

指向性辐射器的简正波声场

张 仁 和 朱 柏 贤

(中国科学院声学研究所)

1982 年 4 月 9 日收到

提 要

本文讨论比较一般的指向性辐射器在分层介质中的声场,并将指向性概念应用于简正波计算。结果表明,对无方向性点源的简正波表示式补充以指向性激发函数,就可得到指向性辐射器的简正波声场,而指向性激发函数与辐射器的位置及指向特性有关。文中还分别计算了具有垂直对称性、反对称性、单边指向性以及尖锐指向性的辐射器的简正波声场。

对于均匀水层中的垂直线阵,若源的分布函数正比于某一简正波的本征函数,则指向性激发函数的零点正好对应于其他简正波的本征射线的方向。

一、引 言

为了提高给定方向的有效声功率并降低其他方向的混响干扰,实际工作中广泛使用具有指向性的声辐射器。最近,尖锐指向性的参量阵被应用于水声传播实验^[1-3],更增加了研究指向性辐射器声场的兴趣。在计算界面混响时常将散射元视为具有指向性的二次声源,分析海洋噪声也常假定随机分布于海面上的噪声源具有一定的指向性,因此研究指向性源的声场具有理论上的重要性。辐射器的指向性是一个十分有用的概念,但一般仅适用于均匀介质。为了将指向性的概念推广应用于简正波计算上,我们来讨论指向性辐射器在分层介质中的声场。

文献[4]用算符方法分析过平面辐射器在分层介质中的声场,对于具有垂直对称性的辐射器给出了比较简明的简正波表示式。文献[5,6]利用线性迭加原理计算过垂直线源在均匀浅海中的简正波声场,文献[7]利用多极矩展开方法分析过指向性源的声场。本文将讨论比较一般的指向性辐射器在分层介质中的声场,进一步推广文献[4]的结果。

二、点源声场的简正波表示式

对于一个无方向性的简谐点源,声源附近的声场为

$$R \approx 0, \quad P = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (1)$$

式中 R 为声源至接收点的距离。简谐点源在分层介质中的声场 $G(x_1, y_1, z_1 | x_2, y_2, z_2)$ 可表为简正波之和,

$$G = \sqrt{\frac{8\pi}{r}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_l \phi(z_1, \nu_l) \phi(z_2, \nu_l) \sqrt{\nu_l} e^{-\beta_l r + i\mu_l r}, \quad kr \gg 1, \quad (2)$$

式中 $\nu_l = \mu_l + i\beta_l$ 为简正波的本征值, $\phi(z, \nu_l)$ 为本征函数, z_1 与 z_2 为声源与接收器深度, $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 为水平距离。

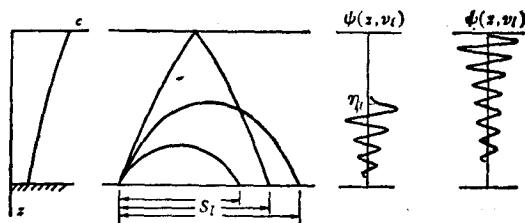


图1 负梯度浅海中的本征射线与本征函数

为确定起见,我们以负梯度浅海为例,讨论本征函数的近似表示式。在负梯度情况下,声场由反转简正波与反射简正波组成。反转简正波的本征射线在水层中发生反转,反射简正波的本征射线在海面与海底发生反射,见图1。反转简正波的能量主要分布在反转深度 η_l 之下,在反转深度以上本征函数可近似地取为零

$$\phi(z, \nu_l) = 0 \quad 0 \leq z < \eta_l. \quad (3)$$

两类简正波的本征函数可简写为^[8]

$$\phi(z, \nu_l) = \sqrt{\frac{2}{S_l}} q(z, \nu_l) \sin \left[\int_{\zeta_l}^z \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right], \quad (4)$$

其中

$$\text{反转简正波} \quad \zeta_l = \eta_l, \quad \Theta = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{反射简正波} \quad \zeta_l = 0, \quad \Theta = 0. \quad (5)$$

(4)式中 S_l 为本征射线的跨度,函数 $q(z, \nu_l)$ 由下列公式给出^[8]:

$$\text{反转简正波} \quad q(z, \nu_l) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z < \eta_l \\ [Ed^{2/3}(\eta_l) + k^2(z) - \mu_l^2]^{-1/4} & \eta_l \leq z \leq h; \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{反射简正波} \quad q(z, \nu_l) = [Ed^{2/3}(0) + k^2(z) - \mu_l^2]^{-1/4} \quad 0 \leq z \leq h. \quad (7)$$

此处 $d(z) = dk^2(z)/dz$, $E = 0.875$.

将(4)式代入(2)式,得点源声场的简正波近似表示式

$$G = 2 \sqrt{\frac{8\pi}{r}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\mu_l}}{S_l} q(z_1, \nu_l) q(z_2, \nu_l) \sin \left[\int_{\zeta_l}^{z_1} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] \\ \times \sin \left[\int_{\zeta_l}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] e^{-\beta_l r + i\mu_l r}. \quad (8)$$

三、指向性源在分层介质中的声场

设指向性辐射器由分布在有限空间(体,面或线上)的点源构成,源的分布函数为

$Q(x_1, y_1, z_1)$, 它在无界均匀介质中的声场为

$$P_0 = \iiint_V Q(x_1, y_1, z_1) \frac{e^{ikR}}{R} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (9)$$

式中

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (10)$$

设辐射器的线度为 L , 当

$$\frac{kL^2}{R_0} \ll 1 \quad (11)$$

时, 在积分(9)式中可采用 Fraunhofer 近似

$$kR \cong kR_0 - k\xi \cos \alpha \cos \varphi - k\eta \cos \alpha \sin \varphi - k\zeta \sin \alpha. \quad (12)$$

此处 $R_0 = \sqrt{(x_2 - \bar{x}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_1)^2 + (z_2 - \bar{z}_1)^2}$, $\xi = (x_1 - \bar{x}_1)$, $\eta = (y_1 - \bar{y}_1)$, $\zeta = (z_1 - \bar{z}_1)$, $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ 为辐射器的声中心. α 为声中心至观察点的连线同水平面的夹角 (见图 2), 朝下为正; φ 为 r_0 与 ξ 轴的夹角, 顺时针方向为正. 将(12)式代入(9)式, 则辐射器在均匀介质中的远区声场可表为

$$P_0 = D(\alpha, \varphi) \frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \quad (13)$$

式中 $D(\alpha, \varphi)$ 就是辐射器的指向性函数,

$$D(\alpha, \varphi) = \iiint_V Q(\xi, \eta, \zeta) \exp \{ -ik[\xi \cos \alpha \cos \varphi + \eta \cos \alpha \sin \varphi + \zeta \sin \alpha] \} d\xi d\eta d\zeta. \quad (14)$$

按照线性迭加原理, 辐射器在分层介质中的声场可表为格林函数积分

$$P = \iiint_V Q(x_1, y_1, z_1) G(x_1, y_1, z_1 | x_2, y_2, z_2) dx_1 dy_1 dz_1. \quad (15)$$

将(8)式代入(15)式, 被积函数中的缓变部分用声中心 $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ 的值来代替, 于是得

$$P = \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\mu_l}}{S_l} q(\bar{z}_1, \nu_l) q(z_2, \nu_l) \sin \left[\int_{\bar{z}_1}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] e^{-\beta_l r_0} \times (p_l^+ - p_l^-), \quad (16)$$

式中 $r_0 = \sqrt{(x_2 - \bar{x}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_1)^2}$ 为观察点至声中心的水平距离,

$$p_l^\pm = -ie^{\pm i\theta} \iiint_V Q(x_1, y_1, z_1) \exp \left[i\mu_l r \pm i \int_{\bar{z}_1}^{z_1} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy \right] dx_1 dy_1 dz_1. \quad (17)$$

令简正波本征射线在声中心的掠角为 α_l , 它与 μ_l 的关系为

$$k(\bar{z}_1) \cos \alpha_l = \mu_l. \quad (18)$$

设辐射器在水平方向的线度为 L_r , 当

$$\frac{kL_r^2}{r_0} \ll 1$$

时, 可取近似

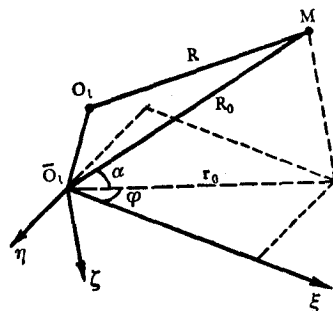


图 2 声源与接收点的几何关系

$$\begin{aligned}\mu_l r &\cong \mu_l r_0 - \mu_l \xi \cos \varphi - \mu_l \eta \sin \varphi \\ &= \mu_l r_0 - k(\bar{z}_1) \xi \cos \alpha_l \cos \varphi - k(\bar{z}_1) \eta \cos \alpha_l \sin \varphi.\end{aligned}\quad (19)$$

当辐射器在垂直方向的线度 L_z 满足条件

$$|d(\bar{z}_1) L_z^3| \ll 1 \quad (20)$$

时,可取近似

$$\begin{aligned}\int_{\xi_l}^{z_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy &\cong \int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + (z_1 - \bar{z}_1) \sqrt{k^2(\bar{z}_1) - \mu_l} \\ &= \int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + k(\bar{z}_1) \xi \sin \alpha_l.\end{aligned}\quad (21)$$

将(19)与(21)式代入(17)式得

$$p_l^\pm = -iD(\mp \alpha_l, \varphi) \exp \left[i\mu_l r_0 \pm i \int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy \pm i\Theta \right], \quad (22)$$

式中 $D(\alpha, \varphi)$ 为辐射器的指向性函数(14)式. 再将(22)式代入(16)式,就得到指向性辐射器的简正波表式

$$\begin{aligned}P &= \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\mu_l}}{S_l} q(\bar{z}_1, v_l) q(z_2, v_l) \mathcal{D}(\alpha_l, \varphi, \bar{z}_1) \\ &\quad \times \sin \left[\int_{\xi_l}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + \Theta \right] \times e^{-\beta_l r_0 + i\mu_l r_0},\end{aligned}\quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\alpha_l, \varphi, \bar{z}_1) &= i \left\{ D(\alpha_l, \varphi) \exp \left[-i \int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy - i\Theta \right] \right. \\ &\quad \left. - D(-\alpha_l, \varphi) \exp \left[i \int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + i\Theta \right] \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

比较(23)与(8)式看出,在点源声场的简正波表示式(8)中用因子 $\mathcal{D}(\alpha_l, \varphi, \bar{z}_1)$ 代替

$$2 \sin \left[\int_{\xi_l}^{z_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + \Theta \right],$$

就得到指向性辐射器的简正波声场. 我们称 $\mathcal{D}(\alpha_l, \varphi, \bar{z}_1)$ 为简正波的指向性激发函数,它同辐射器的位置与指向特性有关.

由(23)式可以得到下列推论:

1. 若辐射器具有垂直对称性,即

$$D(-\alpha, \varphi) = D(\alpha, \varphi), \quad (25)$$

则有

$$\begin{aligned}P &= 2 \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\mu_l}}{S_l} q(\bar{z}_1, v_l) q(z_2, v_l) D(\alpha_l, \varphi) \\ &\quad \times \sin \left[\int_{\xi_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + \Theta \right] \\ &\quad \times \sin \left[\int_{\xi_l}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + \Theta \right] e^{-\beta_l r_0 + i\mu_l r_0}.\end{aligned}\quad (26)$$

垂直对称的指向性辐射器所激发的简正波声场仅比点源声场(8)式多一指向因子 $D(\alpha_l, \varphi)$, 此结果与文献[4]一致.

2. 若辐射器在垂直方向具有反对称性,即

$$D(-\alpha, \varphi) = -D(\alpha, \varphi), \quad (27)$$

则有

$$\begin{aligned} P = & 2 \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\mu_l}}{S_l} q(\bar{z}_l, \nu_l) q(z_l, \nu_l) D(\alpha_l, \varphi) \\ & \times \cos \left[\int_{\bar{z}_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] \\ & \times \sin \left[\int_{z_l}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] e^{-\beta_l r_0 + i\mu_l r_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

海面噪声源(如偶极子模型)常具有反对称性.

3. 若辐射器具有单边指向性,例如

$$\alpha > 0, \quad D(\alpha, \varphi) = 0, \quad (29)$$

则有

$$\begin{aligned} P = & \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_l \frac{\sqrt{\nu_l}}{S_l} q(\bar{z}_l, \nu_l) q(z_l, \nu_l) D(-\alpha_l, \varphi) \\ & \times \sin \left[\int_{\bar{z}_l}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + \Theta \right] \\ & \times \exp \left[-\beta_l r_0 + i\mu_l r_0 + i \int_{\bar{z}_l}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - \nu_l^2} dy + i\Theta \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

海底散射元可视为具有单边指向性的二次声源.

4. 若辐射器具有尖锐指向性,使得

$$\alpha_l \approx \alpha_K \text{ 时 } D(\alpha_l, \varphi) = 0, \quad (31)$$

则辐射器激发单个简正波,

$$\begin{aligned} P = & \sqrt{\frac{8\pi}{r_0}} \frac{\sqrt{\mu_K}}{S_K} q(\bar{z}_1, \nu_K) q(z_2, \nu_K) \sin \left[\int_{\bar{z}_K}^{z_2} \sqrt{k^2(y) - \nu_K^2} dy + \Theta \right] \\ & \times \exp \left[-\beta_K r_0 + i\mu_K r_0 - i \int_{\bar{z}_K}^{\bar{z}_1} \sqrt{k^2(y) - \nu_K^2} dy \right. \\ & \left. + i \left(\frac{3\pi}{4} - \Theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

参量发射阵具有尖锐指向性,因此可用来激发一个或少数几个简正波.

四、均匀水层中的垂直线阵

设有一均匀水层,上、下皆为绝对软边界. 这时简正波的本征函数 ψ 与本征射线掠角 α_l 为

$$\psi = \frac{\sin(l\pi z/h)}{[(kh)^2 - (l\pi)^2]^{1/4}} \quad 0 \leq z \leq h, \quad (33)$$

$$\alpha_l = \arcsin \left(\frac{l\pi}{kh} \right) \quad l = 1, 2, \dots, \quad (34)$$

式中 h 为水层厚度.

设有长度为 h 的垂直线源, 并假定其分布函数 Q 正比于第 m 号本征函数, 即

$$Q = \sin\left(\frac{m\pi}{h} z\right) \quad 0 \leq z \leq h. \quad (35)$$

将(35)式代入(14)式, 再由(24)式就得到垂直线源的指向性激发函数

$$\mathcal{D}_m(\alpha) = \frac{2m\pi h(-1)^m \sin(kh \sin \alpha)}{(kh \sin \alpha)^2 - (m\pi)^2}. \quad (36)$$

函数 $\mathcal{D}_m(\alpha)$ 有下列性质:

$$\mathcal{D}_m(-\alpha) = -\mathcal{D}_m(\alpha), \quad (37)$$

$$\mathcal{D}_m(\alpha_l) = \begin{cases} h & \alpha_l = \alpha_m \\ 0 & \alpha_l \neq \alpha_m \end{cases}. \quad (38)$$

(38) 式表明: 对于分布函数 Q 正比于第 m 号本征函数的垂直线阵, 它的指向性激发函数的零点正好对应于其他简正波的本征射线方向; 因此, 此线阵只激发第 m 号简正波. 图 3 是指向性激发函数(36)式的图形, 纵坐标表示 $|\mathcal{D}_m(\alpha)/h|$, 横坐标表示 $kh \sin \alpha$, 本征射线的方向对应于 $kh \sin \alpha_l = l\pi$.

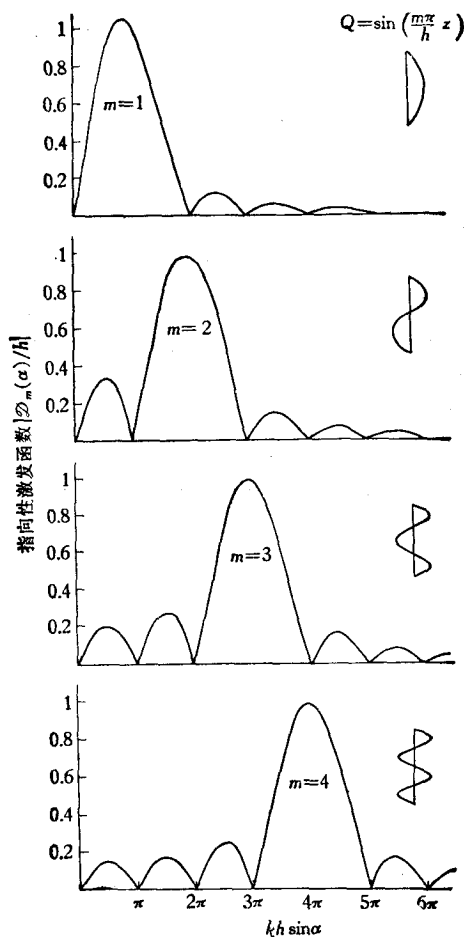


图 3 均匀水层中垂直线阵的指向性激发函数

参 考 文 献

- [1] T. G. Muir, and J. R. Clynch, Propagation of parametric wave in shallow water. Proc. Inst. of Acoust., Underwater Acoustics Group Meeting, AUWE, England, (1976).
- [2] T. G. Muir, Some simple propagation models for linear and parametric sources in shallow water, Proc. Inst. of Acoust., Underwater Appl. of Non-linear Acoustics, England, (1979).
- [3] L. Bjørnø, *et al.*, Parametric acoustic arrays in temperature stratified shallow water, Proc. Inst. of Acoust., Underwater Appl. of Non-linear Acoustics, England, (1979).
- [4] 张仁和, 物理学报, **20** (1964), 227.
- [5] H. P. Buckner and H. H. Morris, *J. Acous. Soc. Amer.* **38**(1965), 1010.
- [6] A. O. Williams and B. B. Novak, *J. Acous. Soc. Amer.* **55**(1974), 80.
- [7] A. Hang, R. R. Graves and H. Überall. *J. Acous. Soc. Amer.* **56**(1974), 387.
- [8] 张仁和, 声学学报, **4** (1979), 102.

NORMAL-MODE SOUND FIELD OF DIRECTIONAL RADIATOR

Zhang Ren-he Zhu Bai-xian

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the sound field of a more general directional radiator in a stratified medium is treated, and the concept of directivity is applied to calculation of the normal modes. The result shows that the normal-mode field of a directional radiator can be obtained by supplementing the normal-mode expression of a omnidirectional point source with the directivity-excitation-function, which is dependent on the position and directivity of the radiator. In addition, the normal-mode fields of the radiators with vertical-symmetrical, vertical-antisymmetrical, single-side and sharp directivity are calculated, respectively.

For the vertical line array in a homogeneous water-layer, if the source distribution is proportional to the eigenfunction of some normal mode, the zeros of the directivity-excitation-function are just corresponding to the directions of eigen-rays of other normal modes.