

本征应变为线性函数的椭圆夹杂

张 宏 图 赵 晓 鹏

(兰州大学物理系)

1982 年 4 月 6 日收到

提 要

对于平面中的椭圆夹杂,当本征(或无应力)应变 ε_{ij}^* 为位置 x, y 的线性函数时,夹杂内的拘束应变 ε_{ij}^c 亦为位置的线性函数. 本文给出了全部的一级拘束系数. 在椭圆的轴比 β 足够小时,我们还得到了夹杂外部场的解析表达式. 本文结果可直接应用于处理一些实际问题,例如裂纹在弯曲加载条件下的行为,以及片状夹杂与微裂纹的相互作用等.

一、前 言

夹杂可表现固体中一些重要过程(如相变、范性形变等)的力学特征. 同时,夹杂理论对于复合材料的研究亦有重要意义,因此近年来它受到新的重视,成为材料科学中的一个重要课题. 我们曾把夹杂理论应用于断裂的研究^[1,2],其物理图象清楚,数学计算简捷,有一定的优越性.

然而,现有的夹杂理论实际上都只考虑夹杂内本征应变 ε_{ij}^* 为常数的情况. 这样,就限制了夹杂理论的应用范围. 根据多项式定理^[3],在椭球体夹杂内的本征应变 $\varepsilon_{ij}^*(x_k)$ 为位置坐标 x_k 的 M 次多项式时,拘束应变 $\varepsilon_{ij}^c(x_k)$ 也是 x_k 的 M 次多项式. 均匀的夹杂(即 $\varepsilon_{ij}^* = \text{const}$)相当于 $M = 0$ 的情况. 针对平面问题,本文系统地处理了 $M = 1$ 的情况. 我们考虑夹杂内的本征应变 $\varepsilon_{ij}^*(x, y)$ 为位置 x, y 的线性函数的情况. 因而,所求得夹杂内的拘束应变 $\varepsilon_{ij}^c(x, y)$ 亦为线性函数. 本文导出了全部的一级拘束系数,使其可直接应用于处理实际问题. 对于扁平的椭圆夹杂,我们还得到了夹杂外部场的解析表达式. 作为本文结果的应用,我们计算了几个具体问题.

二、椭圆夹杂内的拘束场

我们考虑平面问题,即认为夹杂和母体的一切性质沿 z 轴方向都不变化. 假设在椭圆夹杂内的本征应变的各分量均为位置的线性函数.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^* &= a_1x + b_1y, & \gamma_{23}^* &= a_4x + b_4y, \\ \varepsilon_{22}^* &= a_2x + b_2y, & \gamma_{31}^* &= a_5x + b_5y, \\ \varepsilon_{33}^* &= a_3x + b_3y, & \gamma_{12}^* &= a_6x + b_6y,\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $a_n, b_n (n = 1, 2, \dots, 6)$ 是问题中给定的常数. 上式中取常数项为零, 因为 $\varepsilon_{ij}^* =$

const 情况下的结果已包括在文献 [1] 中. 把文献 [1] 和本文的结果迭加起来, 即可处理常数项不为零的情况. 把 (1) 式代入文献 [1] 中 (11) 及 (14) 式, 得到拘束场的位移函数如下:

1. 平面应变情况

$$\begin{aligned}
 u^c(x, y) &= \int_A (U_1 \varepsilon_{11}^* + U_2 \varepsilon_{22}^* + U_3 \varepsilon_{33}^* + U_4 \gamma_{12}^*) dx' dy' \\
 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_A \left[(1-2\nu) \frac{X}{X^2 + Y^2} + \frac{2X^3}{(X^2 + Y^2)^2} \right] \\
 &\quad \times (a_1 x' + b_1 y') dx' dy' + \dots, \\
 v^c(x, y) &= \int_A (V_1 \varepsilon_{11}^* + V_2 \varepsilon_{22}^* + V_3 \varepsilon_{33}^* + V_4 \gamma_{12}^*) dx' dy' \\
 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_A \left[-(1-2\nu) \frac{Y}{X^2 + Y^2} + \frac{2X^2 Y}{(X^2 + Y^2)^2} \right] \\
 &\quad \times (a_1 X' + b_1 y') dx' dy' + \dots.
 \end{aligned} \tag{2}$$

2. 反平面应变情况

$$\begin{aligned}
 w^c(x, y) &= \int_A (W_1 \gamma_{13}^* + W_2 \gamma_{23}^*) dx' dy' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{X}{X^2 + Y^2} (a_5 x' + b_5 y') dx' dy' + \dots,
 \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $X = x - x'$, $Y = y - y'$, ν 为泊松比. 积分遍及夹杂所占的整个椭圆面积为 A .

应该指出, (2) 和 (3) 式对于夹杂以内和以外的点都是适用的. 现在我们计算夹杂内的拘束场, 取 (x, y) 为夹杂内的某一点. 以 (x, y) 为原点, 引入极坐标

$$x' = x + r \cos \theta, \quad y' = y + r \sin \theta. \tag{4}$$

这样, 可以把 (2), (3) 式的积分变换成对 r 和 θ 的积分. 对 r 的积分限由椭圆夹杂的边界决定, 在此边界上 r 与 θ 的关系为

$$r(\theta) = -\frac{x\beta^2 \cos \theta + y \sin \theta}{\beta^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\beta \sqrt{a^2(\beta^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - (x \sin \theta - y \cos \theta)^2}}{\beta^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \tag{5}$$

其中

$$\beta = b/a. \tag{6}$$

利用 (4) 式, 并先对 r 积分后 (2) 式可写为

$$\begin{aligned}
 u^c(x, y) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ - \int_0^{2\pi} [(1-2\nu) \cos \theta + 2 \cos^3 \theta] (a_1 x + b_1 y) r(\theta) d\theta \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(1-2\nu) \cos \theta + 2 \cos^3 \theta] (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) r^2(\theta) d\theta \\
 &\quad \left. + \dots \right\}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

关于 $v^c(x, y)$ 及 $w^c(x, y)$ 也有类似的结果. 以上这些都是关于 θ 在单位圆上的积分. 被积函数中包括 $r(\theta)$ 的积分与在文献 [1] 中碰到的完全一样, 对这些积分 (5) 式中的第二

项实际上无贡献. 我们新碰到的是被积函数中包括 $r^2(\theta)$ 的一些积分, 对于它们则(5)式求平方时出现的交叉项亦无贡献. 这个情况与计算椭球体的牛顿势时是类似的^[4]. 利用留数方法计算出这些积分之后, 得到.

$$\begin{aligned} u^c(x, y) = & \frac{a_1}{4(1-\nu)} \left\{ \left[(1-2\nu) \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta(2+\beta)^2 - \beta^2}{(1+\beta)^3} \right] x^2 \right. \\ & + \left[(1-2\nu) \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{3-\beta}{(1+\beta)^2} \right] y^2 \Big\} \\ & + \frac{b_1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(3+\beta)}{(1+\beta)^3} \right] xy \\ & + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$u^c(x, y)$ 及 $w^c(x, y)$ 亦有类似结果. 可见拘束场的位移函数为 x, y 的二次多项式. 按照一般应变与位移函数之间的关系, 可以得到以下线性的拘束应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^c &= A_1 x + B_1 y, & \gamma_{13}^c &= A_4 x + B_4 y, \\ \varepsilon_{22}^c &= A_2 x + B_2 y, & \gamma_{31}^c &= A_5 x + B_5 y, \\ \varepsilon_{33}^c &= 0, & \gamma_{12}^c &= A_6 x + B_6 y. \end{aligned} \quad (9)$$

这里 A_m, B_m 与 a_n, b_n 的关系可以用矩阵形式表示

$$\begin{aligned} \{A_m\} &= [S_{mn}^A] \{a_n\} + [T_{mn}^A] \{b_n\}, \\ \{B_m\} &= [S_{mn}^B] \{a_n\} + [T_{mn}^B] \{b_n\}. \end{aligned} \quad (10)$$

这里, $\{A_m\}$ 和 $\{B_m\}$ 理解为有五个元素的列矩阵, 而列矩阵 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 则有六个元素. $[S_{mn}^A], [T_{mn}^A], \dots$ 等为 5×6 的矩阵, 其不为零的元素共 32 个, 可称为一级拘束系数, 它们是

$$\begin{aligned} S_{11}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta(2+\beta)^2 - \beta^2}{(1+\beta)^3} \right], \\ S_{12}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(3+\beta)}{(1+\beta)^3} \right], \\ S_{13}^A &= \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2}, \\ S_{21}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1-\beta}{(1+\beta)^3} \right], \\ S_{22}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1+3\beta}{(1+\beta)^3} \right], \\ S_{13}^A &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \cdot \frac{1}{(1+\beta)^2}, \\ S_{44}^A &= \frac{1}{(1+\beta)^2}, \quad S_{55}^A = \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2}, \quad S_{66}^A = \frac{1}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) - \frac{2\beta}{(1+\beta)^3} \right]; \quad (11) \\ T_{16}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(1-\beta)}{(1+\beta)^3} \right], \\ T_{26}^A &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(\beta-1)}{(1+\beta)^3} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{45}^A &= T_{54}^A = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}, \\
 T_{61}^A &= \frac{2}{(1-\nu)} \cdot \frac{\beta^2}{(1+\beta)^3}, \quad T_{62}^A = \frac{2}{(1-\nu)} \cdot \frac{\beta^3}{(1+\beta)^3}, \\
 T_{63}^A &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{2\beta^2}{(1+\beta)^2};
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 S_{16}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1-\beta}{(1+\beta)^3} \right], \\
 S_{26}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta-1}{(1+\beta)^3} \right], \\
 S_{45}^B &= S_{54}^B = \frac{1}{(1+\beta)^2}, \\
 S_{61}^B &= \frac{2}{(1-\nu)} \frac{1}{(1+\beta)^3}, \quad S_{62}^B = \frac{2}{(1-\nu)} \cdot \frac{\beta}{(1+\beta)^3}, \\
 S_{63}^B &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \cdot \frac{2}{(1+\beta)^2};
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(3+\beta)}{(1+\beta)^3} \right], \\
 T_{12}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} + \frac{\beta^2(\beta-1)}{(1+\beta)^3} \right], \\
 T_{13}^B &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}, \\
 T_{21}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{(1+2\beta)}{(1+\beta)^2} + \frac{1+3\beta}{(1+\beta)^3} \right], \\
 T_{22}^B &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1+2\beta}{(1+\beta)^2} + \frac{(1+2\beta)^2-\beta}{(1+\beta)^3} \right], \\
 T_{23}^B &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{2\beta+1}{(1+\beta)^2}, \\
 T_{44}^B &= \frac{1+2\beta}{(1+\beta)^2}, \quad T_{55}^B = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}, \\
 T_{66}^B &= \frac{1}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) - \frac{2\beta^2}{(1+\beta)^3} \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

所有未写出的矩阵元素均为零. 以上(9)–(14)式是计算拘束应变的基本公式, 这里对 β 没有任何限制. 它们对于夹杂理论的应用问题是很重要的.

三、扁平椭圆夹杂外的应力场

为了应用于断裂问题, 我们考虑椭圆的轴比 $\beta \ll 1$ 的情况. 当夹杂的本征应变为位置的线性函数时, 仍可仿照文献 [1] 中的方法求得夹杂以外应力场的解析表达式. 因为夹杂是扁平的, 可认为本征应变 ε_{ij}^* 仅为 x 的函数. 与断裂力学中的 I 型裂纹相应, 先考虑三个拉伸的本征应变 ε_{11}^* , ε_{22}^* 和 ε_{33}^* . 由 (2) 式, 有

$$\begin{aligned}
 u^c(x, y) &= \int_{-a}^{+a} \int_{-\beta\sqrt{a^2-x'^2}}^{+\beta\sqrt{a^2-x'^2}} (U_1 a_1 + U_2 a_2 + U_3 a_3) x' dx' dy', \\
 v^c(x, y) &= \int_{-a}^{+a} \int_{-\beta\sqrt{a^2-x'^2}}^{+\beta\sqrt{a^2-x'^2}} (V_1 a_1 + V_2 a_2 + V_3 a_3) x' dx' dy', \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中 $U_1, \dots, V_1, \dots$ 的意义同前, a_1, a_2 和 a_3 的定义见 (1) 式. 在 $\beta \ll 1$ 的情况下, (15) 式的二重积分可简化为以下形式:

$$\begin{aligned}
 u^c(x, y) &= \frac{\beta}{2\pi(1-\nu)} \{[(3-2\nu)a_1 - (1-2\nu)a_2 + 2\nu a_3] I' + 2(a_2 - a_1) II'\}, \\
 v^c(x, y) &= \frac{\beta}{2\pi(1-\nu)} \{[-(1-2\nu)a_1 + (3-2\nu)a_2 + 2\nu a_3] III' \\
 &\quad - 2(a_2 - a_1) IV'\}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中 I', II', III', IV' 代表以下四个积分:

$$\begin{aligned}
 I' &= \int_{-a}^{+a} \frac{X}{X^2 + y^2} x' \sqrt{a^2 - x'^2} dx', \\
 II' &= \int_{-a}^{+a} \frac{X y^2}{(X^2 + y^2)^2} x' \sqrt{a^2 - x'^2} dx', \\
 III' &= \int_{-a}^{+a} \frac{y}{X^2 + y^2} x' \sqrt{a^2 - x'^2} dx', \\
 IV' &= \int_{-a}^{+a} \frac{X^2 y}{(X^2 + y^2)^2} x' \sqrt{a^2 - x'^2} dx'. \quad (17)
 \end{aligned}$$

以上两式与文献 [1] 中 (31), (32) 式是完全对应的. 利用文献 [5] 中给出的结果, 可以算出以上几个积分

$$\begin{aligned}
 I' &= \pi(x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} a^2 - i \frac{\pi}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} - \bar{z} \sqrt{a^2 - \bar{z}^2}), \\
 II' &= \pi y^2 - \frac{\pi}{4} y \left[(\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{a^2 - \bar{z}^2}) - \left(\frac{z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \frac{\bar{z}^2}{\sqrt{a^2 - \bar{z}^2}} \right) \right], \\
 III' &= -2\pi x y + \frac{\pi}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + \bar{z} \sqrt{a^2 - \bar{z}^2}), \\
 IV' &= -2\pi x y + i \frac{\pi}{4} y \left[(\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{a^2 - \bar{z}^2}) - \left(\frac{z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\bar{z}^2}{\sqrt{a^2 - \bar{z}^2}} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} (z \sqrt{a^2 - z^2} + \bar{z} \sqrt{a^2 - \bar{z}^2}), \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (19)$$

和文献 [1] 一样, 我们仍用下标 x 和 y 表示偏导数, 如 $I'_x = \frac{\partial I'}{\partial x}$ 等. 可以证明文献 [1] 中 (35) 式现在仍然成立. 把 (18) 式代入 (16) 式并根据虎克定律, 得到夹杂的外拘束场为

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^c &= \frac{G\beta}{\pi(1-\nu)} [(3a_1 - a_2 + 2\nu a_3) I'_x + 2(a_2 - a_1) II'_x], \\
 \sigma_{yy}^c &= -\frac{G\beta}{\pi(1-\nu)} [(a_1 + a_2 + 2\nu a_3) I'_x + 2(a_2 - a_1) II'_x], \\
 \tau_{xy}^c &= \frac{G\beta}{\pi(1-\nu)} [2(a_1 + \nu a_3) I'_y + 2(a_2 - a_1) II'_y],
 \end{aligned} \quad (20)$$

其中 G 为切变模量,

$$II'_y = II'_x + \frac{1}{2} I'_y. \quad (21)$$

(20) 及 (21) 式与文献 [1] 中 (36) 及 (37) 式是完全相似的.

对 (18) 式求偏导数, 经过简单运算可得到 (20) 式中

$$\begin{aligned}
 I'_x &= \pi \left[2x + R \sin \theta - \frac{2xy}{R} \cos \theta + \frac{(x^2 - y^2)}{R} \sin \theta \right], \\
 II'_x &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{3y}{R} (x \cos \theta + y \sin \theta) + \frac{xy}{R^3} (x^2 - 3y^2) \cos 3\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{y^2}{R^3} (3x^2 - y^2) \sin 3\theta \right], \\
 I'_y &= \pi \left[-2y + R \cos \theta - \frac{2xy}{R} \sin \theta - \frac{(x^2 - y^2)}{R} \cos \theta \right], \\
 II'_y &= \pi \left[y + \frac{3y}{2R} (x \sin \theta - y \cos \theta) - \frac{y^2}{2R^3} (3x^2 - y^2) \cos 3\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{xy}{2R^3} (x^2 - 3y^2) \sin 3\theta \right].
 \end{aligned} \quad (22)$$

这里的 R, θ 由下式定义^[6]:

$$\sqrt{a^2 - z^2} = R e^{i\theta}. \quad (23)$$

把 (22) 式代入后, (20) 式即代表夹杂外场的解析表达式. 以下我们着重考虑在夹杂的两个端点的情况.

我们在夹杂的两个端点 (见图 1) 分别取极坐标 (r, α) 和 (r, φ) . 先考虑 $(+a, 0)$ 端点, 在此点附近有

$$x + iy = (a + r \cos \alpha) + ir \sin \alpha, \quad (24)$$

$$R \simeq \sqrt{2ar}, \quad \theta \simeq \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

这时 (20) 式趋近以下的极限形式:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^c &= \frac{G}{(1-\nu)} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta (a_2 - a_1) a \cos \frac{\alpha}{2} \\
 &\quad \times \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} - \frac{2(a_1 + \nu a_3)}{(a_2 - a_1)} \right],
 \end{aligned}$$

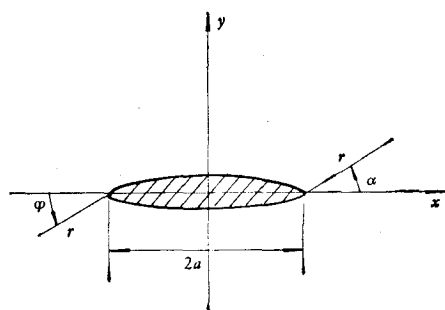


图 1 片状夹杂的两个端点

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^c &= \frac{G}{(1-\nu)} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta(a_2 - a_1) a \cos \frac{\alpha}{2} \\
&\quad \times \left[1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \frac{2(a_1 + \nu a_3)}{(a_2 - a_1)} \right], \\
\tau_{xy}^c &= \frac{G}{(1-\nu)} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta(a_2 - a_1) a \sin \frac{\alpha}{2} \\
&\quad \times \left[\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} - \frac{2(a_1 + \nu a_3)}{(a_2 - a_1)} \right]. \quad (26)
\end{aligned}$$

和均匀转变的夹杂^[1]一样,此式与裂纹端点附近的应力场是完全相似的. 因此,我们可以在片状夹杂的端点 $(+a, 0)$ 定义以下的应力强度因子:

$$K_I^+ = \frac{G}{(1-\nu)} (\pi a)^{1/2} \beta(a_2 - a_1) a_1 \left[1 + \frac{2(a_1 + \nu a_3)}{(a_2 - a_1)} \right]. \quad (27)$$

此式与文献[1]中(43)式比较,两者是完全类似的. 仅 $(\varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{11}^*)$ 换成为 $(a_2 - a_1) \cdot a$ 等,而 $(a_2 - a_1) \cdot a$ 正好代表在夹杂端部 $(x = +a)$ 处的 $(\varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{11}^*)$ 值. 可见,对不均匀转变夹杂而言,片状夹杂的应力强度因子仅决定于夹杂端部的本征应变值. 实际上这个结果是普遍成立的^[7].

对应于 II 型裂纹问题,我们考虑夹杂中的本征应变只有一个分量 $\gamma_{12}^* = 2\varepsilon_{12}^* = a_6 x$ 的情况. 采用完全相同的方法,可以得到在夹杂 $(+a, 0)$ 端部的应力场为

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^c &= -\frac{G}{1-\nu} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta a_6 a \sin \frac{\alpha}{2} \left(2 + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right), \\
\sigma_{yy}^c &= \frac{G}{1-\nu} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta a_6 a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}, \\
\tau_{xy}^c &= \frac{G}{1-\nu} \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta a_6 a \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right). \quad (28)
\end{aligned}$$

相应的应力强度因子为

$$K_{II}^+ = \frac{G}{1-\nu} (\pi a)^{1/2} \beta a_6 a. \quad (29)$$

与 III 型裂纹对应的是 $\gamma_{23}^* = 2\varepsilon_{23}^* = a_4 x$ 所引起的应力场

$$\begin{aligned}
\tau_{31}^c &= -G \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta a_4 a \sin \frac{\alpha}{2}, \\
\tau_{32}^c &= G \left(\frac{\pi a}{2\pi r} \right)^{1/2} \beta a_4 a \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (30)
\end{aligned}$$

这时的应力强度因子为

$$K_{III}^+ = G(\pi a)^{1/2} \beta a_4 a. \quad (31)$$

现在,考虑片状夹杂的另一端点 $(-a, 0)$. 采用图 1 中所示的极坐标,显然在 $(-a, 0)$ 附近有如下关系:

$$x + iy = -(a + r \cos \varphi) - ir \sin \varphi, \quad (32)$$

$$R \simeq \sqrt{2ar}, \quad \theta \simeq \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

当 $r \ll 1$ 时, (20) 式趋近的极限形式与 (26) 式的绝对值相同,但符号相反. 因而与应力

强度因子相当的量为

$$K_I^- = -\frac{G}{1-\nu} (\pi a)^{1/2} \beta (a_2 - a_1) a \left[1 + \frac{2(a_1 + \nu a_3)}{(a_2 - a_1)} \right] = -K_I^+. \quad (34)$$

对 II 型和 III 型问题, 有完全类似的结果

$$K_{II}^- = -\frac{G}{1-\nu} (\pi a)^{1/2} \beta a_6 a = -K_{II}^+, \quad (35)$$

$$K_{III}^- = -G(\pi a)^{1/2} \beta a_4 a = -K_{III}^+. \quad (36)$$

在工程断裂力学中, 负的应力强度因子是没有意义的. 然而在 (34)–(36) 式中, $(a_2 - a_1)$, a_6 或 a_4 这些系数本身可以是负值, 因而对于线性的片状夹杂来说, 总有一端出现正的应力强度因子. 另外, 如果夹杂中的本征应变可分成常数项和线性项两部份时, 则 (34)–(36) 式应该与文献 [1] 中相应的 (43), (44) 及 (45) 式迭加, 以求出总的应力强度因子. 值得注意的是, 在均匀的夹杂的两端应力状态是对称的, 因而其应力强度因子相等. 而对于线性的夹杂来说, 其两端的应力场是反对称的, 因而应力强度因子改变符号.

四、应用的例子

以上两节的结果, 可直接应用于在不均匀 (线性的) 加载条件下与异性夹杂有关的问题. 文献 [1] 中计算与异性夹杂等效的夹杂的方法, 对于不均匀的夹杂在不均匀的加载条件下仍然是有效的. 在文献 [1] 的 (24) 和 (25) 式中, 如果外加应变 ϵ_{ij}^A 是位置的线性函数, 则我们可假设 ϵ_{ij}^* 也是线性函数. 由本文的结果, ϵ_{ij}^C 亦为位置的线性函数. 因此, 文献 [1] 中 (24) 和 (25) 式的各式的两端均为 x 和 y 的一次函数, 让 x 和 y 的系数分别相等, 即可得到所要求解的方程式. 这样, 可以求出线性的等效夹杂 ϵ_{ij}^* .

1. 在弯曲加载条件下的裂纹

在一弯曲梁的中心有一微小裂纹, 并且假设裂纹面与弯曲应力垂直. 现在外加应力为线性函数: $\sigma_{22}^A = qx$, 其余分量为零. 由虎克定律有

$$\begin{aligned} \epsilon_{22}^A &= \frac{qx}{2G(1+\nu)}, \quad \epsilon_{11}^A = \epsilon_{33}^A = -\frac{\nu qx}{2G(1+\nu)}, \\ \epsilon^A &= \epsilon_{11}^A + \epsilon_{22}^A + \epsilon_{33}^A = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} qx. \end{aligned} \quad (37)$$

对裂纹或空腔而言, $G_1 = K_1 = 0$, 因此 $\Delta G = -G$, $\Delta K = -K$. 我们假定等效的本征应变也是线性函数

$$\epsilon_{11}^* = a_1 x, \quad \epsilon_{22}^* = a_2 x, \quad \epsilon_{33}^* = a_3 x. \quad (38)$$

这样, 由 (9)–(11) 式可求出

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^C &= (s_{11}^A a_1 + s_{12}^A a_2 + s_{13}^A a_3) x, \\ \epsilon_{22}^C &= (s_{21}^A a_1 + s_{22}^A a_2 + s_{23}^A a_3) x. \end{aligned} \quad (39)$$

把 (37)–(39) 式代入文献 [1] 中 (25) 式, 经简单运算可得到以下关于 a_1 , a_2 及 a_3 的联立方程组:

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\beta}{1+\beta} a_1 + \left[-(1+\beta)^2 + \frac{1+3\beta}{1+\beta} \right] a_2 + \nu[2 - (1+\beta)^2] a_3 \\
&= -\frac{q}{2G} (1-\nu)(1+\beta)^2, \\
& \left(\nu - \frac{1}{1+\beta} \right) a_1 + \beta \left[\nu(2+\beta) - \frac{1}{1-\beta} \right] a_2 + [(1+\beta)^2 - \nu] a_3 = 0, \\
& a_1 + [(1+\beta)^2 - 1] a_2 + (1+\beta)^2 a_3 = \frac{q}{2G} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) (1+\beta)^2. \quad (40)
\end{aligned}$$

此方程组的解为

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{q}{2G} (1-\nu) \left(1+\beta - \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \right), \\
a_2 &= \frac{q}{2G} (1-\nu) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\nu^2} \right), \\
a_3 &= -\frac{q}{2G} (1-\nu) \frac{\nu}{1-\nu^2}. \quad (41)
\end{aligned}$$

以上结果中对 β 没有限制。应用于裂纹问题时,可取 $\beta \ll 1$ 。把 (41) 式代入 (27) 式,可得到在裂纹正的一端的应力强度因子为

$$K_I^+ = \frac{q}{2} a(\pi a)^{1/2}. \quad (42)$$

这与断裂力学中已知的结果^[8]是完全一致的。

2. 在切应力作用下的片状硬夹杂物

对于切变型夹杂,等效的本征应变很容易计算。如果异性夹杂是刚性的,或者说是很硬的,则有 $G_1 \gg G$, 文献 [1] 中 (24) 式简化为

$$\gamma_{ij}^C = -\gamma_{ij}^A \quad (ij = 12, 23). \quad (43)$$

现在设外场为

$$\gamma_{ij}^A = \frac{q}{G} x \quad (ij = 12, 23). \quad (44)$$

则由 (43) 式可求得等效线性本征应变的系数为

$$a_6 = -\frac{q}{G} \frac{(1-\nu)(1+\beta)^2}{(1-\nu)(1+\beta)^2 - 2\beta}, \quad a_4 = -\frac{q}{G} (1+\beta)^2. \quad (45)$$

当 $\beta \ll 1$ 时,由 (29) 和 (31) 式可得到

$$K_{II}^+ = -\frac{q}{1-\nu} (\pi a)^{1/2} a\beta, \quad K_{III}^+ = -q(\pi a)^{1/2} a\beta. \quad (46)$$

在 $\beta \rightarrow 0$ 时, K_{II}^+ 和 K_{III}^+ 都趋近于零。可见,硬的片状夹杂物在切应力作用下,不造成应力奇点。

3. 片状切变型夹杂与微裂纹的交互作用

为了研究滑移或孪晶带对微观开裂的影响,我们曾求得片状夹杂附近的裂纹问题的严格解^[2]。如果裂纹的尺寸很小,或者在裂纹所占的范围内外应力场的变化不很激烈时,

用本文的结果可以很容易得到所需要的结果。

在图 2 中, 在微裂纹的中心取坐标 x' , y' , 微裂纹的长度为 $2a' = c - d$. 根据文献[2], 片状夹杂在 x 轴上产生的应力为

$$\sigma_{xy}^c(x) = \frac{K_{II}^0}{\sqrt{\sigma a}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right), \quad (47)$$

其中 K_{II}^0 为片状夹杂的原应力强度因子. 在微裂纹所在的区间 (d, c) , 用线性变化的场来近似(47)式

$$\sigma_{xy}^d = \tau + qx, \quad (48)$$

其中

$$\tau = \frac{1}{2} [\sigma_{xy}^c(d) + \sigma_{xy}^c(c)] = \frac{K_{II}^0}{2\sqrt{\sigma a}} \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}} - 2 \right), \quad (49)$$

$$q = \frac{1}{(c - d)} [\sigma_{xy}^c(c) - \sigma_{xy}^c(d)] = \frac{K_{II}^0}{2a'\sqrt{\sigma a}} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right). \quad (50)$$

现在, 用线性的片状夹杂来代替微裂纹 $2a' = c - d$. 先求出在(48)式作用下的等效本征应变, 再由文献[1]的(45)式及本文(29)式, (这里的 a' 与那里的 a 相当, 注意不要混淆.) 很容易求得微裂纹的两个端点的应力强度因子为

$$K_{II}^c = K_{II} + K_{II}^+ = -\frac{K_{II}^0}{4\sqrt{2}} \left(\frac{d}{a} \right) \frac{c}{\sqrt{a(c+d)}} \left[k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{4a}{d} \right) + 3k \right], \quad (51)$$

$$K_{II}^d = K_{II} - K_{II}^+ = -\frac{K_{II}^0}{4\sqrt{2}} \left(\frac{d}{a} \right) \frac{c}{\sqrt{a(c+d)}} \left[k_1 \left(\frac{3}{\sqrt{\delta}} - \frac{4a}{d} \right) + k \right]. \quad (52)$$

这里, 采用了以下符号[2]:

$$\delta = \frac{d^2 - a^2}{a^2}, \quad k = \frac{a}{d} \sqrt{\frac{c^2 - d^2}{c^2 - a^2}}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{c}. \quad (53)$$

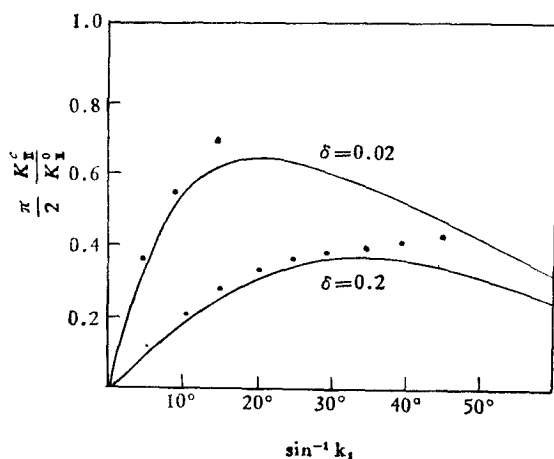


图 3 微裂纹 c 端的应力强度因子

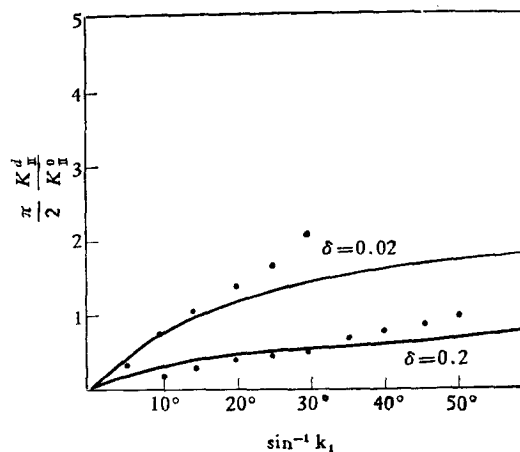


图 4 微裂纹 d 端的应力强度因子

对微裂纹可取 $c \approx d$, 因而(51)及(52)式还可以简化为

$$\begin{aligned}
 K_{II}^e &= \frac{K_{II}^0}{8} \left(\frac{d}{a} \right)^{3/2} \left[k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{4a}{d} \right) + 3k \right], \\
 K_{II}^d &= \frac{K_{II}^0}{8} \left(\frac{d}{a} \right)^{3/2} \left[k_1 \left(\frac{3}{\sqrt{\delta}} - \frac{4a}{d} \right) + k \right].
 \end{aligned} \quad (54)$$

图 3 和图 4 中的点是用 (54) 式计算的 K_{II}^e 和 K_{II}^d 值, 而曲线是由严格解得到的. 可以看到在一定范围内本文的结果与严格解是符合得很好的. 例如在 $\delta = 0.2$, 微裂纹相对于夹杂长度为 12% ($a'/a = 0.123$) 时, 本文的近似解仍然与严格解基本符合.

五、结 语

在夹杂理论的应用方面, 一般情况下只需要夹杂内拘束场的知识. 例如, 计算夹杂所引起的应力集中系数或应力强度因子等, 除了本征应变 (对异性夹杂则为等效的本征应变) 外, 只需要知道拘束系数. 因而本文的结果对很多实际问题是可以直接应用的.

夹杂理论应用于断裂的研究, 在均匀夹杂的情况下是成功的. 现在我们又看到, 对不均匀夹杂它同样是成功的. 在应力场不是急剧变化情况下, 用线性近似即可得到满意的结果. 本文提出的方法可以简化许多数学运算.

参 考 文 献

- [1] 张宏图、折晓黎, 物理学报, **30** (1981), 761.
- [2] 折晓黎、张宏图, 物理学报, **32** (1983), 182.
- [3] R. J. Asaro and D. M. Barnett, *J. Mech. Phys. Solids* **23** (1975), 77.
- [4] W. D. MacMillan, *The Theory of the Potential*, Dover Publications, New York, (1958).
- [5] Мусхелишвили, 赵惠元译, 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社, 365页(1965).
- [6] R. W. Lardner, *Mathematical Theory of Dislocation and Fracture*, University of Toronto Press, (1974).
- [7] 村外志夫、森勉, 转位と介在物, 培风馆 (1976).
- [8] 龙期威, 金属学报, **14** (1978), 118.

ELLIPTIC INCLUSIONS WITH LINEAR EIGEN STRAINS

ZHANG HONG-TU ZHAO XIAO-PENG

(Department of Physics, Lanzhou University)

ABSTRACT

If the eigen strains ϵ_{ij}^* of an elliptic inclusion are linear functions of position, the constraint strains ϵ_{ij}^c in the inclusion will also be linear functions of position. In this paper, all the constraint coefficients of first order are given. For the case $\beta \ll 1$, the analytical expressions of stress fields outside the inclusion are found. The results can be used directly to practical problems, such as that of the behavior of a crack under bending stresses and the interaction between a plate-form inclusion and a micro-crack.