

关于电磁复合聚焦阴极透镜的象差理论

周立伟 艾克聪 潘顺臣

(北京工业学院)

1982年3月21日收到

提 要

本文对电磁复合聚焦阴极透镜的象差理论进行评述与研究,着重分析西门纪业^[1]和 Бонштедт^[2]两篇代表性的文章,详细推导了两文的象差方程和象差系数。研究表明,尽管两文的象差系数在形式上迥然不同,但实质上是完全一致的,是可以互相转化的。从而证明 Бонштедт 对西门纪业的批评是没有根据的。

按照我们的研究,成象系统的象差应在某一轴向初电位 ϕ_{z_1} 而非 ϕ_z 所对应的象面上进行考察,从而导出电磁复合聚焦阴极透镜包括一级象差与三级象差在内的全部横向象差表达式,这样将更为接近实际。

一、引 言

如所周知,阴极透镜中由阴极物面逸出初速度很小而初斜率取任意值(可趋于无穷大)的电子参与成象。因此,细束电子光学象差理论并不适用于阴极透镜。在研究阴极透镜的电子光学性质与象差理论时,通常选择逸出点处电子的离轴高度 r_0 与逸出电子的初速度 $\dot{r}_0$ 作为一级小量,而将轨迹与象差用这两个量来描写。这样所获得的象差公式不仅包含了各级横向象差,而且也包含了色球差。

静电聚焦阴极透镜与电磁复合聚焦阴极透镜的象差理论是由 Recknagel^[3] 和西门纪业^[4] 分别建立的。西门纪业在文献[1]中首先全面研究了电磁复合聚焦阴极透镜的象差理论,推导了以约化电位表示的实际轨迹方程以及线性方程和三级横向象差方程,给出了各种特殊类型的象差系数表达式,为电磁复合聚焦阴极透镜象差理论的研究奠定了基础。近二、三十年来,在 Recknagel 和西门纪业工作的基础上,文献[4—7]和文献[2,8]继续讨论了静电阴极透镜与电磁复合阴极透镜的理论,推进了成象系统的研究与发展。

但是,对于电磁复合聚焦阴极透镜象差理论的研究尚存在一些争论。如 Куликов 等人^[8] 怀疑总的三级横向象差 Δu_3 内由于旋转坐标系的附加旋转而引起的象差项

$$\Delta x(\mathbf{k} \times \mathbf{u})$$

的存在。而 Бонштедт^[2] 尽管承认采用西门纪业^[4] 研究的方法再一次推导了象差方程和象差系数¹⁾。但是,他却批评文献[1]中象差方程的自由项 $\mathbf{F}$ 的推导有误,从而导致所得

1) 在文献[2]的参考文献中,引用的并不是西门纪业的文章^[4],而是姚福田的文章: Yao Fu-Den (姚福田), Scientia Sinica, 7(1958), 31.

到的象差系数也是不正确的. 此文发表不久, 本文作者之一在一篇论文报告稿中¹⁾曾分析了文献[1, 2]中象差方程的自由项 F 的表达式, 发现两文中的 F 实质上是一致的, 初步指出了 Бонштедт 的批评是不正确的. 1980 年我们再一次对两文的象差方程和象差系数进行考察. 其结论是, 虽然两文的象差方程自由项 F 以及象差系数表达式形式上似乎差异很大, 但实际是完全一致的, 是可以互相转化的, 从而证明 Бонштедт 对西门纪业的批评是没有根据的. 此外, 我们还证实了西门纪业^[1]文中象差系数的推导全部无误; 相反, 文献[2]给出的象差系数表达式却有一些错误与遗漏之处, 需要加以补正²⁾.

近年来我们对于阴极透镜的研究表明^[10], 象面应定义在某一轴向初能 ϵ_{x_1} 所对应的理想成像位置处, 从而考察具有轴向初能 ϵ_z 的电子在 ϵ_{x_1} 所对应的象面上形成的横向象差. 从这样的观点出发所导出的横向象差表达式, 可以把一级象差和三级象差联系在一起, 因而它们更接近于实际.

二、实际轨迹方程

文献[1, 2]业已证明, 旋转坐标系下轴对称电磁聚焦复合场中的实际轨迹方程可表为

$$\frac{\varphi}{1+r'^2} u'' + \frac{1}{2} u' \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{1+r'^2} \right) - u \frac{\partial}{\partial(u^2)} (\varphi - 4A^{*2}) + 4 \left(\frac{\varphi}{1+r'^2} \right)^{1/2} u(u \times u') k \frac{\partial}{\partial(u^2)} \left(\frac{A^*}{r} \right) = 0, \quad (1)$$

式中 $\varphi = \varphi(z, r)$ 为空间电位分布, $A^* = \sqrt{\frac{e}{8m_0}} A$, $A = A(z, r)$ 为旋转对称磁场中磁矢位方位角分量的空间分布, e/m_0 为电子的荷质比, k 是 z 轴正方向的单位矢量, 撇号“'”表示对 z 的导数, $r = r(z)$, $u = u(z)$ 分别表示固定坐标系 (X, Y) 和旋转坐标系 (x, y) 内垂直于 Z 轴的平面矢量, 两者之间的关系为

$$r = u e^{i\chi(z)}. \quad (2)$$

这里 $\chi(z)$ 是由于磁场引起轨迹旋转而引入的旋转坐标系 (x, y) 相对于固定坐标系 (X, Y) 转过的角度.

$$\chi(z) = 2 \int_0^z \frac{A^*}{r} \sqrt{\frac{1+r'^2}{\varphi}} dz. \quad (3)$$

将(1)式叉乘 u , 不难证明旋转对称场中转动动量矩守恒:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{1+r'^2}} (u \times u') = \left(\sqrt{\frac{\varphi}{1+r'^2}} \right)_0 (u_0 \times u'_0) = \text{常数}, \quad (4)$$

下标“0”表示在 $z = 0$ 处的值. 为了进一步简化方程(1), 西门纪业^[1]引入约化电位 Φ :

1) 这是周立伟 1965 年在列宁格勒电工学院物理系的报告摘要: Чжоу Ли-Вэй (周立伟), “О выводах уравнения Аберраций в комбинированной электро-магнитной катодной линзе”, Тезисы доклада на ЭМА ЛЭТИ, Ленинград, (1965).

2) 顺便指出, 苏联 1974 年出版的 А. Г. Власов 和 Ю. А. Шапиро 的书^[9]中, 仍然引用了 Бонштедт^[2] 实质上有错误的象差系数表达式.

$$\Phi = \varphi - 4A^{*2} - 4\left(\sqrt{\frac{\varphi}{1+r'^2}}\right)_0 (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k} \frac{A^*}{r}, \quad (5)$$

并证明了下述关系式成立.

$$\frac{\varphi}{1+r'^2} = \Phi - \mathbf{u}'^2 \frac{\varphi}{1+r'^2}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{1+r'^2} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (7)$$

最后将(1)式简化为

$$\frac{2\varphi}{1+r'^2} \mathbf{u}'' + \mathbf{u}' \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2\mathbf{u} \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{u}^2)} = 0. \quad (8)$$

轨迹方程(8)是由西门纪业^[1]首先推导的. 由(7)式可见, 方程(8)亦可表达成如文献[2]中给出的形式:

$$\frac{2\varphi}{1+r'^2} \mathbf{u}'' + \mathbf{u}' \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{1+r'^2} \right) - 2\mathbf{u} \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{u}^2)} = 0. \quad (9)$$

方程(8)或(9)乃是我们研究系统的理想成象与象差的出发点.

三、近轴方程与理想成象

如上所述, 对于大物面宽电子束成象系统, 通常将电子轨迹和象差以 $\mathbf{r}_0$ 和 $\dot{\mathbf{r}}_0$ 作为一级小量展开来描写. 令

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= iX_0 = \mathbf{i} \cdot r_0, \\ \dot{\mathbf{r}}_0 &= \mathbf{i} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \varepsilon_{\perp} \cos \beta_0 + \mathbf{j} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \varepsilon_{\perp} \sin \beta_0. \end{aligned} \quad (10)$$

这里 $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 \sin^2 \alpha_0$, $\varepsilon_z = \varepsilon_0 \cos^2 \alpha_0$ 分别为逸出电子初速度的垂轴分量和轴向分量所对应的初电位, ε_0 为逸出电子的初电位, 初速度方向由逸出角 α_0 与方位角 β_0 所决定.

在非相对论、无空间电荷、磁场中无自由空间电流的情形下, φ 和 A^* 可以展开为

$$\varphi = \varepsilon_0 + \phi(z) - \frac{1}{4} \phi''(z) \mathbf{u}^2 + \frac{1}{64} \phi^{IV}(z) \mathbf{u}^4 - \dots, \quad (11)$$

$$\frac{A^*}{r} = \frac{1}{2} h(z) - \frac{1}{16} h''(z) \mathbf{u}^2 + \dots, \quad (12)$$

式中 $\phi(z)$ 为静电电位沿轴分布; $h(z) = \sqrt{\frac{e}{8m_0}} B(z)$, $B(z)$ 为磁感应强度沿轴分布.

在实际轨迹方程(8)或(9)中, 将各系数展开时, 保留零级的量, 忽略二级以及更高级的量, 从而得到电磁复合聚焦阴极透镜的线性方程, 简称近轴方程:

$$V \mathbf{u}'' + \frac{1}{2} \phi' \mathbf{u}' + T \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

这里

$$V = V(z) = \phi(z) + \varepsilon_z, \quad (14a)$$

$$T = T(z) = \frac{1}{4} \phi''(z) + h^2(z). \quad (14b)$$

同样, 展开(3)式的系数, 取零级近似, 则有

$$(\chi(z))_0 = \int_0^z \frac{h(z)}{\sqrt{V}} dz, \quad (15a)$$

$$\chi'(z) = \frac{h(z)}{\sqrt{V}}. \quad (15b)$$

近轴方程(13)乃是关于 $\mathbf{u}$ 的二阶线性齐次常微分方程, 可以用通常的方法求解. 所得的解可以完整地描述全部近轴光学性质.

设近轴方程(13)标量形式的两线性无关的特解分别为 $v(z)$ 和 $w(z)$, 它们在 $z=0$ 处满足以下的初条件:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0)\sqrt{\varepsilon_z} &= 1; \\ w(0) &= 1, & w'(0)\sqrt{\varepsilon_z} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

此二特解满足的朗斯基行列式为

$$\sqrt{V}(v'w - vw') = 1. \quad (17)$$

假定在初始点 $z=0$ 处旋转坐标与固定坐标重合, 即 $x_0=0$, 则 $\mathbf{u}$ 在阴极面的初条件由(2), (10)与(15b)式可表为

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{u}'_0 = \mathbf{r}'_0 - x'_0(\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0). \quad (18)$$

于是方程(13)的通解可以表为

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_0 w + \left[\sqrt{\frac{m_0}{2e}} \dot{\mathbf{r}}_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) h_0 \right] v. \quad (19)$$

在阴极透镜中, 通常在以某一轴向初电位为 ε_{z_1} 的近轴电子所对应的象面上来讨论系统的理想成象的性质. 特解 $v(z, \varepsilon_{z_1})$ 将决定象面位置 z_i :

$$v(z_i, \varepsilon_{z_1}) = 0. \quad (20)$$

而另一特解 $w(z, \varepsilon_{z_1})$ 在 z_i 象面上将决定系统的放大率 M (当 $\chi(z_i) = m\pi$ 时):

$$w(z_i, \varepsilon_{z_1}) = (-1)^m M, \quad (21)$$

这里 m 为聚焦圈数.

四、横向象差的定义与一级和三级横向象差的确定

在研究静电聚焦与电磁聚焦同心球系统时^[10], 我们曾证实了系统的横向象差与所定义的轴向初电位 ε_{z_1} 对应的象面位置有关. 如文献[10]所述, 横向象差 $\Delta \mathbf{r}(z_i)$ 定义为在 z_i 象面上实际轨迹的落点与理想象点之间的偏离, 即

$$\Delta \mathbf{r}(z_i) = \mathbf{r}_{\text{实}}(z_i, \varepsilon_z) - \mathbf{r}_{*}(z_i, \varepsilon_{z_1}), \quad (22)$$

式中 $\mathbf{r}_{\text{实}}(z_i, \varepsilon_z)$ 是高度为 $\mathbf{r}_0$ 、初电位为 ε_0 、初速度方向的角度为 α_0, β_0 , 其轴向初电位为 ε_z 的电子自阴极面发出的实际轨迹在 $z = z_i$ 象面上的平面矢量; $\mathbf{r}_{*}(z_i, \varepsilon_{z_1})$ 则是同一高度为 $\mathbf{r}_0$ 、轴向初电位为 ε_{z_1} 自阴极面发出的近轴电子轨迹在该象面上的平面矢量, 且

$$\mathbf{r}_{*}(z_i, \varepsilon_{z_1}) = \mathbf{r}_0 M.$$

按文献[10], 可将(22)式表示为

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_{*} + \delta \mathbf{r}. \quad (23)$$

这里

$$\Delta \mathbf{r}_* = \mathbf{r}_*(z_i, \varepsilon_z) - \mathbf{r}_*(z_i, \varepsilon_{z_1}), \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_*(z_i, \varepsilon_z) - \mathbf{r}_*(z_i, \varepsilon_z). \quad (25)$$

(24)式实际上乃是具有不同的轴向初电位 ε_z 与 ε_{z_1} 的两条近轴轨迹的落点在 z_i 象面上的偏离(见图1), $\Delta \mathbf{r}_*$ 为一级横向象差,或称近轴横向象差. 它可表为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_* = & [\omega(z_i, \varepsilon_z) e^{i\chi(z_i, \varepsilon_z)} - M] \mathbf{r}_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) h_0 v(z_i, \varepsilon_z) e^{i\chi(z_i, \varepsilon_z)} \\ & + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \dot{\mathbf{r}}_0 v(z_i, \varepsilon_z) e^{i\chi(z_i, \varepsilon_z)}. \end{aligned} \quad (26)$$

上式前二项与初速度方位角 β_0 无关, 而与 $\mathbf{r}_0$ 的一次方成正比, 称为径向与旋转方向的一级位移. 最后一项与 $\dot{\mathbf{r}}_0$ 相关, 乃是一级色球差, 即轴上点近轴横向色球差.

(25)式乃是具有相同的轴向初电位 ε_z 的实际轨迹与近轴轨迹的落点在 z_i 象面上的偏离(见图1), $\delta \mathbf{r}$ 为三级横向象差, 或称几何横向象差. 由(2)式, 它可表为

$$\delta \mathbf{r} = [(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) e^{i(\chi + \Delta \chi)} - \mathbf{u} e^{i\chi}]_{z_i}. \quad (27)$$

将上式中的 $e^{i\Delta \chi}$ 展开成级数形式, 略去高阶小量, 最后可得

$$\delta \mathbf{r} = [\Delta \mathbf{u} + \Delta \chi (\mathbf{k} \times \mathbf{u})]_{z_i} e^{i\chi(z_i, \varepsilon_z)} = \Delta \mathbf{u}_3 e^{i\chi(z_i, \varepsilon_z)}. \quad (28)$$

这里 $\Delta \mathbf{u}$ 乃是 $\mathbf{u}_*$ 与 $\mathbf{u}_z$ 之差引起的三级横向象差项, $\Delta \chi$ 乃是三级近似的轨迹与一级近似的轨迹的二旋转坐标系的角度之差, $\Delta \chi (\mathbf{k} \times \mathbf{u})$ 乃是由于磁场产生旋转而引起的三级横向象差项.

总的三级横向象差 $\Delta \mathbf{u}_3$ 内除了 $\Delta \mathbf{u}$ 外还应包括 $\Delta \chi (\mathbf{k} \times \mathbf{u})$ 的问题早已在文献[1]的(23a, b)式进行了论证, 但文献[8]怀疑 $\Delta \chi (\mathbf{k} \times \mathbf{u})$ 的象差项的存在, (28)式再一次给出了该项存在的证明. 由此可见, 求几何横向象差 $\delta \mathbf{r}$ 便归结于求 $\Delta \mathbf{u}$ 和 $\Delta \chi (\mathbf{k} \times \mathbf{u})$.

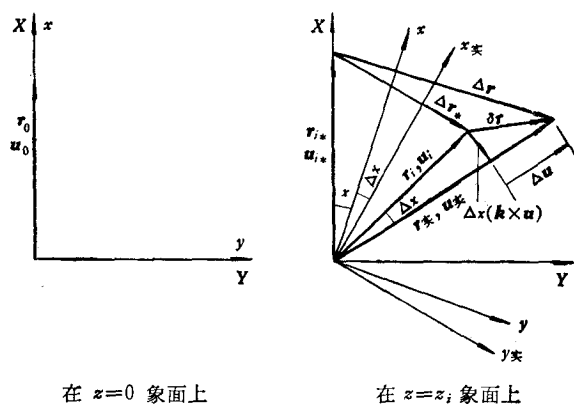


图1 一级横向象差与三级横向象差示意图

将实际轨迹方程(9)中的各系数展开, 保留到二级量, 略去四级以及更高级的量, 便得到二级近似的各式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi}{1 + r'^2} \right)_{0+2} = & \varepsilon_z + \phi(z) - \frac{\phi''(z)}{4} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^2 h^2 + \mathbf{u}_0^2 h_0^2 \\ & - 2(h - h_0) \sqrt{\varepsilon_z} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_0') \mathbf{k} - \mathbf{u}'^2 [\varepsilon_z + \phi(z)] + \mathbf{u}_0'^2 \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\left(\frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi}{1 + r'^2} \right) \right)_{0+2} = \phi'(z) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\phi''(z)}{4} \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^2 h^2 \right) - 2h' \sqrt{\epsilon_z} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k} - \frac{d}{dz} (\mathbf{u}^2 (\epsilon_z + \phi(z))), \quad (29b)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{u}^2)} \right)_{0+2} = -\frac{1}{4} \phi''(z) - h^2 + \frac{\phi'''(z)}{32} \mathbf{u}^2 + \frac{hh''}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{1}{4} h'' \sqrt{\epsilon_z} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k}. \quad (29c)$$

将以上三式代入(9)式,整理后,便得到近轴方程(13)与三级横向象差 $\Delta \mathbf{u}$ 的方程

$$V \Delta \mathbf{u}'' + \frac{1}{2} \phi' \Delta \mathbf{u}' + T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z). \quad (30)$$

这里 $\mathbf{F}$ 是象差方程的自由项,其中的 $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ 可用求解近轴轨迹方程(13)所得到的平面轨迹矢量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1$ 来代替. 在下面的讨论中,为简单起见,仍用 $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ 的符号,则可得到

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}'' S + \frac{1}{2} \mathbf{u}' \frac{dS}{dz} + \frac{1}{2} \mathbf{u} P, \quad (31)$$

式中

$$S = T \mathbf{u}^2 - h_0^2 \mathbf{u}_0^2 + 2 \sqrt{\epsilon_z} (h - h_0) (\mathbf{u} \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k} + \mathbf{u}^2 V - \mathbf{u}_0^2 \epsilon_z, \quad (32)$$

$$P = \left(\frac{1}{16} \phi'''(z) + h h'' \right) \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_z} h'' (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k}. \quad (33)$$

由(30)式出发,利用变动任意常数法和朗斯基行列式(17),便可得到三级横向象差 $\Delta \mathbf{u}$ 值为

$$\Delta \mathbf{u} = v(z, \epsilon_z) \int_0^z \mathbf{F} \frac{w}{\sqrt{V}} dz - w(z, \epsilon_z) \int_0^z \mathbf{F} \frac{v}{\sqrt{V}} dz, \quad (34)$$

而 $\Delta \chi$ 可由(3)式和(15)式求得

$$\Delta \chi(z) = \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{hS}{V} - \frac{h'' \mathbf{u}^2}{4} \right) \frac{dz}{\sqrt{V}}. \quad (35)$$

由(34)和(35)式,并考虑到三级近似和一级近似的轨迹初条件之差,便可得到在 $z = z_i$ 象面上总的三级横向象差为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_3 = \Delta \mathbf{u}_3(z_i) &= \frac{1}{8} h_0'' (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0^2 v(z_i, \epsilon_z) + v(z_i, \epsilon_z) \int_0^{z_i} \mathbf{F} \frac{w}{\sqrt{V}} dz \\ &\quad - w(z_i, \epsilon_z) \int_0^{z_i} \mathbf{F} \frac{v}{\sqrt{V}} dz + \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}(z_i)) \\ &\quad \times \int_0^{z_i} \left(\frac{hS}{V} - \frac{h'' \mathbf{u}^2}{4} \right) \frac{dz}{\sqrt{V}}. \end{aligned} \quad (36)$$

将(31)式代入(36)式,并利用分部积分和近轴方程(13)进行化简,便有

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_3(z_i) &= \frac{1}{8} h_0'' (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0^2 v(z_i, \epsilon_z) + \frac{1}{2} v(z_i, \epsilon_z) \int_0^{z_i} \frac{Pw}{\sqrt{V}} \mathbf{u} dz \\ &\quad - \frac{1}{2} w(z_i, \epsilon_z) \int_0^{z_i} \frac{Pv}{\sqrt{V}} \mathbf{u} dz - \frac{1}{2} v(z_i, \epsilon_z) \\ &\quad \times \int_0^{z_i} \frac{S}{V^{3/2}} (T w \mathbf{u} + V w' \mathbf{u}') dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} w(z_i, \varepsilon_z) \int_0^{z_i} \frac{S}{V^{3/2}} (T v \mathbf{u} + V v' \mathbf{u}') dz \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}(z_i)) \int_0^{z_i} \left(\frac{hS}{V} - \frac{h'' \mathbf{u}^2}{4} \right) \frac{dz}{\sqrt{V}}. \quad (37)
\end{aligned}$$

注意在给出 (29a) 式时, 已假定 $\phi''(z_0) = 0$, 故本文仅讨论平面阴极情况¹⁾.

应该指出, 总的三级横向象差 $\Delta \mathbf{u}_3$ 的表达式是由西门纪业首先导得的^[1], 虽然在形式上与 (37) 式有差异, 但实质上是一致的.

五、各个特殊类型三级横向象差系数的确定

由前所述, 在象面 z_i 处, 只有轴向初电位 $\varepsilon_z = \varepsilon_{z_1}$ 的电子才能理想成象, 其特解 $v(z_i, \varepsilon_{z_1}) = 0$, $w(z_i, \varepsilon_{z_1}) = (-1)^m M$. 而以轴向初电位 $\varepsilon_z \neq \varepsilon_{z_1}$ 逸出的近轴电子, 其特解 $v(z_i, \varepsilon_z) \neq 0$, $w(z_i, \varepsilon_z) \neq w(z_i, \varepsilon_{z_1})$. 因此, 必须计算 (37) 式的所有项, 才能得出全部三级横向象差.

将 (32), (33) 两式表示的 S, P 代入 (37) 式中, 经过繁复的运算, 便可得到与 ε_{z_1} 相对应的 z_i 象面上总的三级横向象差 $\Delta \mathbf{u}_3$ 的 x, y 的分量式

$$\begin{aligned}
\Delta u_{3x} = & \{E_w w(z_i) + E_v v(z_i)\} r_0^3 + \{[(C_w + D_w) \cos \beta_0 + c_w \sin \beta_0] w(z_i) \\
& + [(C_v + D_v) \cos \beta_0 + (c_v - d_v) \sin \beta_0] v(z_i)\} r_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}} \\
& + \{[G_w + F_w \cos 2\beta_0 + f_w \sin 2\beta_0] w(z_i) \\
& + [G_v + F_v \cos 2\beta_0 + f_v \sin 2\beta_0] v(z_i)\} r_0 \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}\right) \\
& + \{B_w \cos \beta_0 w(z_i) + [B_v \cos \beta_0 - b_v \sin \beta_0] v(z_i)\} \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}\right)^{3/2}, \quad (38a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u_{3y} = & \{e_w w(z_i) + e_v v(z_i)\} r_0^3 + \{[(D_w - C_w) \sin \beta_0 + c_w \cos \beta_0] w(z_i) \\
& + [(D_v - c_v) \sin \beta_0 + (c_v + d_v) \cos \beta_0] v(z_i)\} r_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}} \\
& + \{[g_w - f_w \cos 2\beta_0 + F_w \sin 2\beta_0] w(z_i) \\
& + [g_v - f_v \cos 2\beta_0 + F_v \sin 2\beta_0] v(z_i)\} r_0 \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}\right) \\
& + \{B_w \sin \beta_0 w(z_i) + [B_v \sin \beta_0 + b_v \cos \beta_0] v(z_i)\} \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_i}\right)^{3/2}, \quad (38b)
\end{aligned}$$

式中带下标 “ w ” 的各象差系数可表达如下:

$$\begin{aligned}
B_w = & -\frac{1}{2} V_i^{3/2} \int_0^{z_i} \left[W v^4 - \frac{K_{vv}(K_{vv} - 1)}{V} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
f_w = & -\frac{h_0}{\sqrt{V_i}} B_w + \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \left[\frac{h - h_0}{V} K_{vv} - \frac{h''}{4} v^2 \right] \frac{dz}{\sqrt{V}},
\end{aligned}$$

1) 对于 $\phi''(z_0) \neq 0$ 球面阴极情况, 将另文讨论.

$$\begin{aligned}
g_w &= 2f_w + \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \frac{h_0 K_{vv} - h}{V^{3/2}} dz, \\
F_w &= -\frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \left[W v^3 w - \frac{K_{vv} K_{vw}}{V} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
G_w &= 2F_w - \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \frac{K_{vw}}{V^{3/2}} dz, \\
c_w &= -2 \frac{h_0}{\sqrt{V_i}} F_w + \sqrt{V_i} \int_0^{z_i} \left[\frac{h}{V} K_{vw} - \frac{h''}{4} vw \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
D_w &= -\sqrt{V_i} \int_0^{z_i} \left[W(h_0^2 v^2 + w^2) v^2 - \frac{1}{2} h_0 h'' v^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(K_{ww} + h_0^2 K_{vv} - 2hh_0)}{V} K_{vv} + \frac{\phi''}{8V} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
C_w &= -\frac{1}{2} D_w - \sqrt{V_i} \int_0^{z_i} \left[W v^2 w^2 - \frac{K_{vw}^2}{V} - \frac{\phi''}{16V} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
e_w &= -\frac{h_0}{2\sqrt{V_i}} D_w - \frac{h_0}{16} \int_0^{z_i} \frac{\phi''}{V^{3/2}} dz + \frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left[\frac{h}{V} (K_{ww} + h_0^2 K_{vv} - 2hh_0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{h''}{4} (h_0^2 v^2 + w^2) \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
E_w &= -\frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left[W(h_0^2 v^2 + w^2) vw - \frac{1}{2} h_0 h'' vw \right. \\
&\quad \left. - \frac{(K_{ww} + h_0^2 K_{vv} - 2hh_0)}{V} K_{vw} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}; \tag{39a}
\end{aligned}$$

而带下标“v”的各象差系数可表为

$$\begin{aligned}
B_v &= \sqrt{V_i} F_w - \sqrt{V_i} G_w, \\
b_v &= \frac{1}{2} V_i^{3/2} \int_0^{z_i} \left[\frac{h}{V} (K_{vv} - 1) - \frac{h''}{4} v^2 \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
f_v &= -\sqrt{V_i} c_w - h_0 F_w, \\
F_v &= -\frac{\sqrt{V_i}}{4} D_w - \frac{\sqrt{V_i}}{2} C_w - \frac{h_0}{\sqrt{V_i}} b_v \\
&\quad + \frac{1}{32} V_i \int_0^{z_i} \frac{\phi''}{V^{3/2}} dz + \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \frac{h(h - h_0)}{V^{3/2}} dz, \\
G_v &= -F_v + \frac{h_0}{\sqrt{V_i}} b_v - \frac{1}{2} \sqrt{V_i} D_w - \sqrt{V_i} c_w + \frac{1}{16} V_i \int_0^{z_i} \frac{\phi''}{V^{3/2}} dz \\
&\quad + \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \left[W v^2 w^2 - \frac{(K_{vv} - 1) K_{ww}}{V} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
g_v &= h_0 G_w, \\
D_v &= h_0 c_w + \frac{h_0^2}{\sqrt{V_i}} F_w - \sqrt{V_i} E_w + \frac{1}{2} \sqrt{V_i} \int_0^{z_i} [W v w^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{K_{ww}}{V} K_{vw} \left] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \right. \\
C_v &= D_v - h_0 c_w + \sqrt{V_i} E_w, \\
c_v &= -\sqrt{V_i} e_w + h_0 C_w, \\
d_v &= h_0 D_w + 2\sqrt{V_i} e_w, \\
E_v &= h_0 e_w + \frac{h_0^2}{2\sqrt{V_i}} D_w + \frac{1}{16} h_0^2 \int_0^{z_i} \frac{\phi''}{V^{3/2}} dz \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left[W(h_0^2 v^2 + w^2) w^2 - \frac{1}{2} h_0 h'' w^2 \right. \\
& \left. - \frac{(K_{ww} + h_0^2 K_{vv} - 2hh_0)}{V} K_{ww} \right] \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
e_v &= \frac{1}{8} h_0'' + h_0 E_w, \tag{39b}
\end{aligned}$$

式中 V_i 为象面 $z = z_i$ 处的电位,

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{16} \phi^{IV} + hh'', \quad K_{vv} = Tv^2 + Vv'^2 \\
K_{vw} &= Tv w + Vv' w', \quad K_{ww} = Tw^2 + Vw'^2. \tag{40}
\end{aligned}$$

(38)和(39)式中 $E_{v,w}$ 和 $e_{v,w}$ 表示三级畸变项; $C_{v,w}$, $D_{v,w}$, $c_{v,w}$, d_v 和 a_v 表示三级场曲与象散项; $G_{v,w}$, $F_{v,w}$, $g_{v,w}$ 和 $f_{v,w}$ 表示三级彗差项, 而 $B_{v,w}$ 和 $b_{v,w}$ 表示三级色球差项.

若令 (38) 式中的 $v(z_i) = 0$, 则本文导出的带有下标 “ w ” 的 (39a) 式便可转化为西门纪业^[1] 与 Бонштедт^[2] 给出的各象差系数表达式, 我们将在下一节证明.

六、文献 [1, 2] 象差方程的自由项与象差系数的比较

关于象差方程的自由项 F , Бонштедт 断言, 由于文献 [1] 的下述展开式有错误, 从而导致自由项 F 以及象差系数各表达式亦有误.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)_{0+2} &= V_p - \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{k} \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}^2 \right|_{z_a}, \tag{20a}
\end{aligned}$$

文献 [1] (20a) 式

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{0+2} &= V'_p - \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{d}{dz} (V'' + \mathcal{H}^2) \\
& - \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{k} \mathcal{H}', \tag{20b}
\end{aligned}$$

文献 [1] (20b) 式

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{u}^2)} \right)_{0+2} = -\frac{1}{4} (V'' + \mathcal{H}^2) + \frac{1}{32} \mathbf{u}^2 (V^{IV} + 4\mathcal{H} \mathcal{H}'')$$

$$+ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{k} \mathcal{H}'''. \quad \text{文献[1] (20c) 式}$$

上述表达式是文献[1]中(20)式过渡到非相对论情况下的结果.

如果注意到 $\mathcal{H} = 2h$, $V_p = \phi(z) + \varepsilon_z = V$, 则不难看出文献[1]中的(20a), (20c) 两式与文献[2]中的(13), (15)式即本文的(29a), (29c) 式是完全一致的.

对于文献[1]中的(20b)式, 可由文献[2]中的(14)式即本文的(29b)式出发推导:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi}{1 + r'^2} \right) \right]_{0+2} = \phi'(z) - \mathbf{u}^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{4} \phi'' + h^2 \right) - 2h' \sqrt{\varepsilon_z} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}'_0) \mathbf{k} \\ - 2\mathbf{u}' \left\{ \mathbf{u}''(\phi(z) + \varepsilon_z) + \frac{1}{2} \mathbf{u}' \phi' + \left(\frac{\phi''}{4} + h^2 \right) \mathbf{u} \right\}. \quad (41)$$

由此可见, (41)式与文献[1]中(20b)式的差别即在(41)式的最后一行诸项. 在构成自由项 $\mathbf{F}$ 时, Бонштедт 的表达式实质上多了这些项. 我们知道, 在解三级横向象差方程(30)时, 自由项 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'z)$ 中的 $\mathbf{u}$ 将由线性方程(13)的解 $\mathbf{u}_1$ 代之, 于是

$$- 2\mathbf{u}'_1 \left\{ [\phi(z) + \varepsilon_z] \mathbf{u}''_1 + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_1 \phi' + \left(\frac{\phi''}{4} + h^2 \right) \mathbf{u}_1 \right\} = 0.$$

因此, 虽然表面上看来两文的 $\mathbf{F}$ 表达式迥然不同, 但实质上是完全一致的.

下面考察两文中的象差系数. 由(38)式, 若令 $v(z_i) = 0$, 并以 Δx , Δy , x_0 , x 和 V_a 替代 Δu_{ix} , Δu_{iy} , r_0 , β_0 与 V_i , 则可得到文献[2]中的(30)式

$$\frac{\Delta x}{w(z_i)} = E x_0^3 + [(C + D) \cos \chi + c \sin \chi] x_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a}} \\ + [G + F \cos 2\chi + f \sin 2\chi] x_0 \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a} \right) \\ + B \cos \chi \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a} \right)^{3/2}, \\ \frac{\Delta y}{w(z_i)} = e x_0^3 + [(D - C) \sin \chi + c \cos \chi] x_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a}} \\ + [g - f \cos 2\chi + F \sin 2\chi] x_0 \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a} \right) \\ + B \sin \chi \left(\frac{\varepsilon_{\perp}}{V_a} \right)^{3/2}, \quad \text{文献[2] (30) 式}$$

式中象差系数 E, e, C, D, c 等见文献[2]中的(31)各式, 它应是本文(39a)式带有下标“ w ”的相应各式. 将本文(39a)各式与文献[2]的(31)各式相比较, 不难看出, Бонштедт^[2]所给出的(31)各式中确有不少遗漏和错误, 需要加以补正. 如各象差系数表达式的积分号前都少了系数 $1/2$, 且(31)式的第一式的 $V_a^{3/2}$ 应为 $-V_a^{3/2}$, 第二式的 B 应为 $-B$.

现考察西门纪业^[1]当 $v(z_i, \varepsilon_z) = 0$ 时按 $\mathbf{u}_a$ 和 $\dot{\mathbf{u}}_a$ 展开的三级横向象差表达式

$$\Delta \mathbf{u}_{3b} = (A_1 \mathbf{u}_a^3 + A_2 \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_a^*) + [2B_1 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a^* + 2B_2 (\mathbf{u}_a \cdot \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a \\ + B_3 \mathbf{u}_a^2 \dot{\mathbf{u}}_a] + 2[C_1 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a + C_2 (\mathbf{u}_a \cdot \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a^*] \\ + [D_1 \dot{\mathbf{u}}_a^2 \mathbf{u}_a + 2D_2 (\mathbf{u}_a \cdot \dot{\mathbf{u}}_a) \dot{\mathbf{u}}_a] \\ + [E_1 \dot{\mathbf{u}}_a^2 \mathbf{u}_a^* + 2E_2 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \dot{\mathbf{u}}_a] + F \dot{\mathbf{u}}_a^3 \quad \text{文献[1] (28) 式}$$

式中 $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$ 等象差系数见文献[1]中的(29)式. 为了将上式与 Бонштедт^[2] 的(30)式相比较, 先将文献[1]中(29)式的象差系数各表达式进行以下变换:

$$\mathcal{H}(z) \Rightarrow 2h(z), \quad u_1(z) \Rightarrow \sqrt{\frac{m_0}{2e}} v(z), \quad u_2(z) \Rightarrow w(z), \quad m \Rightarrow w(z_i),$$

同时注意到本文(40)式的符号, 并利用边界条件 $v(0) = 0, v(z_i, \epsilon_z) = 0$, 将象差系数进行分部积分, 则文献[1]中(29)式各系数可表达如下:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left\{ W v w^3 - \frac{K_{vw}}{V} (K_{ww} - h_0^2) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{A_2}{w(z_i)} &= \frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left\{ \frac{h}{V} (K_{ww} - h_0^2) - \frac{h''}{4} w^2 \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{B_1}{w(z_i)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_0^{z_i} \frac{h(h - h_0)}{V^{3/2}} dz, \\ \frac{B_2}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_0^{z_i} \left\{ W v^2 w^2 - \frac{K_{vw}^2}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{B_3}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_0^{z_i} \left\{ W v^2 w^2 - \frac{K_{vv}}{V} (K_{ww} - h_0^2) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{C_1}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_0^{z_i} \left\{ \frac{h''}{4} v w - \frac{K_{vw}}{V} (h - h_0) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{C_2}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_0^{z_i} \left\{ \frac{h''}{4} v w - \frac{h}{V} K_{vw} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{D_1}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2e} \right) \int_0^{z_i} \left\{ W v^3 w - \frac{K_{vw}}{V} (K_{vv} - 1) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{D_2}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2e} \right) \int_0^{z_i} \left\{ W v^3 w - \frac{K_{vw}}{V} K_{vv} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{E_1}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2e} \right) \int_0^{z_i} \left\{ \frac{h''}{4} v^2 - \frac{h}{V} (K_{vv} - 1) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{E_2}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2e} \right) \int_0^{z_i} \left\{ \frac{h''}{4} v^2 - \frac{K_{vv}}{V} (h - h_0) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\ \frac{F}{w(z_i)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2e} \right)^{3/2} \int_0^{z_i} \left\{ W v^4 - \frac{K_{vv}}{V} (K_{vv} - 1) \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}. \end{aligned} \quad (42)$$

令 $\mathbf{u}_a = \mathbf{i}x_0, \mathbf{u}_a^* = \mathbf{j}x_0$,

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \{ \mathbf{i} \sqrt{\epsilon_\perp} \cos \chi + \mathbf{j} [\sqrt{\epsilon_\perp} \sin \chi - x_0 h_0] \},$$

$$(\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} [\sqrt{\epsilon_\perp} \sin \chi - x_0 h_0] x_0 \mathbf{k},$$

则文献[1]的(28)式的 x, y 分量亦可表成文献[2]的(30)式的形式. 若已对文献[2]中(31)各式的遗漏和错误进行补正, 则两文中象差系数的对应关系为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(z_i)} \left\{ A_1 - 2 \sqrt{\frac{2e}{m_0}} h_0 C_1 + \frac{2e}{m_0} h_0^2 D_1 \right\} &= E, \\
\frac{\sqrt{V_a}}{w(z_i)} \left\{ \sqrt{\frac{2e}{m_0}} (2B_2 + B_3) - 2 \left(\frac{2e}{m_0} \right) h_0 E_2 + \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} h_0^2 F \right\} &= C + D, \\
\frac{\sqrt{V_a}}{w(z_i)} \left\{ 2 \sqrt{\frac{2e}{m_0}} C_1 - 2 \left(\frac{2e}{m_0} \right) h_0 D_1 \right\} &= c, \\
\frac{V_a}{w(z_i)} \left\{ \frac{2e}{m_0} (D_1 + D_2) \right\} &= G, \\
\frac{V_a}{w(z_i)} \left(\frac{2e}{m_0} D_2 \right) &= F, \\
\frac{V_a}{w(z_i)} \left\{ \frac{2e}{m_0} E_2 - \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} h_0 F \right\} &= f, \\
\frac{V_a^{3/2}}{w(z_i)} \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} F &= B, \\
\frac{\sqrt{V_a}}{w(z_i)} \left\{ \sqrt{\frac{2e}{m_0}} (2B_1 + B_3) - 2 \left(\frac{2e}{m_0} \right) h_0 (E_1 + 2E_2) + 3 \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} h_0^2 F \right\} &= D - C, \\
\frac{V_a}{w(z_i)} \left\{ \frac{2e}{m_0} (E_1 + E_2) - 2 \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} h_0 F \right\} &= g, \\
\frac{\sqrt{V_a}}{w(z_i)} \left\{ 2 \sqrt{\frac{2e}{m_0}} C_2 - 2 \left(\frac{2e}{m_0} \right) h_0 D_2 \right\} &= c, \\
\frac{1}{w(z_i)} \left\{ A_2 - \sqrt{\frac{2e}{m_0}} h_0 (2B_1 + B_3) + \frac{2e}{m_0} h_0^2 (E_1 + 2E_2) - \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} h_0^2 F \right\} &= e \quad (43)
\end{aligned}$$

这样, 我们便证明了这两篇文章中的总的三级横向象差表达式实质上是一致的, 如果将文献 [2] 中 (31) 各式作了补正, 则两文的象差系数表达式可以互相转化. 这说明, Бонштедт 对于文献 [1] 的批评是不正确的.

七、静电阴极透镜各种特殊类型的三级横向象差系数

静电阴极透镜在对应于 $v(z_i, \varepsilon_s) = 0$ 象面上的三级横向象差, 早已由 Recknagel^[3] 导出. 西门纪业^[1] 由导出的电磁复合聚焦阴极透镜的象差公式当 $\mathcal{H}(z) = 0$ 时, 利用分部积分, 消去象差系数中含有的高于二阶以上的电位导数, 亦可化到 Recknagel 的情况. 当考虑 $v(z_i, \varepsilon_s) \approx 0$, 即在 ε_{z_1} 相对应的象面上不含电位高阶导数的象差系数表达式, 我们曾在文献 [12] 中给出过. 从我们导出的三级横向象差公式 (38a, b) 出发, 若令 $h(z) = 0$, 亦可得到上述相同的结论.

在静电情况下, $h(z) = 0$, (14) 与 (40) 式各量便化为如下形式:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4} \phi'', \quad W = \frac{1}{16} \phi^{IV}, \quad K_{vv} = \frac{1}{4} \phi'' v^2 + V v'^2, \\
K_{vw} &= \frac{1}{4} \phi'' v w + V v' w', \quad K_{ww} = \frac{1}{4} \phi'' w^2 + V w'^2.
\end{aligned}$$

于是 (38a, b) 式中所有含有 $h(z)$ 以小写英文字母表示的象差系数如 $f_w, g_w, f_v, g_v, \dots$ 等都等于零. 同样, 类似于文献 [1, 3, 12], 将象差系数的积分表达式化成不含有电位高阶导数的情况, 于是有

$$\begin{aligned}
 B_w &= -\frac{1}{32} V_i^{3/2} \left| \left(\frac{\phi'''}{\sqrt{V}} + \frac{1}{2} \frac{\phi''\phi'}{V^{3/2}} \right) v^4 - \frac{4\phi''v^3v'}{\sqrt{V}} \right|_0^{z_i} \\
 &\quad - \frac{1}{2} V_i^{3/2} \int_0^{z_i} \left\{ \left(-\frac{3}{32} \frac{\phi''^2}{V} + \frac{3}{64} \frac{\phi''\phi'^2}{V^2} \right) v^4 - \frac{3}{8} \frac{\phi''\phi'}{V} v^3v' \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} \phi''v^2v'^2 - \frac{K_{vv}(K_{vv}-1)}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
 F_w &= -\frac{1}{32} V_i \left| \left(\frac{\phi'''}{\sqrt{V}} + \frac{1}{2} \frac{\phi''\phi'}{V^{3/2}} \right) v^3w - \frac{3\phi''v^2v'w}{\sqrt{V}} - \frac{\phi''v^3w'}{\sqrt{V}} \right|_0^{z_i} \\
 &\quad - \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \left\{ \left(-\frac{3}{32} \frac{\phi''^2}{V} + \frac{3}{64} \frac{\phi''\phi'^2}{V^2} \right) v^3w - \frac{9}{32} \frac{\phi''\phi'}{V} \right. \\
 &\quad \times \left(v^2v'w + \frac{1}{3} v^3w' \right) + \frac{3}{8} \phi''(vv'^2w + v^2v'w') \\
 &\quad \left. - \frac{K_{vw}K_{vv}}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
 D_w &= -\frac{1}{16} \sqrt{V_i} \left| \left(\frac{\phi'''}{\sqrt{V}} + \frac{1}{2} \frac{\phi''\phi'}{V^{3/2}} \right) v^2w^2 - \frac{2\phi''vv'w^2}{\sqrt{V}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\phi''v^2ww'}{\sqrt{V}} \right|_0^{z_i} - \sqrt{V_i} \int_0^{z_i} \left\{ \left(-\frac{3}{32} \frac{\phi''^2}{V} + \frac{3}{64} \frac{\phi''\phi'^2}{V^2} \right) v^2w^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{16} \frac{\phi''\phi'}{V} (vv'w^2 + v^2ww') + \frac{1}{8} \phi''(v'^2w^2 + 4vv'ww' + v^2w'^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{K_{ww}K_{vv}}{V} + \frac{\phi''}{8V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
 G_w &= 2F_w - \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \frac{K_{vw}}{V^{3/2}} dz, \\
 C_w &= \frac{1}{2} D_w + \sqrt{V_i} \int_0^{z_i} \left\{ \frac{K_{vw}^2 - K_{ww}K_{vv}}{V} + \frac{3}{16} \frac{\phi''}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
 E_w &= -\frac{1}{32} \left| \left(\frac{\phi'''}{\sqrt{V}} + \frac{1}{2} \frac{\phi''\phi'}{V^{3/2}} \right) vw^3 - \frac{3\phi''w^2w'v}{\sqrt{V}} - \frac{\phi''w^3v'}{\sqrt{V}} \right|_0^{z_i} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left\{ \left(-\frac{3}{32} \frac{\phi''^2}{V} + \frac{3}{64} \frac{\phi''\phi'^2}{V^2} \right) vw^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{9}{32} \frac{\phi''\phi'}{V} \left(w^2w'v + \frac{1}{3} w^3v' \right) + \frac{3}{8} \phi''(ww'^2v + w^2w'v') \right. \\
 &\quad \left. - \frac{K_{ww}K_{vw}}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
 B_v &= \sqrt{V_i} (F_w - G_w), \\
 F_v &= -\frac{1}{4} \sqrt{V_i} D_w - \frac{1}{2} \sqrt{V_i} C_w + \frac{1}{32} V_i \int_0^{z_i} \frac{\phi''}{V^{3/2}} dz,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_v &= -\frac{3}{4} \sqrt{V_i} D_w - \frac{1}{2} \sqrt{V_i} C_w + \frac{1}{2} V_i \int_0^{z_i} \left(\frac{K_{ww}}{V} - \frac{\phi''}{16V} \right) \frac{dz}{\sqrt{V}}, \\
D_v &= -\sqrt{V_i} E_w, \\
C_v &= -2\sqrt{V_i} E_w, \\
E_v &= +\frac{1}{32} \left| \left(\frac{\phi'''}{\sqrt{V}} + \frac{1}{2} \frac{\phi''\phi'}{V^{3/2}} \right) w^4 - \frac{4\phi''w^3w'}{\sqrt{V}} \right|_0^{z_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{z_i} \left\{ \left(-\frac{3}{32} \frac{\phi''^2}{V} + \frac{3}{64} \frac{\phi''\phi'^2}{V^2} \right) w^4 - \frac{3}{8} \frac{\phi''\phi'}{V} w^3w' \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} \phi''w^2w'^2 - \frac{K_{ww}^2}{V} \right\} \frac{dz}{\sqrt{V}}. \tag{44}
\end{aligned}$$

若令 $v(z_i, \varepsilon_z) = 0$, $v \Rightarrow \sqrt{\frac{2e}{m_0}} u_1$, $w \Rightarrow u_2$, 则可将(44)式进一步化简, 其结果与文献[1]中不含电位高阶导数的静电透镜象差系数公式(32)完全符合, 其对应关系为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(z_i)} A_1 &= E_w, \\
-\frac{1}{w(z_i)} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \sqrt{V_a} (2B_2 + B_3) &= C_w + D_w, \\
\frac{1}{w(z_i)} \frac{2e}{m_0} V_a (D_1 + D_2) &= G_w, \\
-\frac{1}{w(z_i)} \frac{2e}{m_0} V_a D_2 &= F_w, \\
\frac{1}{w(z_i)} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \sqrt{V_a} (2B_1 + B_3) &= D_w - C_w, \\
\frac{1}{w(z_i)} \left(\frac{2e}{m_0} \right)^{3/2} V_a^{3/2} F &= B_w. \tag{45}
\end{aligned}$$

八、实 例

现以均匀平行电磁复合聚焦系统为例, 考察该系统的一级横向象差与三级横向象差。

$$\text{令 } h(z) = h_0, \quad \phi'(z) = \frac{V_i}{l} = \text{常数}, \quad V(z) = \frac{V_i}{l} z + \varepsilon_z$$

因此可得

$$\phi'' = \phi''' = \phi^{IV} = 0, \quad h' = h'' = 0, \quad T = h_0^2, \quad W = 0.$$

线性方程(13)标量形式的特解可表为

$$\begin{aligned}
v(z) &= \frac{1}{h_0} \sin \chi(z), \\
w(z) &= \cos \chi(z) \tag{46}
\end{aligned}$$

式中

$$\chi(z) = k \left\{ \sqrt{z + \frac{\epsilon_z}{V_i} l} - \sqrt{\frac{\epsilon_{z_1}}{V_i} l} \right\}, \quad (47)$$

这里

$$k = 2h_0 \sqrt{\frac{l}{V_i}}.$$

设电子在 $\epsilon_z = \epsilon_{z_1}$ 对应的象面上理想成像, 即 $\chi(z_i = l)|_{\epsilon_{z_1}} = m\pi$, 便可导出成像位置与放大率为

$$z_i = l = \left(\frac{m\pi}{k} \right)^2 + \frac{2m\pi}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_{z_1}}{V_i} l}, \quad (48)$$

$$M = (-1)^m \cos(m\pi) = 1.$$

此系统内运动的电子轨迹, 按(2), (10)式与(19)式, 并考虑到 $\theta_0 = 0$, 则可表达成以下的指数形式^[13]:

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{r}_0 + \sqrt{\epsilon_{z_1}} \frac{\sin \chi}{h_0} e^{i(\beta_0 + \chi)}. \quad (49)$$

现讨论系统的一级横向象差与三级横向象差, 由(40)与(46)式可知,

$$K_{vv} = 1, \quad K_{ww} = h_0^2, \quad K_{vw} = 0.$$

将以上关系式均代入三级横向象差系统表达式 (39a, b) 中, 不难发现, 所有的各种特殊类型的象差系数 (无论带有下标“w”或是下标“v”) 均等于零. 此乃是由于在均匀平行复合场中以 ϵ_z 逸出的实际轨迹与近轴轨迹完全相同所致. 因之, 在 z_i 象面上系统只剩下一级横向象差.

系统的近轴横向象差即一级横向象差 $\Delta \mathbf{r}_*(z_i)$ 按(24)与(49)式可表为

$$\Delta \mathbf{r}_*(z_i) = \sqrt{\epsilon_{z_1}} \frac{\sin \chi(z_i)}{h_0} e^{i(\beta_0 + \chi(z_i))}. \quad (50)$$

这里 $\chi(z_i)$ 乃是轴向初电位 ϵ_z 的近轴电子使旋转坐标系在 $z_i = l$ 的象面上多转或少转的角度, 它可表为

$$\chi(z_i = l)|_{\epsilon_z} = m\pi + \frac{2h_0}{\phi'_0} (\sqrt{\epsilon_{z_1}} - \sqrt{\epsilon_z}) - \frac{h_0}{\phi'_0 \sqrt{V_i}} (\epsilon_{z_1} - \epsilon_z) \quad (51)$$

将上式代入(50)式, 并以 $-E_c$ 代以 ϕ'_0 , 便可求得近轴横向象差的表达式为

$$\Delta \mathbf{r}_* = \left\{ -\frac{2}{E_c} \sqrt{\epsilon_{z_1}} (\sqrt{\epsilon_{z_1}} - \sqrt{\epsilon_z}) + \frac{1}{E_c \sqrt{V_i}} \sqrt{\epsilon_{z_1}} (\epsilon_{z_1} - \epsilon_z) \right\}$$

$$\times \exp \left\{ i \left[\beta_0 - \frac{2h_0}{E_c} (\sqrt{\epsilon_{z_1}} - \sqrt{\epsilon_z}) + \frac{h_0}{E_c \sqrt{V_i}} (\epsilon_{z_1} - \epsilon_z) \right] \right\}.$$

由此可见, 均匀平行电磁复合聚焦系统的三级横向象差等于零, 于是只剩下一级横向象差 (表现为一阶与二阶横向色球差). 这与文献[11]的结果是一致的.

九、结 语

由上述的研究可以得到以下几点:

1. 西门纪业和 Бонштедт 两文的象差方程的自由项 F 及其象差系数表达式虽然形式上迥然不同, 实质上是互相转化的, 是完全一致的. 本文证明了 Бонштедт 对西门纪业的批评是不正确的. 相反, Бонштедт 给出的象差系数表达式却有一些遗漏与错误, 需要加以补正.

2. 无论对于静电聚焦或是电磁复合聚焦阴极透镜, 以高度 r_0 , 初条件为 $\epsilon_0, \alpha_0, \beta_0$ (其轴向初电位为 ϵ_z) 逸出的实际电子轨迹在轴向初电位 ϵ_{z_1} 对应的象面上与理想成象位置的差异定义为横向象差, 它表现为一级横向象差(近轴横向象差)与三级横向象差(几何横向象差)的矢量和.

3. 一级横向象差表现为一级横向色球差与一级位移; 三级横向象差表现为中心色球差、场曲与象散、彗差与畸变等. 由于逸出电子 $\epsilon_z \approx \epsilon_{z_1}$, 其 $v(z_i, \epsilon_z) \approx 0$, 因此, 三级横向象差应包含 $v(z_i, \epsilon_z) \approx 0$ 有关的积分项.

4. 均匀平行电磁复合聚焦系统的实例表明, 在这个系统中, 尽管不存在三级横向象差, 却存在一级横向象差.

作者对于北京大学无线电电子学系西门纪业副教授在本课题研究给予的热忱支持与帮助表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] 西门纪业 (Ximen Ji-ye), 物理学报 (*Acta Phys. Sinica*), **13** (1957), 339.
- [2] Б. Э. Бонштедт, *Радиотехника и электроника*, **9** (5) (1964), 844.
- [3] A. Recknagel, *Z. F. Phys.*, **117** (1941), 689.
- [4] Л. А. Арцимович, *изв. АН СССР сер. физ.* **8** (1944), 313.
- [5] Ю. В. Воробьев, *ЖТФ*, **26** (1956), 2269.
- [6] E. Hahn, *Jenaer Jahrb.*, **1** (1958), 184.
- [7] В. М. Кельман, А. А. Сапаргалиев, Б. М. Якушев, *ЖТФ*, **43** (1) (1973), 52.
- [8] Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский, Х. И. Фейгин, *Радиотехника и электроника*, **23** (1) (1978), 167.
- [9] А. В. Власов и Ю. А. Шапиро, «Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем» Л. Машиностроение, (1974).
- [10] L. W. Chou (周立伟), In "Adv. E. E. P.", **52** (1979), 119.

ON ABERRATION THEORY OF THE COMBINED ELECTROMAGNETIC FOCUSING CATHODE LENSES

ZHOU LI-WEI AI KE-CONG PAN SHUN-CHEN

(*Beijing Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this article, the aberration theory of the combined electromagnetic focussing cathode lenses is described, and the two previous representative papers concerning the aberration theory of cathode lenses, the first contributed by Ximen Jiye (1957)^[1] and next by B. E. Bonschtedt (1964)^[2], are emphatically analyzed and commented. It is shown that the formulae of aberration coefficients for the cathode lenses given by them, although different in form, can be transformed from one to another; and it is enough to prove that the criticism of B. E. Bonschtedt addressed to Ximen Jiye, is improper.

It is worth noticing that the aberrations of cathode lenses must be considered at the image plane with regard to ϵ_{x_1} — a certain initial energy of electron in axial direction, then the formulae of all the transverse aberrations including the first order and third order aberrations for the combined electromagnetic focussing cathode lenses can be derived. It is expected that these formulae will be closer to practice than those derived formerly.