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2$ 和磁场项 $|\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*|$ 都随 δ^{-d} 变化,而色散项算子部分以 δ^{-2} 变化. 因此,当增大或缩小 δ 时与无磁场时有相同的效果: $d = 1$ 时,总是稳定,即可形成一维 Soliton. 但是, $d = 3$ 时,磁场项的存在仍然不可能维持三维 Soliton 的形成,不过 Caviton 形式的收缩是不可避免的.

附注 本文寄出以后,我们见到了 Kono 等人[11] 1981 年发表的文章[11], 其中也讨论了包括自生磁场在内的动力学方程组问题. 但是,他们只有自生磁场部分从 Vlasov-Maxwell 方程组导得,方法与我们不一样;至于动力学方程组的其余部分均采用了流体力学近似. 因此,非线性 Landau 阻尼效应只出现在磁场方程中而不出现在密度方程中. 这些,我们已在文献[8]中作了评论.

参 考 文 献

[1] 贺贤土，核聚变，**1** (1980)，245.
[2] J. A. Stamper, *et al., Phys. Rev. Lett.*, **26**(1971), 1012.
[3] J. B. Chase, *et al., Phys. Fluids*, **16**(1973), 1142.
[4] J. A. Stamper and Tidman, *Phys. Fluids*, **16**(1973), 2024.
[5] M. Kono. *et al., Phys. Lett. A*, **77**(1980), 27.
[6] D. ter Haar and V. N. Tsytovich, *Phys. Report*, **73**(1981), 177.
[7] B. D. Fried and S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function, (1961).
[8] 贺贤土，物理学报，**31** (1982) 1317.
[9] J. Gibbons, *et al., J. Plasma Physics*, **17**(1977), 153.
[10] S. G. Thornhill and D. ter Haar, *Phys. Report* **43C**(1978), 45.
[11] M. Kono, *et al., J. Plasma Phys.*, **26** part 1(1981), 123.

THE PONDERMOTIVE FORCE AND MAGNETIC FIELD GENERATION EFFECTS RESULTING FROM THE NON-LINEAR INTERACTION BETWEEN PLASMA-WAVE AND PARTICLES

HE XIAN-TU

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Starting from the Vlasov-Maxwell equations by using the method of Self-Consistent field theory, we set up first the coupling relation between distribution function and density of low-frequency oscillating particles and high-frequency EF, low-frequency MF in fourier representation. Then, in the time-space representation, a set of equations for the nonlinear interaction including the effects of magnetic field generation, pondermotive force and Landau damping were derived through the expansion of the low-frequency linear dielectric function under various approximations. Finally, we also gave the Lagrangian density and conserved quantities and discussed briefly whether the magnetic field can promote the formation of soliton in three dimensions.