

随机驱动等离子体电流

夏 蒙 焚

(北京大学理论物理研究所)

1982年3月8日收到

提 要

本文探索波驱动等离子体电流的一种新机制,称之为随机驱动效应。在相干波与磁化等离子体相互作用的系统中,当波的强度超过某个阈值时,速度空间中的一些共振区将互相重迭。共振区的重迭可导致粒子的随机运动,引起速度空间中的扩散现象。如果在电子平行于磁场方向的速度分布中,这种重迭区是不对称的,这样,就可驱动纵向等离子体电流。

一、引 言

波驱动等离子体电流的问题在实践上和理论上都有重要意义,近年来在这方面作了一系列的讨论(见文献[1]和[2]及其引文)。很多工作基于准线性理论,这一般只适用于波的振幅较小并有一定谱宽的情形。在文献[3]中,讨论了大振幅单波驱动电流的问题,这是一种基于绝热不变量理论的非线性驱动效应。然而,本文将指出,在磁化等离子体中,当波能密度超过某个阈值时绝热不变量将被破坏。在这种情形下,单波与等离子体相互作用不再是一种绝热可逆的过程,而将出现某种随机的特征。本文提出,这种随机效应是波驱动电流的一种可能的机制,我们称之为随机驱动效应。

一个纯粹的动力学系统在一定条件下可显示某种随机行为。这是一种相当普遍的现象,近来颇为引人注目^[4,5]。这是一种粗粒平均意义下的随机效应。运动从稳定到随机的转变联系于某个绝热不变量被破坏。这种转变通常是在很窄的参量范围内突然发生的,定性上可以由共振的重迭来说明。

相干波与等离子体相互作用的情形是一种动力学系统,它同样也可在一定条件下显示随机行为。这种效应可导致粒子的随机加速或等离子体的随机加热。例如,波对离子的随机加热可以作为直接加热离子的一种重要机制^[6,7]。

相干波在磁化等离子体中引起的随机运动是波与粒子之间的一种共振的非线性相互作用的效应。这种效应也可以用来驱动等离子体电流。我们以磁化等离子体中斜向传播的单个大振幅静电波为例进行讨论。在这种情况下,在相空间中存在着一系列共振,即契伦柯夫共振与各级迴旋共振。在每一共振附近,粒子被波的势阱俘获,变为俘获粒子区。当波的振幅不太大时,各俘获粒子区互不重迭。这时,相空间大部分区域(除俘获粒子区与非俘获粒子区的分界点附近很小的区域以外)中,粒子的运动除能量外还存在其它绝热不变量。波可以按绝热可逆的方式驱动电流^[3]。但当波的振幅超过某个阈值时,某些俘获

粒子区开始互相重叠. 在这些区域中, 绝热不变量被破坏, 粒子的运动将具有某种随机性特征^[7]. 这种随机运动将导致速度空间中分布函数的扩散. 如果这种随机效应在平行和反平行于磁场的方向对于电子的分布函数是不对称的, 便能驱动纵向电流. 在磁化等离子体中利用大振幅单波驱动电流时, 随着波振幅的增大, 将不可避免地由绝热可逆的驱动机制转变为随机驱动的机制. 因此, 讨论波随机驱动电流的问题不是没有意义的.

二、随机驱动电流的条件

令磁化等离子体中均匀恒定磁场在 z 方向为

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z, \quad (1)$$

而静电波以如下形式描述:

$$\phi = \phi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2)$$

其中波矢 $\mathbf{k}$ 取在 (x, z) 平面中,

$$\mathbf{k} = k_\perp \hat{e}_x + k_\parallel \hat{e}_z. \quad (3)$$

在波标架(即以波的平行相速 $\omega/k_\parallel$ 沿磁场方向运动的参照系)中, 质量为 m 、电荷为 q 的粒子(在驱动电流问题中主要讨论电子: $m = m_e, q = -e$) 在波场中运动的哈密顿量可表达为

$$H = \frac{1}{2m} p_z^2 + p_\varphi \Omega + q\phi_0 \sin(k_\perp X + k_\parallel z + k_\perp \rho \cos \varphi), \quad (4)$$

其中

$$\Omega = qB_0/mc, \quad (5)$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2} m v_\perp^2 / \Omega, \quad (6)$$

$$\rho = v_\perp / \Omega, \quad (7)$$

$$\varphi = \sin^{-1}(-v_x/v_\perp), \quad (8)$$

$$X = x - \rho \cos \varphi, \quad (9)$$

$v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 为粒子速度的垂直分量. (4) 式给出的哈密顿量 H 表达为正则变量 $(z, p_z; \varphi, p_\varphi; Y, m\Omega X)$ 的函数, 其中

$$Y = y + \rho \sin \varphi. \quad (10)$$

由于 H 与 Y 无关, 故 X 为运动常数, 它是回旋中心的 x 坐标. 由于哈密顿量 H 不显含时间, 粒子的能量是运动常数.

将 (4) 式右端最后一项作展开, 并适当选择坐标原点, 可将哈密顿量表达为

$$H = \frac{1}{2m} p_z^2 + p_\varphi \Omega + q\phi_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_\perp \rho) \sin(k_\parallel z - l\varphi). \quad (11)$$

在小振幅波的情形, 由 (11) 式可确定一系列共振, 共振速度为(在等离子体标架中)

$$v_{r,l} = \frac{\omega - l\Omega}{k_\parallel} \quad l = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

在第 l 个共振附近, 哈密顿量可以近似地表达为(略去对粒子运动无重要影响的快变

化项)

$$H = \frac{1}{2m} p_z^2 + p_\varphi Q + q\phi_0 J_l(k_\perp \rho) \sin(k_\parallel z - l\varphi). \quad (13)$$

这表示在第 l 个共振附近波形成的等效势阱的高度为 $|q\phi_0 J_l(k_\perp \rho)|$. 这个势阱使得共振速度 $v_{r,l}$ 附近出现一个俘获粒子区:

$$v_{r,l} - \Delta v_{r,l} \leq v_z \leq v_{r,l} + \Delta v_{r,l}, \quad (14)$$

其中

$$\Delta v_{r,l} = \sqrt{\frac{2}{m} |q\phi_0 J_l(k_\perp \rho)|} \quad (15)$$

为俘获区的半宽度.

当波的振幅增大时,俘获区的半宽度 $\Delta v_{r,l}$ 随之变大. 如果波的振幅超过某个阈值,则一些相邻的俘获区开始互相重迭. 这种重迭使相空间中相应的区域内粒子的力学运动特征发生根本的变化,从稳定的轨道变为某种不稳定的轨道. 这种转变与粒子运动的某个绝热不变量被破坏有关. 不稳定轨道的特点是它可以遍历能量曲面中相应的区域,同时,从相空间中邻近两点出发的两条轨道是按指数规律互相分离的. 在粗粒平均的意义下,这种不稳定运动显示出随机的特征. 相应地,在相空间的相应区域内,分布函数将按扩散的方式发生演变. 这种随机扩散效应,为波驱动电流提供了又一种可能的机制. 事实上,只要随机扩散区对于电子的平行和反平行于磁场方向的速度是不对称的,例如只出现于 $v_z > 0$ 的区域,便可驱动纵向等离子体电流.

随机驱动等离子体电流的条件为

1. 要求波的振幅超过阈值,使某些相邻俘获区互相重迭,变为随机区.

由于相邻共振的间隔为(取 $Q_c > 0$)

$$\Delta v_z = Q_c / k_\parallel, \quad (16)$$

故 l 与 $l+1$ 区重迭的条件为^[7]

$$\Delta v_{r,l} + \Delta v_{r,l+1} > Q_c / k_\parallel. \quad (17)$$

由(17)及(15)式,相应阈值 ϕ_c 可由下式确定:

$$\frac{e\phi_c}{T_c} = \frac{Q_c^2}{k_\parallel^2 v_c^2} / [|J_l(k_\perp \rho)|^{1/2} + |J_{l+1}(k_\perp \rho)|^{1/2}]^2, \quad (18)$$

其中 v_c 为电子热速度

$$v_c = \sqrt{2T_c/m_e}. \quad (19)$$

(18)式表明,阈值 ϕ_c 通过 ρ 而与 $v_\perp$ 有关. 因此,在不同 $v_\perp$ 的区域中,相邻俘获区的重迭情况是不同的. 为了简单起见,以下均取平均 ρ , 即 ρ 中的 $v_\perp$ 以 v_c 代替.

我们将讨论 $k_\perp \rho \lesssim 1$ 的情形. 这时, $l=0$ 与 $l=\pm 1$ 区的重迭将首先出现. 相应阈值为

$$\frac{e\phi_c}{T_c} = \frac{Q_c^2}{k_\parallel^2 v_c^2} / [|J_0(k_\perp \rho)|^{1/2} + |J_1(k_\perp \rho)|^{1/2}]^2 \sim \frac{Q_c^2}{k_\parallel^2 v_c^2}. \quad (20)$$

2. 要求随机区对于 $v_z > 0$ 和 $v_z < 0$ 是不对称的. 例如,要求 $l=0$ 与 $l=\pm 1$ 区重迭而形成的随机区落在 $v_z > 0$ 的范围. 这样,随机扩散便可使电子具有平均速度 ($\bar{v}_z >$

0), 这就相应于宏观电流.

为确定起见, 取 $\omega > 0$, $k_{\parallel} > 0$; 同时注意到 $\Delta v_{r,-1} = \Delta v_{r,1}$, 则 $l = 0$ 与 $l = \pm 1$ 区重迭所形成的随机区在

$$v_1 \equiv \frac{\omega - Q_c}{k_{\parallel}} - \Delta v_{r,1} \leq v_z \leq \frac{\omega + Q_c}{k_{\parallel}} + \Delta v_{r,1} \equiv v_2. \quad (21)$$

(21) 式左端大于零的条件即为

$$\begin{aligned} \omega &> Q_c + k_{\parallel} \Delta v_{r,1} \\ &= Q_c + k_{\parallel} v_c \left(\frac{e\phi_0}{T_c} |J_1(k_{\perp} \rho)| \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

为了实现随机驱动电流, 波的振幅必须超过 (20) 式所确定的阈值, 同时, 波的频率必须足够高以满足 (22) 式. 对于 $k_{\parallel}/k_{\perp} \sim 1$, $k_{\perp} \rho \sim 1$ 情形, 由 (20) 式, 得 $e\phi_0/T_c \sim 1$; 而由 (22) 式, 要求 $\omega > (1.5-2)Q_c$. 注意, 当 $k_{\perp} = 0$ 时, 除 $l = 0$ 外所有的 J_l 均为零, 因而不能出现随机驱动效应. 因此, 必须考虑斜向传播的波.

例如, 对于 $\omega_{pe} > Q_c$ 情形, 电子等离子体波便有可能作为随机驱动电流的模式.

三、随机区扩散方程

在速度空间的随机区, 粒子运动的粗粒平均行为具有随机性. 假定它具有稳定的概率, 则粗粒平均分布函数的演化可用一扩散型的方程描写. 为简单起见, 考虑一维模型:

$$f = f(v_z, t). \quad (23)$$

令 $P(v_z, t; \Delta v_z, \Delta t)$ 为转移概率, 它代表 t 时刻速度为 v_z 的粒子在 $t + \Delta t$ 时刻转移到 $v + \Delta v$ 的概率密度. 于是有

$$f(v_z, t) = \int P(v_z - \Delta v_z, t - \Delta t; \Delta v_z, \Delta t) f(v - \Delta v_z, t - \Delta t) d\Delta v_z, \quad (24)$$

并有

$$\int P(v_z, t; \Delta v_z, \Delta t) d\Delta v_z = 1. \quad (25)$$

将 (24) 式中右端的被积函数对 Δv_z 及 Δt 作展开, 并考虑到对称性, 可得波在随机区引起的分布函数演化为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_w = \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} Df, \quad (26)$$

其中, 扩散系数 D 的定义为

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (\Delta v_z)^2 \rangle, \quad (27)$$

而

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \int (\Delta v_z)^2 P(v_z, t; \Delta v_z, \Delta t) d\Delta v_z. \quad (28)$$

由于

$$\Delta v_z = \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_z(t') dt', \quad (29)$$

故有

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle \dot{v}_z(t') \dot{v}_z(t'') \rangle dt''. \quad (30)$$

令

$$g(t_1, t_2) = \langle \dot{v}_z(t_1) \dot{v}_z(t_2) \rangle \quad (31)$$

为关联函数, 则有(利用 g 的对称性)

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = 2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t''} g(t', t'') dt''. \quad (32)$$

于是得到

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t''} g(t', t'') dt''. \quad (33)$$

由哈密顿量 (11) 式, 在力学运动的意义上有

$$\dot{v}_z = - \frac{q\phi_0 k_{\parallel}}{m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{\perp} \rho) \cos(k_{\parallel} z - l\varphi). \quad (34)$$

在定义关联函数时所用的 $\dot{v}_z$ 则是 (34) 式的粗粒平均值. 以下, 我们由简单的考虑来估计 D 的定标关系与量级.

在准稳态情形, 关联函数 g 只与时间差有关, 即

$$g(t_1, t_2) = g(|t_1 - t_2|). \quad (35)$$

假定俘获区重迭不多, 则在每一区内 $\dot{v}_z$ 基本上由 (34) 式右端的一项决定:

$$\dot{v}_z \sim - \frac{q\phi_0 k_{\parallel}}{m} J_l(k_{\perp} \rho) \cos(k_{\parallel} z - l\varphi). \quad (36)$$

但由于重迭区的存在, 粒子轨道是不稳定的. 令其粗粒平均行为的等效关联时间为 τ_s , 则近似有

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2) &= g_0 \theta(\tau), \\ \tau &= |t_1 - t_2| \\ \theta(\tau) &= \begin{cases} 1 & \text{当 } \tau \leq \tau_s, \\ 0 & \text{当 } \tau > \tau_s. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

由 (36) 式可估计 g_0 的量级为

$$g_0 \sim \frac{q^2 \phi_0^2 k_{\parallel}^2}{m^2} J_l^2(k_{\perp} \rho). \quad (38)$$

假定关联时间 τ_s 大体上由两次通过重迭部分的时间间隔所决定, 则其量级为

$$\tau_s \sim \omega_b^{-1} = 1/k_{\parallel} \sqrt{\frac{|q\phi_0 J_l(k_{\perp} \rho)|}{m}}, \quad (39)$$

其中 ω_b^{-1} 为俘获粒子的振荡频率. 由 (33), (37), (38) 及 (39) 式, 得到

$$D \cong g_0 \tau_s \sim k_{\parallel} \left(\left| \frac{q\phi_0 J_l(k_{\perp} \rho)}{m} \right| \right)^{3/2}. \quad (40)$$

对于 $l=0$ 与 $l=\pm 1$ 互相重迭的情形, 我们将略去 D 随 l 的变化, 并以 $|J_l|$ 的量级为 1 来估计. 于是有

$$D \sim k_{\parallel} \left| \frac{q\phi_0}{m} \right|^{3/2} = k_{\parallel} v_e^3 \left| \frac{q\phi_0}{2T_e} \right|^{3/2}. \quad (41)$$

在驱动电流的问题中,一般要考虑碰撞效应. 动力论方程可写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} Df + \frac{\partial}{\partial v_z} D_e \frac{\partial}{\partial v_z} (f - f_M), \quad (42)$$

其中右端第二项为碰撞项, f_M 为平衡分布,

$$D_e \cong \frac{v_e v_e^2}{2(v_z^2 + v_e^2)^{3/2}}, \quad (43)$$

v_e 为电子平均碰撞频率.

方程 (42) 与准线性扩散方程相似,但输运系数不同. 在准线性情形中 $D \propto \phi_0^2$, 而此处 $D \propto \phi_0^{3/2}$. 同时,在准线性情形,共振扩散区的范围由波谱决定,与波的强度无关;而此处随机区的范围是随着波幅的变大而加宽的:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_2 - v_1 = 2 \left(\frac{\Omega_e}{k_{\parallel}} + \Delta v_{r1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\Omega_e}{k_{\parallel}} + v_e \sqrt{\frac{e\phi_0}{T_e} J_1(k_{\perp} \rho)} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

四、电流与耗散功率

现计算稳态电流密度与耗散功率密度. 由 (42) 式,方程的稳态形式为

$$\frac{\partial^2}{\partial v_z^2} Df + \frac{\partial}{\partial v_z} D_e \frac{\partial}{\partial v_z} (f - f_M) = 0. \quad (45)$$

在随机区 $v_1 \leq v_z \leq v_2$ 内, D 用 (41) 式估计,而在随机区外,取 $D = 0$. 这里略去了 $l \geq 2$ 共振的效应.

由 (45) 式,在随机区有

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{D_e/D}{1 + D_e/D} \frac{\partial f_M}{\partial v_z}. \quad (46)$$

由 (41) 与 (43) 式,对 $v_z > v_e$ 情形,有

$$\frac{D_e}{D} \sim \frac{\sqrt{2} v_e}{k_{\parallel} v_e} \cdot \frac{1}{\left(\frac{v_z}{v_e} \right)^3 \left(\frac{e\phi_0}{T_e} \right)^{3/2}}. \quad (47)$$

对于我们所考虑的情形,有 $D_e/D \sim v_e/\Omega_e$. 因此,一般有 $D_e/D \ll 1$. 在零级近似下,有

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \quad v_1 \leq v_z \leq v_2. \quad (48)$$

这是 (45) 式只保留波驱动项的结果. 波引起的随机效应的趋势是使分布函数在随机区被拉成平台. 电流密度主要由这个零级近似所决定,而耗散功率密度则联系于碰撞项引起的修正.

解出稳态方程的零级近似解,从而便可求得电流密度为 (假定 $v_1 > 0$, 电流密度以

$(-n_0 e v_c)$ 约化)^[1,2]

$$J = \frac{j}{-n_0 e v_c} = \frac{C}{\sqrt{\pi}} 2 \frac{\omega}{k_{\parallel} v_c} \left(\frac{\Omega_c}{k_{\parallel} v_c} + \sqrt{\frac{e \phi_0}{T_c}} J_1(k_{\perp} \rho) \right) \times \exp \left\{ - \left(\frac{\omega - \Omega_c}{k_{\parallel} v_c} - \sqrt{\frac{e \phi_0}{T_c}} J_1(k_{\perp} \rho) \right) \right\}, \quad (49)$$

其中 C 是出现在零级近似分布函数中的归一化常数.

(49) 式给出的电流密度相应于准线性近似下的饱和电流密度(强场极限). 在准线性范围内, 饱和电流密度是波驱动的共振电子电流的上限. 它相应于分布函数在共振区被拉成平台的极限情形, 进一步增大波的振幅不能再使电流密度增大. 但 (49) 式所给出的随机驱动电流密度却与准线性情形不同. 它虽然也相应于分布函数在随机区被拉成平台形式的情形, 但随着波的振幅的增大它将进一步提高, 这是由于随机区的宽度随着波振幅的提高而不断加宽. 电流密度 J 可以达到相当高的值, 足以维持稳态托卡马克运行.

对于波的耗散功率, 随机效应引起的耗散将是重要的. 我们来计算这一部分耗散的功率密度. 对 (26) 式取能量矩, 便得到随机耗散的功率密度为

$$\begin{aligned} p &= \int \frac{1}{2} m v_z^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_w dv_z \\ &= \int dv_z \left\{ \frac{1}{2} m v_z^2 \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} Df \right\} \\ &= -m \int_{v_1}^{v_2} v_z \frac{\partial}{\partial v_z} Df dv_z. \end{aligned} \quad (50)$$

由 (46) 式, 在 $D_c/D \ll 1$ 时, 有

$$p = -m \int_{v_1}^{v_2} v_z D_c \frac{\partial f_M}{\partial v_z} dv_z. \quad (51)$$

将耗散功率密度用约化量表示(用 $v_c n_0 T_c$ 约化), 有

$$P = \frac{p}{v_c n_0 T_c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v_z^2}{(v_z^2 + v_c^2)^{3/2}} e^{-v_z^2/v_c^2} dv_z. \quad (52)$$

同样, 当波的振幅增大时, 波的随机耗散功率密度也随之提高. 这也是由于随机区宽度 $(v_2 - v_1)$ 随振幅而增大所致.

在讨论波驱动电流效应时, 常引入一个特征量称为波驱动电流的效率. 驱动电流的效率被定义为波产生的总电流与波的总耗散功率之比, 或定义为电流密度与耗散功率密度之比, 也有用约化量的形式定义的^[1,8-11]. 本文把驱动电流的效率定义为约化电流密度 J 与约化耗散功率密度 P 的比值:

$$\eta = J/P. \quad (53)$$

由 (49) 与 (52) 式分别求出 J 与 P , 代入 (53) 式, 便可求得 η . 采用 (53) 式的定义比较简洁, 例如文献 [1] 所给出的共振效应驱动电流的效率(文献 [1] 的 (9) 式)用 (53) 式的定义便可表达为

$$\eta_r = \frac{1}{2} u^2. \quad (54)$$

以上, 我们分析了波随机驱动电流的机制, 给出了所需满足的条件, 导出了随机驱动的电流密度及波的随机耗散功率密度的表达式. 从这些初步结果看来, 波通过随机效应驱动等离子体电流是可能的.

参 考 文 献

- [1] 夏蒙芬、张承福, 物理学报, **30** (1981), 1307.
- [2] 夏蒙芬、胡慧玲, 物理学报, **31** (1982), 150.
- [3] V. B. Krapehev, *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 1533.
- [4] M. Henon, *et al.*, *Astron. J.*, **69**(1964), 73.
- [5] B. V. Chirikov, *Phys. Reports*, **52**(1979), 265.
- [6] C. F. F. Karney, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1584; **22**(1979), 2188.
- [7] G. R. Smith, *et al.*, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 2230.
- [8] N. J. Fisch, *Nucl. Fusion*, **21**(1981), 15.
- [9] R. J. LaHaye, *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 218.
- [10] S. Y. Yuen, *et al.*, *Nucl. Fusion*, **20**(1980), 159.
- [11] R. W. Harvey, *et al.*, *Nucl. Fusion*, **21**(1981), 153.

STOCHASTIC CURRENT DRIVEN BY A WAVE

XIA MENG-FEN

(*Institute of Theoretical Physics, Peking University*)

ABSTRACT

A new mechanism of current driven by a wave is discussed. There is a series of resonant regions in the velocity space of a magnetized plasma interacting with a single wave. When the amplitude of the wave is higher than a threshold, some of the resonant regions will overlap each other and the stochastic effect will appear. If the overlapping region is asymmetric in the longitudinal velocity distribution of the electrons, the plasma current may be driven by the wave as a result of the stochastic effect.