

研究简报

相对论性电子束的类 Tokamak 平衡

石 秉 仁

(中国西南物理研究所)

1982年3月21日收到

提 要

本文对具有双 δ 函数速度分布的相对论性电子束,考察了其环形平衡性质.通过对反半径比展开,得到了关于磁通函数及电势的一级近似解析解.还讨论了电子漂移轨道的近似描述.

一、引 言

近年来,强流相对论性电子束技术得到了很大的发展,并被用于惯性约束核聚变研究.在磁约束聚变方面,包括在 Tokamak 系统中应用这一技术成就的前景也是明朗的.对于具有双 δ 函数速度分布的束,文献[1]讨论了它在直圆柱中传播的性质,文献[2,3]则讨论了它的环形平衡特性,其中文献[2]的讨论适合于 Tokamak 系统,但限于完全电中性束.本文将这一结果推广于非电中性束情形,得出了完整的一级近似解的解析表示式,进而讨论了电子的漂移轨道.这些讨论可以推广于离子束的平衡和非圆截面环形系统,不过本文仅报道关于圆截面情况下的结果.

二、基本方程

假定相对论性电子束约束在轴对称环形系统中,其外部包有一圆截面理想导体壳.类似于文献[1,2],设电子束的速度分布为双 δ 函数分布

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{R_0 c^2}{2\pi H_0} n_0 \delta(H - H_0) \delta(P_\theta - P_0), \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \gamma m c^2 + q \phi(R, Z); \\ \gamma^2 &= 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} = 1 + \frac{p_R^2 + p_Z^2}{m^2 c^2} + \frac{\left(P_\theta - \frac{q}{c} \phi(R, z)\right)^2}{m^2 c^2 R^2}; \\ P_\theta &= R p_\theta + \frac{q}{c} \phi(R, Z); \\ p_R &= \gamma m v_R, \quad p_Z = \gamma m v_Z, \quad p_\theta = \gamma m v_\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 ϕ 和 ψ 分别为静电势和极向磁通函数, ϕ 满足

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{R^2} \right) = -\frac{4\pi}{c} R j_\theta(R, Z). \quad (3)$$

(R, θ, Z) 为圆柱坐标变量. $q = -e$ 为电子电荷, n_0 为 $R = R_0$ 处粒子密度, H_0 及 P_0 为束的能量及环向正则角动量.

由(1)式可以求出粒子密度为

$$n(R, Z) = n_0 \frac{R_0}{R} \left(1 - \frac{q}{H_0} \phi(R, Z) \right) U(\alpha - 1), \quad (4)$$

环向平均速度为

$$u_\theta(R, Z) = c^2 \frac{\left(P_0 - \frac{q}{c} \phi(R, Z) \right)}{(H_0 - q\phi(R, Z))R}. \quad (5)$$

(4)式中 U 为阶梯函数

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \geq 0; \\ 0 & \text{当 } x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

α 由下式定义:

$$\alpha = \frac{H_0 - q\phi}{mc^2 \left[1 + \frac{1}{m^2 c^2 R^2} \left(P_0 - \frac{q}{c} \phi \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (7)$$

也就是说,束的边界将由条件 $\alpha = 1$ 确定^[1,2].

设束中电荷被本底等离子体补偿了 f 部分,为简单计,设 f 为常数 ($f = 1$ 对应于文献[2]讨论过的情形). ϕ 满足泊松方程

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} = -4\pi(1-f)qn(R, Z). \quad (8)$$

至于环向电流,这里仅考察完全由束运动提供的情形

$$j_\theta = nqu_\theta. \quad (9)$$

代入(3)式得

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{R^2} \right) = -\frac{4\pi c n_0 q R_0}{H_0} \frac{\left(P_0 - \frac{q}{c} \phi \right)}{R} U(\alpha - 1). \quad (10)$$

(8)和(10)式为待解基本方程组.

边界条件为: 在外导体壳上

$$\psi = A_1, \quad \phi = A_2. \quad (11)$$

常数 A_1 和 A_2 的选取方式不影响物理结果.

由于方程(8)和(10)的右方含 U 函数,这些方程是非线性的. 下面我们用近似展开法求解.

三、场方程的近似解

引入环形局部坐标系 (r, θ, φ) , 使

$$\begin{aligned} R &= R_0 + r \cos \varphi, \\ Z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

且 $r = b$ 为导体壳的位置. 设 $\epsilon = b/R_0 \ll 1$, 这时, 可以应用对 ϵ 的幂展开的方法求近似解. 先做变换

$$\tilde{\phi} = \phi - H_0/q, \quad \tilde{\psi} = \psi - P_0 c/q. \quad (13)$$

并记

$$L_c^{-2} = \frac{4\pi n_0 q^2 (1-f)}{H_0}, \quad L_m^{-2} = \frac{4\pi n_0 q^2}{H_0}. \quad (14)$$

(8)和(10)式化为

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial Z^2} - \frac{R_0}{R} U(\tilde{\alpha} - 1) \frac{\tilde{\phi}}{L_c^2} = 0, \quad (15)$$

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial Z^2} - \frac{R_0}{R} U(\tilde{\alpha} - 1) \frac{\tilde{\psi}}{L_m^2} = 0, \quad (16)$$

经变换(12)式, 各量对 ϵ 展开, 得零级近似方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial \varphi^2} - \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_c^2} \tilde{\phi}_0 = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_0}{\partial \varphi^2} - \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_m^2} \tilde{\psi}_0 = 0, \quad (18)$$

其中

$$\tilde{\alpha}_0 = - \frac{q \tilde{\phi}_0}{m^2 c^2 \left[1 + \frac{q^2}{m^2 c^4 R_0^4} \tilde{\phi}_0^2 \right]^{1/2}}. \quad (19)$$

(17)和(18)式的结构相类似, 由于圆截面导体壳边界条件, 零级近似仅需考虑与 φ 无关的解^[1]:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_0 &= C_0 I_0(r/L_c), \\ \tilde{\psi}_0 &= D_0 I_0(r/L_m). \end{aligned} \quad \text{对 } \alpha_0 \geq 1 \text{ 或 } r \leq a. \quad (20)$$

I 为虚宗量 Bessel 函数. a 为束半径, 由 $\tilde{\alpha}_0 = 1$ 确定.

$a < r \leq b$ 区域中的解为

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{0c} &= C_0 I_0(a/L_c) + C_1 \ln(r/a), \\ \tilde{\psi}_{0c} &= D_0 I_0(a/L_m) + D_1 \ln(r/a). \end{aligned} \quad (21)$$

适当选取 $r = b$ 处的常数, 可以将解表成

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{H_0}{q} (1 - I_0(r/L_c)) \\ \psi_0 &= \frac{P_0 c}{q} (1 - I_0(r/L_m)) \end{aligned} \quad r \leq a, \quad (22)$$

一级近似方程为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial \varphi^2} - \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_c^2} \tilde{\phi}_1 \\ &= -\frac{1}{R_0} \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \tilde{\phi}_0 \end{aligned}$$

$$- \frac{r \cos \varphi}{R_0} \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_c^2} \tilde{\phi}_0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial \varphi^2} - \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_m^2} \tilde{\phi}_1 \\ &= \frac{1}{R_0} \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \tilde{\phi}_0 \\ & - \frac{r \cos \varphi}{R_0} \frac{U(\tilde{\alpha}_0 - 1)}{L_m^2} \tilde{\phi}_0. \end{aligned} \quad (24)$$

上述各式中我们已经用 $U(\tilde{\alpha}_0 - 1)$ 来代替 $U(\tilde{\alpha} - 1)$, 这在一级修正不大时是可以的. 在相反的情况下只能采用逐级叠代法求解. 由于这一做法, (23) 和 (24) 式就互不耦合, 于是很易分别求解.

令

$$\tilde{\phi}_1 = F_1 \cos \varphi, \quad \tilde{\phi}_1 = G_1 \cos \varphi, \quad (25)$$

F_1 和 G_1 分别满足

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF_1}{dr} \right) - \frac{F_1}{r^2} - \frac{F_1}{L_c^2} = -\frac{C_0}{R_0} \left[\frac{I_1(r/L_c)}{L_c} + \frac{r}{L_c^2} I_0\left(\frac{r}{L_c}\right) \right] \quad \text{当 } r \leq a, \quad (26)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_1}{dr} \right) - \frac{G_1}{r^2} - \frac{G_1}{L_m^2} = \frac{D_0}{R_0} \left[\frac{I_1(r/L_m)}{L_m} - \frac{r}{L_m^2} I_0(r/L_m) \right] \quad \text{当 } r \leq a. \quad (27)$$

其解可以表成

$$\tilde{\phi}_1 = \left\{ C_0^{(1)} I_1(r/L_c) - \frac{C_0}{2R_0} \left[r I_0(r/L_c) + \frac{r^2}{2L_c} I_1(r/L_c) \right] \right\} \cos \varphi \quad r \leq a, \quad (28)$$

$$\tilde{\phi}_1 = \left\{ D_0^{(1)} I_1(r/L_m) + \frac{D_0}{2R_0} \left[r I_0(r/L_m) - \frac{r^2}{2L_m} I_1(r/L_m) \right] \right\} \cos \varphi \quad r \leq a. \quad (29)$$

同样可得外部解

$$\tilde{\phi}_{1e} = \left\{ C_1^{(1)} \frac{r}{L_c} + C_1^{(2)} \frac{L_c}{r} - C_1 \frac{r}{2R_0} \ln(r/L_c) \right\} \cos \varphi \quad a \leq r \leq b, \quad (30)$$

$$\tilde{\phi}_{1e} = \left\{ D_1^{(1)} \frac{r}{L_m} + D_1^{(2)} \frac{L_m}{r} + D_1 \frac{r}{2R_0} \ln(r/L_m) \right\} \cos \varphi \quad a \leq r \leq b. \quad (31)$$

取边界条件

$$\tilde{\phi}_{1e}|_b = 0, \quad \tilde{\phi}_{1e}|_b = 0. \quad (32)$$

加上 $r = a$ 处函数及其对 r 导数的连续条件, 可以定出常数 $C_0^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $D_0^{(1)}$, $D_1^{(1)}$, $D_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C_0^{(1)}/C_0 &= \frac{b}{R_0} \left[I_0(a/L_c) + \frac{a}{L_c} \left(\ln b/a + 3/4 - \frac{a^2}{4b^2} \right) I_1(a/L_c) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^2}{4L_c^2} (1 - a^2/b^2) I_1'(a/L_c) \right] / \left[(b/a + a/b) I_1(a/L_c) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a}{L_c} (b/a - a/b) I_1'(a/L_c) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

$$D_0^{(1)}/D_0 = \frac{b}{R_0} \left[-I_0(a/L_m) + \frac{a}{L_m} \left(\ln a/b + \frac{3}{4} - \frac{a^2}{4b^2} \right) I_1(a/L_m) \right]$$

$$+ \frac{a^2}{4L_m^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) I_1'(a/L_m) \Big] / \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) I_1\left(\frac{a}{L_m}\right) + \frac{a}{L_m} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) I_1'\left(\frac{a}{L_m}\right) \right], \quad (34)$$

$$C_i^{(1)}/C_0 = \frac{C_0^{(1)}}{C_0} \frac{L_e}{2a} \left[I_1\left(\frac{a}{L_e}\right) + \frac{a}{L_e} I_1'\left(\frac{a}{L_e}\right) \right] - \frac{L_e}{4R_0} \left[2I_0\left(\frac{a}{L_e}\right) + \left(\frac{3a}{2L_e} - \frac{2a}{L_e} \ln\left(\frac{a}{L_e}\right)\right) I_1\left(\frac{a}{L_e}\right) + \frac{a^2}{2L_e^2} I_1'\left(\frac{a}{L_e}\right) \right], \quad (35)$$

$$C_i^{(2)}/C_0 = \frac{C_0^{(2)}}{C_0} \frac{a}{2L_e} \left[I_1\left(\frac{a}{L_e}\right) - \frac{a}{L_e} I_1'\left(\frac{a}{L_e}\right) \right] + \frac{a}{4R_0} \frac{a^2}{2L_e^2} \left[I_1\left(\frac{a}{L_e}\right) + \frac{a}{L_e} I_1'\left(\frac{a}{L_e}\right) \right], \quad (36)$$

$$D_i^{(1)}/D_0 = \frac{D_0^{(1)}}{D_0} \frac{L_m}{2a} \left[I_1\left(\frac{a}{L_m}\right) + \frac{a}{L_m} I_1'\left(\frac{a}{L_m}\right) \right] + \frac{L_m}{2R_0} \left[I_0\left(\frac{a}{L_m}\right) - \frac{a}{L_m} \left(\frac{3}{4} + \ln\frac{a}{L_m}\right) I_1\left(\frac{a}{L_m}\right) - \frac{a^2}{4L_m^2} I_1'(a/L_m) \right], \quad (37)$$

$$D_i^{(2)}/D_0 = \frac{D_0^{(2)}}{D_0} \frac{a}{2L_m} \left[I_1(a/L_m) - \frac{a}{L_m} I_1'\left(\frac{a}{L_m}\right) \right] + \frac{a^3}{8R_0L_m^2} \left[I_1\left(\frac{a}{L_m}\right) + \frac{a}{L_m} I_1'\left(\frac{a}{L_m}\right) \right]. \quad (38)$$

至此,我们已经得到了完整的一级近似解的表示式. 利用这些表示式,可以讨论电子束的环形平衡解的性质: 等势面及磁面分别由

$$\phi(R, Z) = \text{常数}, \quad \psi(R, Z) = \text{常数}$$

给出. 束中粒子密度分布及电流分布则由(4)及(9)式确定.

四、电子运动轨道

带电粒子在轴对称场中的运动轨道由两个精确运动积分,即粒子的总能量

$$H = \gamma mc^2 + q\phi(R, Z) = H_0 \quad (39)$$

及环向正则角动量

$$P_\theta = \gamma R m v_\theta + \frac{q}{c} \psi(R, Z) = P_0 \quad (40)$$

守恒,加上另一个近似运动积分,即磁矩

$$J_\perp = \gamma^2 \frac{v_\perp^2}{B} = J_0 \quad (41)$$

守恒^[4]确定. 相应于速度分布(1)式, H_0, P_0 对所有粒子都相同,于是不同磁矩 J_0 将确定不同的运动轨道.

对于电子回转半径比系统线度小得多的情形,可以引进回转中心的漂移面来近似描

述电子轨道^[4]. 这时, (40)式可以用下面的近似式代替:

$$\gamma m R v_{\parallel} B_0/B + \frac{q}{c} \phi(R, Z) = P_0, \quad (42)$$

式中 $v_{\parallel}$, $v_{\perp}$ 分别为平行和垂直于磁场 $\mathbf{B}$ 的速度分量,

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= c \left[1 - \frac{m^2 c^4}{(H_0 - q\phi)^2} (1 + J_0 B/c^2) \right]^{1/2}, \\ v_{\perp} &= \frac{mc^2}{(H_0 - q\phi)} \sqrt{J_0 B}, \\ v &= c \left[1 - \frac{m^2 c^4}{(H_0 - q\phi)^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (43)$$

轨道方程化为

$$\frac{I(\phi)}{B} \left[\frac{(H_0 - q\phi)^2}{c^2} - m^2 c^2 \left(1 + \frac{J_0 B}{c^2} \right) \right]^{1/2} + \frac{q}{c} \phi = P_0, \quad (44)$$

式中 $I = B_0 R$. 由(44)式中解出 J_0

$$\left\{ \frac{(H_0 - q\phi)^2}{c^2} - m^2 c^2 - \frac{(P_0 - q\phi/c)^2 B^2}{I^2} \right\} / m^2 B = J_0. \quad (45)$$

将前一节中的 ϕ 及 ϕ 的零级及一级近似解代入(45)式, 略去高阶项, 经整理可得如下形式的轨道方程:

$$g_1(r) + g_2(r) \cos \varphi = \text{const}, \quad (46)$$

式中

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \gamma_0^2 s^2 I_0^2(r/L_m) + 1 - \gamma_0^2 I_0^2(r/\tilde{L}_c), \\ g_2(r) &= -\frac{C_0^{(1)}}{C_0} \cdot 2\gamma_0^2 I_0(r/L_c) I_1(r/L_c) + \frac{D_0^{(1)}}{D_0} 2\gamma_0^2 s^2 I_0(r/L_m) I_1(r/L_m) \\ &\quad + \frac{r}{R} \left\{ \gamma_0^2 \frac{r}{2L_c} I_0\left(\frac{r}{L_c}\right) I_1\left(\frac{r}{L_c}\right) + 1 - \gamma_0^2 s^2 \frac{r}{2L_m} I_0\left(\frac{r}{L_m}\right) I_1\left(\frac{r}{L_m}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_0^2 s^2 I_0^2\left(\frac{r}{L_m}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

这里

$$\gamma_0 = H_0/mc^2, \quad s = P_0/mcR_0\gamma_0. \quad (49)$$

以上为一级近似下电子轨道方程. 很明显, 它应与粒子仅处在 $\alpha \geq 1$ 区域中这一点相一致. 事实上, 粒子所处区域的边界与(45)式中 $J_0 = 0$ 相一致, 也就是说, 最外部一个磁面由

$$g_1(r) + g_2(r) \cos \varphi = 0$$

确定. 一般, 磁面、等势面、漂移面都互不重合, 但其差别不应很大; 事实上, 只有它们的差别不很大时, 上述近似分析才适用. 相反的情况下, 严格的解要经多次叠代才能确定.

五、具体实例

相对论性电子束在聚变研究的早期就被建议作为约束和加热热核等离子体的一种方

法^[5]. 本文的着眼点在于考察它在补充环流器 (Tokamak) 环向电流的可能性. 基于这种考虑, 取参数

$$n_0 = 5 \times 10^{12}/\text{cm}^3, \quad H_0 = 3\text{MeV},$$

$$R_0 = 200\text{cm}, \quad b = 50\text{cm}.$$

相应于 $\gamma_0 = 5.86$, 计算得到的电子密度、环向电流密度及电势 ϕ 、磁通函数 ψ 在中平面上沿半径方向的分布如图 1 和图 2 所示. 其中 f 表示电中性参数.

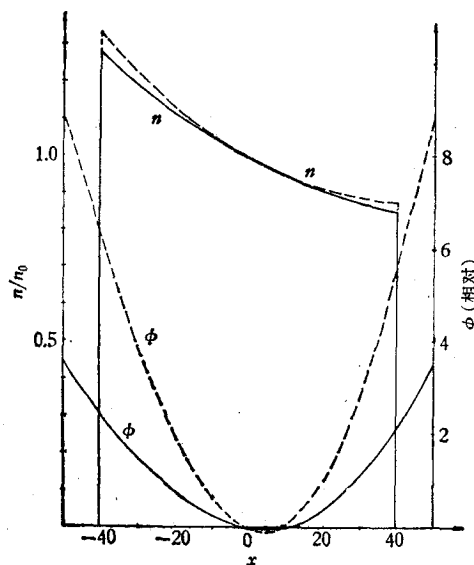


图 1 环的中平面上电子束密度及电势 ϕ 的分布束的小半径 $a = 40\text{cm}$;
——为 $f = 0.5$; ——为 $f = 0.8$

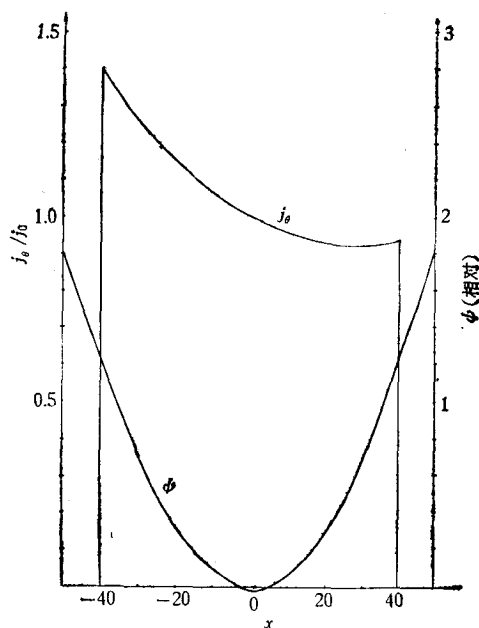


图 2 环的中平面上电子束产生的环向电流及磁通函数 ψ 的分布

由图可知, 非电中性对电子密度分布有一定影响, 而且由于电势存在, 将影响电子轨道. 在所给参数下, 计算和分析都证明, 磁面、等势面及电子轨道都是一些位移圆, 捕获电子不存在.

六、讨 论

本文限于研究具有双 δ 函数速度分布的束, 这是很大的限制. 环形电子束中电子分布函数本身依赖于电子产生方式及约束性能, 但上述简化分析给出了关于相对论性电子束的环形平衡的基本图象, 并且表明, 如能用相对论性电子束来维持环流器的环向电流, 则其平衡特性将类似于现有欧姆加热环流器.

本文分析方式适用于离子束; 另外, 不难将结果推广于非圆截面情形 (如用文献 [6] 中方法). 不过这些讨论未发现突出的物理内容, 故在此不详述.

参 考 文 献

- [1] D. A. Hammer, N. Rostoker, *Phys. Fluids*, 13(1970), 1831.
- [2] E. Ott, R. N. Rudan, *Phys. Fluids* 14 (1971), 1226.
- [3] R. C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasmas*, edited by W. A. Benjamin, Inc. (1970).
- [4] А. И. Морозов и Л. С. Соловьев, Движение заряженных частиц, в «вопросы теории плазмы», вып. 2, стр. 177—261, Атомиздат, Москва, (1961).
- [5] N. C. Christofilos, *Phys. Fluids* 9(1966), 1425.
- [6] 石秉仁, 科学通报, 26(1981), 144.

TOKAMAK-LIKE EQUILIBRIA OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAMS

SHI BING-REN

(Southwestern Institute of Physics Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

The toroidal equilibrium properties of relativistic electron beams with double- δ function distribution are considered. The approximate solutions of the magnetic flux and the electric potential equations expanded in terms of the inverse aspect ratio of the torus are obtained analytically. The drift surfaces of electrons in the beam are also described.