第32卷 第4期 1983年4月
物理学报 ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 32, No. 4 Apr., 1983

# 广义相对论中能量的定域性

刘文森
(山西大学物理系)

1982年3月2日收到

## 提要

本文就文献[1]中的主要论点作了考核．指出推论中的疏忽；表明文献[1]提出的引力场总能量-动量综量以及由它所表示的引力场有限空间区域中的能量对纯空间坐标变换来说不是唯一的，因而不具有确定的物理意义．

广义相对论中关于能量是否定域的问题争论已久，通常认为引力场能量的定域性与等效原理是不相容的[2,3]．但是人们常常争辩说，物理上如果我们把引力场看作如同电磁场一样的物质场，则它在三维空间任何一个有限区域中的实在性和量值应当是确定无疑的．为此作了一系列挽救引力场能量不能定域的努力，典型的如 Møller 的工作[4]．他将 Tolman 超势对称化，导得引力场总能量-动量综量

$$\mathscr{T}_{\alpha}^{\ \beta}=\frac{1}{K}\{\sqrt{-g}(g_{\alpha\sigma,\lambda}-g_{\alpha\lambda,\sigma})g^{\beta\lambda}g^{\tau\sigma}\}_{,\tau},\tag{1}$$

上式系数 $K=8\pi k/c^4$，$k$ 为万有引力常数． 利用 $\mathscr{T}_{\alpha}^{\ \beta}$ 可以建立起在如下纯空间坐标变换下

$$x'^0=x^0,\quad x'^i=f^i(x^l)\quad i=1,2,3,\tag{2}$$

在空间有限区域 $\Omega$ 中成立的类似电动力学中 Poynting 积分能量守恒律的表式，这样似乎就使 $\Omega$ 中的场能量有了明确的物理含义．但是当进行整体方面的分析时，发现积分量

$$P_\alpha=\frac{1}{c}\int_{x^0=\text{常量}}\mathscr{T}_{\alpha}^{\ 0}dx^1dx^2dx^3$$

不同时具有孤立系统总能量-动量四维矢量通常应有的整体性质，且理论不满足广义协变性要求，Møller[5] 最后只得承认探索的失败．

近年来 Palmer[6] 作过类似的分析，指出即使我们能够提高对空间有限区域能量积分的协变性，但是因为能量“密度”不是唯一的，因此空间有限区域能量的值并不确定，致使它失掉物理意义．

郑玉昆[1]遵循前述考虑出发，对总能量-动量综量的结构预先提出五项限制性要求，推论出新的综量 $\underset{(Z)}{\tau}^{\alpha\beta}$． 郑玉昆由要求如下微分守恒式在由变换(2)式联系起来的诸坐标系中普遍成立

$$\tau^{\alpha\beta}_{\ \ ,\beta}=0\tag{3}$$

以及 $\tau^{00}$ 在变换(2)式之下象标量密度一样变换

$$\tau'^{00} = J\tau^{00} \tag{4}$$

建立起其附录A中的(A.1)式

$$\frac{\partial \tau'^{0k}}{\partial x'^k} = \frac{\partial \tau'^{00}}{\partial x'^0} = -J\frac{\partial \tau^{00}}{\partial x^0} = J\frac{\partial \tau^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(J\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\tau^{0i}\right) \quad , \tag{5}$$

式中 $J = \left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right|$ 是变换 (2) 式的 Jacobi. 本文希腊字母指标取 0, 1, 2, 3, 拉丁字母指标取1, 2, 3. 因为 (3) 式一般不是一个张量等式,令它普遍成立的要求必定隐含着对综量 $\tau^{\alpha\beta}$ 的变换性质的制约. 事实上对任意 (1, 0) 型矢量密度 $A^k$ 有

$$A^k_{;h} = A^k_{,h} \quad 和 \quad A'^k_{;h} = J\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^h}A^i_{;j}. \tag{6}$$

这里右下角的半分号和逗号分别表示协变导数和普通导数. 若取 $h = k$, 则 (6) 式化成 $A'^h_{,h} = JA^i_{,i}$. 因此必须 $\tau^{0A} \equiv A^k$ 和 $\tau^{0k}_{,k} = A^k_{,k}$, 即在变换 (2) 式下有

$$\tau'^{0k} = J\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\tau^{0i} \quad 和 \quad \tau'^{0k}_{,k} = J\tau^{0i}_{,i}. \tag{7}$$

(5) 式才能得到真正的满足,这意味着 (5) 式的成立要求 $\tau^{0k}$ 是变换 (2) 式下的三维矢量密度,结合 (4) 式,即 $\tau^{0\beta}$ 在变换 (2) 式下应象四维矢量密度一样变换.

一般说一个张量的普通导数不再是张量,除非对变换作某种严格的限制. 郑玉昆提出自己的超势 $H^{0\rho\nu}$ 是 (2, 0) 型张量密度,综量的变换应有

$$\begin{aligned}\tau'^{0\rho} &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu}H'^{0\rho\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(J\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}H^{0\beta\lambda}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(J\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}H^{0\beta\lambda} + J\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda}H^{0\beta\lambda}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

上式右端第一项因 $\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(J\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta}\right) \equiv 0$ 消掉,第二项化成

$$J\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda}H^{0\beta\lambda} + J\frac{\partial}{\partial x^\lambda}H^{0\beta\lambda}. \tag{9}$$

可见若要 $\tau^{0\beta}$ 在变换 (2) 式下象矢量密度一样变换,必须 (9) 式的前一项为零. 因为 $J$, $\left|\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta}\right|$ 和 $\left|\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right|$ 一般不为零,超势 $H^{0\beta\lambda}$ 也不取无意义的零值,该项为零的条件化成

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^l} = 0. \tag{10}$$

因此 (10) 式成为对超势 $H^{0\beta\lambda}$ 是 (2, 0) 型张量密度,综量 $\tau^{0\beta}$ 是否是矢量密度的一个判据式. (反由 $H^{0\beta\lambda}$ 对后两个指标 $\beta$, $\lambda$ 的反称性不足以使 (9) 式的前项为零. 郑玉昆文 (A.3)—(A.5) 式存在类似疏忽.)显见如变换 (2) 式是线性的,(10) 式得到满足.

对最简单的 $\beta$ 也取零的情况,有

$$H'^{00k} = J\frac{\partial x'^k}{\partial x^l}H^{00l}, \tag{11a}$$

$$\tau'^{00} = \frac{\partial}{\partial x'^k}H'^{00k} = J\frac{\partial}{\partial x^l}H^{00l} = J\tau^{00}. \tag{11b}$$

即在任意纯空间坐标变换 (2) 式下,若超势 $H^{00k}$ 是矢量密度,则 $\tau^{00}$ 是标量密度.

我们不难对郑玉昆提出的综量 $\tau_{(Z)}^{\alpha\beta}$ 进行一般的分析和实例计算加以检验．因为

$$\tau_{(Z)}^{0\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} H^{0\beta\lambda} = \frac{1}{K}\left\{\sqrt{-g}\,g^{00}(g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma})g^{\beta\mu}g^{\lambda\sigma}\right\}_{,\lambda}. \tag{12}$$

这里超势 $H^{0\beta\lambda}$ 是(2，0)型张量密度，但明显地 $\tau_{(Z)}^{0\beta} = H^{0\beta\lambda}_{,\lambda}$ 并不是矢量密度，因此郑玉昆找到的具体综量表式 (12) 并不满足前提条件 (7) 式，除非变换 (2) 是线性的这种没有多大意义的特殊情况．将 $\tau_{(Z)}^{0\beta}$ 类推成 $\tau_{(Z)}^{\alpha\beta}$，虽然超势，$H^{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{K}\{\sqrt{-g}g^{\alpha0}(g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma})g^{\beta\mu}g^{\lambda\sigma}\}$ 是 (3，0) 型张量密度，但 $\tau_{(Z)}^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda}$ 也不是变换 (2) 式下的张量密度．

对于静态球对称的 Schwarzschild 场，存在我们熟知的几种形式的度规和它们之间的变换式：

$$\text{I}\qquad ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

$$\text{II}\qquad ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^0)^2 - \left(\delta_{ij} + \frac{r_g/r}{1 - r_g/r}n_i n_j\right)dx^i dx^j,$$

$$\text{III}\qquad ds^2 = \frac{(1 - r_g/4\rho)}{(1 + r_g/4\rho)}(d\bar{x}^0)^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4(d\rho^2 + \rho^2 d\bar{\theta}^2 + \rho^2\sin^2\bar{\theta}d\bar{\varphi}^2),$$

$$\text{IV}\qquad ds^2 = \frac{(1 - r_g/4\rho)^2}{(1 + r_g/4\rho)^2}(d\bar{x}^0)^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4[(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2]. \tag{13}$$

$$\text{I—II}\qquad x' = r\sin\theta\cos\varphi,\quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi,\quad x^3 = r\cos\theta,\quad x^0 = x^0;$$

$$\text{I—III}\qquad \rho = \frac{1}{2}\left\{(r^2 - r_g r)^{\frac{1}{2}} + r - \frac{r_g}{2}\right\},\quad \bar{\theta} = \theta,\quad \bar{\varphi} = \varphi,\quad \bar{x}^0 = x^0;$$

$$\text{III—IV}\qquad \bar{x}' = \rho\sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi},\quad \bar{x}^2 = \rho\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi},\quad \bar{x}^3 = \rho\cos\bar{\theta},\quad \bar{x}^0 = x^0;$$

$$\text{II—IV}\qquad x' = \bar{x}'\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2,\quad x^2 = \bar{x}^2\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2,\quad x^3 = \bar{x}^3\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2,\quad x^0 = \bar{x}^0. \tag{14}$$

以上 $r_g = 2km/c^2$ 是引力半径和 $n_i = x^i/r$． 变换式 (14) 的 Jacobi 分别为

$$J_{(\text{II}\leftarrow\text{I})} = (r^2\sin\theta)^{-1};\qquad J_{(\text{IV}\leftarrow\text{III})} = (\rho^2\sin\theta)^{-1};$$

$$J_{(\text{III}\leftarrow\text{I})} = \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)\left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right);\qquad J_{(\text{IV}\leftarrow\text{II})} = \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^5\left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right). \tag{15}$$

当我们只着眼于所谓纯空间坐标变换时，度规张量的时间-时间分量 $g_{00}$ 或 $g^{00}$ 已经丧失通常的二阶张量的特征，它们象标量一样变换，任意函数 $f(g_{00})$ 是标函数，把它嵌入表示 (12) 式右端括号内既不影响 $\tau_{(Z)}^{0\beta}$ 原来的变换性质，也不破坏等式两端指标的平衡，即我们有与 (12) 式完全等价的表式

$$\bar{\tau}^{0\beta} = \frac{1}{K}\{\sqrt{-g}f(g_{00})g^{00}(g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma})g^{\beta\mu}g^{\lambda\sigma}\}_{,\lambda}. \tag{16}$$

对 Schwarzschild 场上式的时间-时间分量化成

$$\bar{\tau}^{00} = \frac{1}{K}\{\sqrt{-g}f(g_{00})g^{00}_{,j}g^{ij}\}_{,i}. \tag{17}$$

可以方便地设 $f(g_{00}) = (g_{00})^n$， $n$ 试取 0，±1，±2 …． 例如 $n = 0$ 时 $\bar{\tau}^{00} = \tau_{(Z)}^{00}$；$n = 1$ 时 $\bar{\tau}^{00} = \mathscr{T}_0^0$ 等．现在把 (13) 式诸度规分量分别代入 (17) 式，我们得到

$$
{}_{(\mathrm{I})}\bar{\tau}^{00}=\frac{1}{K}\left\{(n-1)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{n-2}\frac{r_g^2\sin\theta}{r^2}\right\},
$$

$$
{}_{(\mathrm{II})}\bar{\tau}^{00}=\frac{1}{K}\left\{(n-1)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{n-2}\frac{r_g^2}{r^4}\right\},
$$

$$
{}_{(\mathrm{III})}\bar{\tau}^{00}=\frac{1}{K}\left\{(n-1)\frac{(1-r_g/4\rho)^{2n-3}}{(1+r_g/4\rho)^{2n-1}}\frac{r_g^2\sin\theta}{\rho^2}\right\},
$$

$$
{}_{(\mathrm{IV})}\bar{\tau}^{00}=\frac{1}{K}\left\{(n-1)\frac{(1-r_g/4\rho)^{2n-3}}{(1+r_g/4\rho)^{2n-1}}\frac{r_g^2}{\rho^4}\right\}. \tag{18}
$$

容易验证如下关系式普遍成立:

$$
\bar{\tau}^{00}_{(A)}=J_{(A\leftarrow B)(B)}\bar{\tau}^{00}. \tag{19}
$$

与此相应积分式

$$
\int_{\Omega_A}{}_{(A)}\bar{\tau}^{00}(d^3x)_A=\bar{E}_\Omega=\text{不变量} \tag{20}
$$

上面 $A$，$B$ 取 I—IV，$\Omega$ 可以方便地取 Schwarzschild 外场中以物质源中心为心的不同半径 $R_1$ 和 $R_2$ ($R_2>R_1$) 的球环，例如

$$
\bar{E}_\Omega=mc^2\left\{\left(1-\frac{r_g}{R_2}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{r_g}{R_1}\right)^{n-1}\right\}。 \tag{21}
$$

初看起来这是一幅诱人的图象：在我们考虑的情况下，总能量“密度” $\bar{\tau}^{00}$ 是协变的，空间有限区域场能量 $\bar{E}_\Omega$ 是不变量，特别是 $n=0$ 时化成郑玉昆的结果．但是只要我们记起实际上它们包含无穷多个等价的表式，而且当 $n>1$ 时它们取正值，$n=1$ 时为零，$n<1$ 时取负值，不确定性如此之大，致使所谓“局部”场能量密度或有限区域的“整体”场能量的物理含义荡然无存!

以上分析表明，郑玉昆找到的综量 $\tau^{\alpha\beta}_{(Z)}$ 与自己的前提要求 (5) 式，或 (5) 式成立的必然结论 (7) 式不自洽．在 Schwazschild 场情况 $\tau^{00}_{(Z)}$ 或 ${}_{(Z)}E_\Omega$ 固然对纯空间坐标变换 (14) 式具有协变性，但它们是不确定的．这里我们附带表明了 Møller 的理论若只着眼于纯空间坐标变换的考虑，也必然遇到这个困难．总之，即使不计别的毛病，$\tau^{\alpha\beta}_{(Z)}$ 也丝毫不比别的综量更优越．

## 参 考 文 献


[1] 郑玉昆，物理学报，**30** (1981)，46.
[2] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (1973), p. 464.
[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Field, (1975), §96.
[4] C. ϕller, *Ann. Phys.*, 4(1958), 647.
[5] C. Mϕller. *Ann. Phys.*, 12(1961), 118; The Theory of Relativity, (1972), ch. 11.
[6] T. N. Palmer, *Gen. Rel. Grav.*, **12**(1980), 149.

# LOCALISATION OF ENERGY IN GENERAL RELATIVITY

Liu Wen-sen

*(Department of Physics, Shanxi University, Taiynan)*

Abstract

The main statements of paper [1] are critically reviewed and the blunders in the deduction are indicated. It is showend that the total energy-momentum complex proposed in paper [1] and the energy of gravitational field in a finite part of space are not unique under pure spatial transformation and, therefore, are not possessed of a definite physical meaning.