

金属 $1/f$ 噪声理论

郁 明 康 刘 福 绥

(北京大学物理系)

1982 年 4 月 21 日收到

提 要

本文对已有四十多年实验观察历史的金属中的 $1/f$ 噪声现象提出了新的物理机制: 金属中局域电子的带有红外发散的扩散迁移引起 $1/f$ 噪声. 本文基于低频涨落、耗散、弛豫的普适理论建立了非马尔科夫扩散方程, 由此求得的噪声谱能解释 $1/f$ 噪声的四个基本特征, 并在参数合理取值的情况下和实验结果符合得较好. 本文还对已有理论等做了若干讨论.

一、引 言

对 $1/f$ 噪声的研究已有四十多年的历史. 由于这个课题意义很大, 所以历年来实验工作者做了大量的测试, 发表了许多数据和曲线, 理论工作者曾提出各种模型对此进行解释. 但从已发表的资料来看, 迄今为止, 还没有一种理论模型是很成功的.

一般测试 $1/f$ 噪声的线路如图 1 所示. 当 $I_{DC} = 0$ (因此 V_{DC} 也为 0) 时, 出现的电压噪声称为 Johnson 噪声或 Nyquist 噪声. 这种噪声的功率谱 $S_V(f)$ 的大小在 $f < 10^{10}$ Hz 时是与频率无关的, 所以有时称为“白谱”. Johnson 噪声已被很好地了解, 本文不对它进行讨论.

当 $I_{DC} = \text{常数} \neq 0$ 时, 观察到 $S_V(f)$ 的值会变大, 即噪声增加了. 噪声之所以会增大, 是因为此时产生了一种名为“Shot”的噪声, 另外还出现了一种其大小与频率密切相关的噪声, 这就是所谓的 $1/f$ 噪声.

Shot 噪声起因于在电场中作漂移的电荷的分立性, 在低频时, Shot 噪声的谱表示 $S_I(f) = 2eI_{DC}$, 也即 $S_V(f) = 2eV_{DC}$. 这表明 Shot 噪声的大小在低频时也与频率无关, 所以它的谱也是“白”的. 对 Shot 噪声的研究也比较成熟, 本文同样不多加叙述.

据实验观察, 在与频率无关的“背景”噪声上出现的 $1/f$ 噪声在低频段是噪声的主要形式. 它的起因几十年来尚未得出明确的结论. $1/f$ 噪声在金属、半导体材料及各种器件中广泛存在, 要全面总结 $1/f$ 噪声的特点比较困难. 本文主要讨论金属材料中的 $1/f$ 噪声.

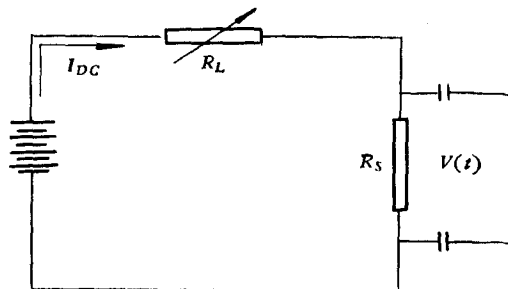


图 1

根据现有的实验资料,块金属中 $1/f$ 噪声的主要特征基本上可归纳如下:

1. $S_V(f) \propto 1/f^\alpha$, 这里 α 并不是严格等于 1. 对于不同的材料 α 值是不一样的, 常见的 α 值在 0.9 和 1.4 之间^[2].

一般说来, 对于同一种样品在所观察的低频段内 α 的值是不变的, 即 $S_V(f)-f$ 曲线是直的, 但也有些样品在低频段内 α 值是变化的^[3].

另外, 考虑到 $\int_0^\infty S_V(f) df \propto \int_0^\infty f^{-\alpha} df$ 应该收敛这一点, 所以对于任何样品, 在极低频 ($f \rightarrow 0$) 时 α 的值应变为小于 1, 而在极高频时 ($f \rightarrow \infty$), α 的值则应变为大于 1.

2. 实验指出^[4], 对于同一种样品 S_V 的大小是随温度 T 的变化而变化的, 而且在某些温度范围内 S_V 的大小很敏感地依赖于 T 的变化. S_V-T 实验曲线的形状比较复杂, 而且对于不同的样品有所不同, 因此很难用一个经验公式把 S_V 和 T 之间的关系表达出来.

3. S_V 正比于 $V_{bc}^2 = \langle V \rangle^2$.

4. S_V 反比于被测样品的体积 V_s .

上面四点基本上概括了到目前为止实验观察到的金属材料中的 $1/f$ 噪声的主要特征.

长期以来, 没有一种完善的理论能够全面解释这些基本特征. 近几年, 有些物理学家认为热涨落理论能够解释 $1/f$ 噪声现象, 这方面的工作起始于 Voss 和 Clarke, 后被 Hsiang, Ketchen 和 Clarke 所推进. Voss 和 Clarke 用来解释 $1/f$ 噪声的热涨落模型称为 P 源模型, 这是因为从传统的热扩散理论出发并不能得到与实验相吻合的 $1/f$ 谱, 所以他们在通常的热扩散方程上加了一个 P 源项^[5], 以此来得出 $1/f$ 谱. 应该指出, Voss 和 Clarke 并没有对他们所加的 P 源项的物理机制是什么作出说明, 从这一点来讲 P 源模型似乎并没有理论上的基础. 尽管如此, P 源模型比起以前的一些模型来讲还是取得了较大的成功. 它得出了 $1/f$ 的谱表示, 也能解释 $S_V \propto \langle V \rangle^2$ 和 $S_V \propto 1/V_s$. 正因为如此, P 源模型一度比较流行.

但 Van Vliet 认为, 从统计物理的观点来看 P 源模型是不正确的^[6]. 不过问题还不在于此, 重要的是, 这个模型对一些有意义的实验结果并不能作出很好的解释: 1. 实验指出 S_V 随 T 的改变而变化, 而从 Voss 和 Clarke 的理论得出的 S_V 值却基本上不随 T 改变^[4] (见图 7). 2. Clarke 等人曾制作过两种不同的样品 (A 样品和 B 样品) 用它们来测 S_V-f 曲线. A 样品是在玻璃衬底上直接镀上一层锡, B 样品则是在玻璃 (或蓝宝石) 的衬底上先镀一层厚 $50 \text{ \AA}$ 的铝, 然后再镀锡. 实验发现, A 样品和 B 样品的 S_V-f 曲线形状是非常不同的^[3] (见图 6). Clarke 等人推算得的曲线与 A 样品的实验曲线符合甚好, 但与 B 样品的曲线相比相差甚远. 对此 Clarke 等人作了一个含糊的解释, 说是在衬底上先镀一层 $50 \text{ \AA}$ 的铝, 使样品与衬底间的边界热耦合发生了改变, 因而曲线的形状也发生了变化. 但具体讲来, 边界热耦合的改变如何使曲线的形状发生如此大的变化, 他们则未能作出说明.

总的来说, Voss 和 Clarke 的理论有其成功之处, 但也存在较大的问题. 因此我们试图从其它途径出发, 建立起一个新的物理模型, 对金属中的 $1/f$ 噪声作出解释.

二、局域电子的扩散迁移模型及 $1/f$ 噪声公式

Van Vliet 和 Fassett 等人在噪声方面做过许多有意义的工作,六十年代他们曾从载流子扩散迁移所引起的涨落-耗散出发来求噪声谱^[1],但是未能得出与实验曲线相吻合的 $1/f$ 谱. 通过分析,我们认为他们之所以没能成功地解释 $1/f$ 噪声是因为他们没有从新的角度出发对粒子的扩散迁移过程进行更深刻的考虑.

我们分析了大量的 $1/f$ 噪声的实验曲线,觉得有一些现象是很富有启发性的,例如,同一个样品弯曲程度不同, $S_V(f)-f$ 曲线就不同^[7];又如,象上面所说的那样同一种材料镀在不同的衬底上制成不同的样品,其 $S_V(f)-f$ 曲线将不同;再如,在一个较大的温度区间内 S_V 将随着 T 的上升而变大,等等.

对这些现象进行仔细的研究分析后,我们逐渐形成这样的看法:金属材料中局域电子被“激活”后参与的带有红外发散的扩散迁移是 $1/f$ 噪声的起因.

根据 Ngai 近几年提出的凝聚物质低频 ($f < 10^9$ Hz) 涨落、耗散和弛豫行为的统一理论^[8,9],电子运动将产生低能激发,这些低能激发具有红外发散的性质. 不同的物体,由于其内部结构不一样,所以它们的红外发散特性是有差异的,这具体体现在红外发散指数 n 的值对于不同的物体是不一样的.

根据 Ngai 的理论还可知道,电子运动所产生的低能激发将以红外发散的形式修改电子的扩散迁移过程,这使得电子的扩散迁移将和其“历史”情况有关,因此应从非马尔科夫方程出发来考虑电子的扩散迁移过程.

另外,任何一块实际金属,由于位错、杂质、边界不匹配等情况的存在,它的内部结构绝不可能是严格的周期性点阵排列,局部看来总有一些非晶态结构,因此任何一块实际金属材料中或多或少地存在着一些局域化电子. 如果公有化电子的浓度是 $10^{22}/\text{cm}^3$,而局域化电子的数量仅是公有化电子的亿分之一,那么局域化电子的浓度也有 $10^{14}/\text{cm}^3$.

一个样品弯曲程度不同,就其内部结构来讲,晶格的畸变程度也将不同. 同样,把一个金属层镀在不同的衬底上,由于不同衬底的不同影响,使金属层的内部结构将发生不同的变化,尤其是当这个金属层很薄的时候,情况更是如此. 晶格结构的不同变化将使局域化的情况也发生不同变化,而且将使物体的红外发散性质发生不同变化. 这使得不同物体中局域电子扩散迁移的具体过程是不一样的,从而将使噪声曲线发生改变.

我们还考虑到局域电子要参与扩散,就有一个被激活的问题,而激活的几率是和温度密切相关的,这使得由局域电子的扩散-涨落-耗散所引起的噪声将与温度密切相关.

把上述这些物理机制和那些富有启发性的现象联系起来,就可以看出,要从扩散迁移所引起的涨落-耗散出发来求噪声谱,就必须考虑局域电子的非马尔科夫扩散过程.

对于一个非马尔科夫扩散过程应有^[10]

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{a_0^2}{6} \int_0^t \phi(t-\tau) \nabla^2 n(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \quad (1)$$

由于我们考虑的是局域电子的扩散,所以这里 $n(\mathbf{r}, t)$ 为 t 时刻 $\mathbf{r}$ 处局域电子的浓度. a_0 为扩散行走时,电子每次迁移的平均距离. $\phi(t)$ 是记忆函数,它的出现代表着对

扩散粒子“历史”情况的考虑.

对于(1)式所描写的方程,相应的格林函数满足:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}')}{\partial t} = \frac{a_0^2}{6} \int_0^t \phi(t-\tau) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}') d\tau + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t). \quad (2)$$

对(2)式两边同时作拉氏变换则有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}')}{\partial t} e^{-st} dt &= \frac{a_0^2}{6} \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t \phi(t-\tau) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}') d\tau \\ &+ \int_0^\infty e^{-st} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

根据折积定理,并考虑到零时刻粒子出现在 $\mathbf{r}$ 处的几率为0(即 $G(\mathbf{r}, 0; \mathbf{r}') = 0$)则(3)式化为

$$sG^*(\mathbf{r}, s; \mathbf{r}') = \frac{a_0^2}{6} \phi^*(s) \nabla^2 G^*(\mathbf{r}, s; \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4)$$

其中 $G^*(\mathbf{r}, s; \mathbf{r}')$ 为 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}')$ 的拉氏变换.

令 $s = if$, 则

$$ifG^*(\mathbf{r}, if; \mathbf{r}') = \frac{a_0^2}{6} \phi^*(if) \nabla^2 G^*(\mathbf{r}, if; \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5)$$

另外,若一个扩散过程发生在体积 V_s 内,则粒子数涨落关联函数的谱表示 $S_N(f)$ 应等于^[11]

$$S_N(f) = \frac{4\langle \Delta N^2 \rangle}{V_s} \operatorname{Re} \int_{V_s} \int_{V_s} G^*(\mathbf{r}, if, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

这里 N 为 V_s 中局域电子的总数, $N(t) = \int_{V_s} n(\mathbf{r}t) d\mathbf{r}$. $S_N(f)$ 与电流噪声谱 $S_I(f)$ 间的关系为^[12]

$$S_I(f) = \frac{\langle I \rangle^2}{N^2} S_N(f). \quad (7)$$

进而可知,电压噪声谱为

$$S_V(f) = \frac{\langle V \rangle^2}{N^2} S_N(f). \quad (8)$$

从上面这些式子可以看出,如果我们知道了 $\phi^*(s)$ 的具体形式,即可以确定(4)或(5)式的解,进而由(6),(8)式求得 $S_N(f)$ 和 $S_V(f)$.

$\phi^*(s)$ 的具体形式可从跃迁时间几率密度分布函数 $\phi(t)$ 求得.

若以 Q 表示扩散粒子保持在特定位置上的几率,则 $\phi(t)$ 的定义为

$$\phi(t) \equiv - \frac{dQ}{dt}. \quad (9)$$

记忆函数 $\phi(t)$ 的拉氏变换与根据上式定义的 $\phi(t)$ 的拉氏变换之间存在着下述关系^[11]:

$$\phi^*(s) = \frac{s\phi^*(s)}{1 - \phi^*(s)}. \quad (10)$$

根据 Ngai 的理论, $\phi(t)$ 应取如下形式^[9]:

$$\phi(t) = (1-n)at^{-n}\exp(-at^{1-n}), \quad (11)$$

$$a \equiv [e^{n\gamma}(1-n)\tau_0 E_c^n]^{-1}, \quad (12)$$

其中 n 的意义上面已讲过, n 的值在 0 和 1 之间, γ 为一常数, 等于 0.577. $E_c = \hbar f_c$ ($f_c = 10^9$ Hz). τ_0 在这里代表粒子在扩散过程中在某个位置停留的时间.

$$\begin{aligned} \phi^*(S) &= \int_0^\infty e^{-St}(1-n)at^{-n}\exp(-at^{1-n})dt \\ &= 1 - S \int_0^\infty e^{-St}\exp(-at^{1-n})dt. \end{aligned} \quad (13)$$

对 $\exp(-at^{1-n})$ 作展开, 则可得

$$\phi^*(S) = a\Gamma[1+(1-n)]S^{-(1-n)} - \frac{a^2}{2!}\Gamma[1+2(1-n)]S^{-2(1-n)} + \dots \quad (14)$$

$$\text{若 } |a\Gamma[1+(1-n)]S^{-(1-n)}| \gg \left| \frac{a^2}{2}\Gamma[1+2(1-n)]S^{-2(1-n)} \right| \quad (S \equiv if)$$

也即

$$f \gg \left\{ \frac{\Gamma[2(1-n)]}{\Gamma(1-n)} a \right\}^{\frac{1}{1-n}}, \quad (15)$$

则 (14) 式简化为

$$\phi^*(S) = a(1-n)\Gamma(1-n)S^{-(1-n)}. \quad (16)$$

由 (10) 和 (16) 式可得

$$\phi^*(S) = \frac{S \cdot a(1-n)\Gamma(1-n)S^{-(1-n)}}{1 - a(1-n)\Gamma(1-n)S^{-(1-n)}}. \quad (17)$$

$$\text{若 } |a(1-n)\Gamma(1-n)S^{-(1-n)}| \ll 1$$

$$\text{即 } f \gg [a(1-n)\Gamma(1-n)]^{\frac{1}{1-n}} \equiv A_1(n, \tau_0), \quad (18)$$

则 (17) 式可化简为

$$\phi^*(S) = a(1-n)\Gamma(1-n)S^n. \quad (19)$$

$$\text{经计算 } \frac{\Gamma[2(1-n)]}{\Gamma(1-n)} < (1-n)\Gamma(1-n).$$

所以只要满足了 (18) 式, (15) 式即自动成立, 也就是说, 只要 f 在 (18) 式所示范围内, (16), (17), (19) 式就成立.

为了全面考察 $\phi^*(S)$ 及 $\phi^*(S)$ 在各种频率范围内应取的形式, 下面我们从另一角度来计算 $\phi^*(S)$.

$$\phi^*(S) = \int_0^\infty e^{-St}\phi(t)dt, \quad (20)$$

所以

$$\phi^*(S) = \int_0^\infty \left(1 - St + \frac{S^2 t^2}{2} + \dots \right) \phi(t)dt. \quad (21)$$

定义

$$\langle t^m \rangle \equiv \int_0^\infty t^m \phi(t)dt, \quad (22)$$

则

$$\phi^*(S) = \int_0^\infty \phi(t) dt - S\langle t \rangle + \frac{S^2}{2} \langle t^2 \rangle + \dots \quad (23)$$

$\phi(t)$ 为跃迁时间几率密度分布函数, 由其归一性可得

$$\int_0^\infty \phi(t) dt = 1. \quad (24)$$

所以

$$\phi^*(S) = 1 - S\langle t \rangle + \frac{S^2}{2} \langle t^2 \rangle + \dots \quad (25)$$

若

$$\left| \frac{\frac{S^2}{2} \langle t^2 \rangle}{S\langle t \rangle} \right| = \left| \frac{S\langle t^2 \rangle}{2\langle t \rangle} \right| \ll 1$$

即

$$f \ll \left| \frac{2\langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle} \right|, \quad (26)$$

则(25)式可化为

$$\phi^*(S) = 1 - S\langle t \rangle. \quad (27)$$

把(27)式代入(10)式, 有

$$\phi^*(S) = \frac{1 - S\langle t \rangle}{\langle t \rangle}. \quad (28)$$

再设 $|S\langle t \rangle| \ll 1$

也即

$$f \ll \left| \frac{1}{\langle t \rangle} \right|, \quad (29)$$

则

$$\phi^*(S) = \frac{1}{\langle t \rangle}. \quad (30)$$

在导得(30)式的过程中, 我们应用了(26)和(29)式所示的两个条件, 下面对这两个条件作些讨论.

由(22)式所示的定义可得

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle &= \int_0^\infty t^2 (1-n) a t^{-n} \exp(-a t^{1-n}) dt \\ &= a^{-\frac{2}{1-n}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{1-n}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \int_0^\infty t (1-n) a t^{-n} \exp(-a t^{1-n}) dt \\ &= a^{-\frac{1}{1-n}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

所以(26)和(29)式分别化为

$$f \ll \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{1-n}\right)} a^{\frac{1}{1-n}} = A_2(n, \tau_0), \quad (33)$$

$$f \ll \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)} a^{\frac{1}{1-n}}. \quad (34)$$

经计算

$$\frac{2\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{1-n}\right)} < \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}.$$

所以若 (33) 式(即 (26) 式)成立, 则 (34) 式(即 (29) 式)自动成立. 因此只要 f 在 (33) 式所示范围内, 就有 (30) 式所示结果:

$$\phi^*(S) = \frac{1}{\langle f \rangle} = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)} a^{\frac{1}{1-n}}. \quad (35)$$

有了 (19) 和 (35) 式, 我们就可由 (4) (或 (5) 式), (6), (8) 式求得 $S_V(f)$.

用求格林函数的标准解法, 可得出 (4) 式的解为

$$G^*(\mathbf{r}, S; \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi M |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (36)$$

其中

$$M = \frac{a_0^2}{6} \phi^*(S) \quad (S \equiv if), \quad (37)$$

$$k = \sqrt{-\frac{S}{M}} = \sqrt{\frac{f}{M}} e^{i\frac{3}{4}\pi}. \quad (38)$$

把 (36) 式代入 (6) 式可得

$$S_N(f) = \frac{4N}{V_S} \operatorname{Re} \int_{V_S} \int_{V_S} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi M |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (39)$$

为了计算方便, 取 V_S 为一个半径为 R 的球, 则

$$S_N(f) = \frac{N}{\pi V_S} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{M} \int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot r^2 r'^2 \right. \\ \left. \times \sin \theta \cdot \sin \theta' dr dr' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi' \right]. \quad (40)$$

若我们对 $d\mathbf{r}$ 积分时, 取 $\mathbf{r}'$ 的方向和 $\mathbf{r}$ 空间的极轴重合, 则 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$,

$$S_N(f) = \frac{N}{\pi V_S} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{M} \int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{e^{ik(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. \times \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot r^2 r'^2 dr dr' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi' \right] \\ = \frac{8\pi N}{V_S} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{ikM} \int_{r'=0}^R \int_{r=0}^R r r' [e^{ik(r+r')} - e^{ik|r-r'|}] dr dr' \right].$$

不难看出,上式中 r 和 r' 是对称的,因此有

$$S_N(f) = \frac{16\pi N}{V_s} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{ikM} \int_{r'=0}^R \int_{r=0}^{r'} r r' [e^{ik(r+r')} - e^{i(r'-r)}] dr dr' \right].$$

所以

$$S_N(f) = \frac{64\pi NR^5}{V_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{M} \left[\frac{1}{3u^2} + \frac{1}{u^3} (1 + e^u) + \frac{4}{u^5} (e^u - ue^u - 1) \right] \right\}, \quad (41)$$

其中

$$u = 2iRk = 2R \sqrt{\frac{f}{M}} e^{i\frac{5}{4}\pi}. \quad (42)$$

当 f 在 (18) 式所示范围内时,由 (19) 和 (37) 式可得

$$M = \frac{a_0^2}{6} (1-n) \Gamma(1-n) a e^{\frac{i\pi n}{2}} f^n. \quad (43)$$

由 (41) (42) 和 (43) 式可得

$$\begin{aligned} S_N(f) = & \frac{F \cdot P}{4R^2} f^{\frac{1}{2}(n-3)} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{4} (n+1) \right] (e^B \cos C + 1) - e^B \sin \left[\frac{\pi}{4} (n+1) \right] \sin C \right\} \\ & + \frac{F \cdot P^3}{R^2} f^{\frac{1}{2}(3n-5)} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{4} (3n-1) \right] [e^B (\cos C + C \sin C - B \cos C) - 1] \right. \\ & \left. - \sin \left[\frac{\pi}{4} (3n-1) \right] e^B (\sin C - C \cos C - B \sin C) \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

其中

$$F = 64\pi R^5 \frac{N}{V_s} = 64\pi R^5 n_0 \quad (n_0 \text{ 为局域电子浓度}), \quad (45)$$

$$P = \frac{a_0}{2R} \sqrt{\frac{(1-n)\Gamma(1-n)a}{6}}, \quad (46)$$

$$B = -\frac{1}{P} f^{\frac{1}{2}(1-n)} \cos \left[\frac{\pi}{4} (1-n) \right], \quad (47)$$

$$C = -\frac{1}{P} f^{\frac{1}{2}(1-n)} \sin \left[\frac{\pi}{4} (1-n) \right]. \quad (48)$$

若 f 在 (33) 式所示范围内,则由 (35) 和 (37) 式,

$$M = \frac{a_0^2}{6} \frac{1}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{1-n} \right)} a^{\frac{1}{1-n}}. \quad (49)$$

由 (41), (42) 和 (49) 式可算得

$$\begin{aligned} S_N(f) = & -\frac{16\pi NR^5}{M V_s E^5} \{ E^2 - 2 + e^E [2(\cos E + \sin E) \\ & - 4E \cos E + E^2(\cos E - \sin E)] \}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中

$$E = -R \sqrt{\frac{2f}{M}}. \quad (51)$$

从上面的推导可以看出, (44) 和 (50) 式的适用范围分别由 (18) 和 (33) 式所规定,

所以在频率足够高时,只有(44)式才适用;而当 $f \rightarrow 0$ 时,则只有(50)式才适用. 另外还应指出: (18)和(33)式中的 $A_1(n, \tau_0)$ 和 $A_2(n, \tau_0)$ 为 n 和 τ_0 的函数,而 n 和 τ_0 则由物体本身的性质所决定,所以对于不同的样品 A_1 和 A_2 的值是不同的. 为此,我们不能笼统地认为要(18)式成立,频率就必需在较高的范围内,进而认为(44)式只适用于高频段,而(50)式则与低频情况相对应. 实际上,当 n 和 τ_0 取适当值, A_1 可能很小很小,所以对某些样品来讲,在实验所观察的全部频率范围内,(44)式都是适用的,而对另一些样品来说, A_2 可能很大,这时(50)式则适用于实验所观察的全部频率范围. 在本文的附录中我们根据不同的 n 和 τ_0 值,计算了一组 A_1 和 A_2 值,并用表格把它们列出,读者可根据此表对某些情况下(44)和(50)式的适用范围获得一个大概的印象.

下面我们对 τ_0 和(1)式中的 a_0 与温度的关系作一些讨论.

局域化电子要参与扩散迁移,有一个被激活的问题. 设一个样品中局域电子的平均激活能为 E_A , 那么局域电子获得大于 E_A 这个能量的几率 P 可以写成

$$P \propto e^{-E_A/kT}. \quad (52)$$

因此局域电子呆在某个位置上的平均时间 τ_0 应满足

$$\tau_0 \propto e^{E_A/kT}. \quad (53)$$

至于(1)式中的 a_0 , 它是扩散过程中电子每次迁移所经过的平均距离, 这个距离显然和电子散射的情况有关, 因此和温度有关, 当温度较高时, 可认为

$$a_0 \propto \frac{1}{T}. \quad (54)$$

由于 τ_0 和 a_0 随 T 的变化而改变, 因此综观(12), (44), (46), (49), (50) 和(51)式可知, 谱 $S_N(f)$ (进而 $S_V(f)$) 的大小与温度有关.

三、理论和实验比较

1. 把(44)或(50)式代入(8)式中, 不难看出 $S_V \propto \langle V \rangle^2$. 这正是实验所指出的结果^[3].

2. 上面已讲过, 当 $f \rightarrow 0$ 时, 应该用(50)式求噪声谱, 而当 $f \rightarrow 0$ 时, 根据(50)式不难证明

$$S_N(f) \rightarrow \frac{32\pi NR^5}{15V_s M} \propto \frac{1}{f^0}. \quad (55)$$

在足够高的频段, (44)式适用. 由(44)式算得的曲线可以看出(见图2和3), 在 f 足够大时

$$S_N(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad 1 < \alpha \leq 1.5. \quad (56)$$

(55)和(56)式保证了 $\int_0^\infty S_N(f)df$ 是收敛的, 也即 $\int_0^\infty S_V(f)df$ 是收敛的. 这一点从物理上看有显然而明确的意义, 即总的说来噪声不可能是无限大的.

我们分别把(44)和(50)式代入(8)式, 用电子计算机算了很多组 $S_V(f)-f$ 曲线, 由(44)式代入(8)式算得的各组曲线的形状相似, 由(50)式代入(8)式算得的各组曲线

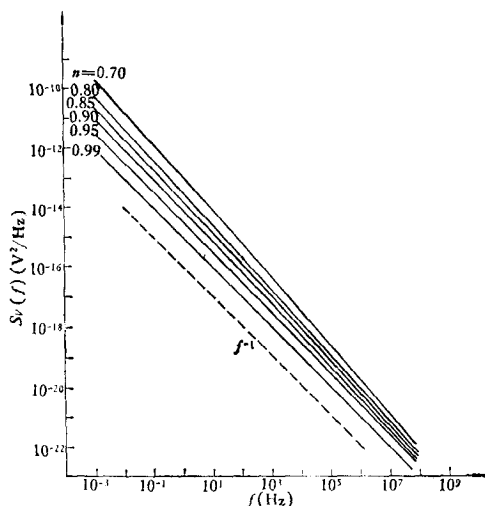


图 2

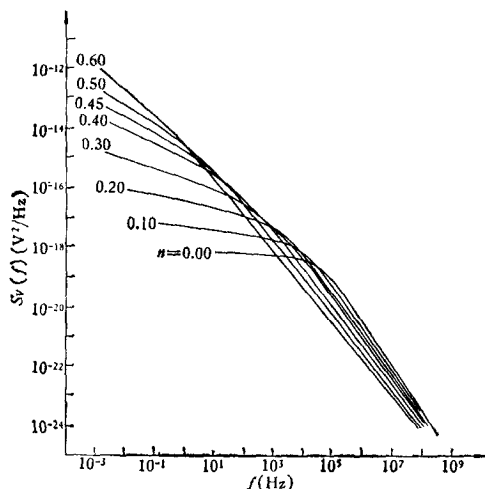


图 3

$$\langle V \rangle = 500 \mu\text{V}, R = 10^{-3} \text{cm}, V_S = \frac{4}{3} \pi R^3 = 4.19 \times 10^{-9} \text{cm}^3, \quad \langle V \rangle = 500 \mu\text{V}, R = 10^{-3} \text{cm}, n_0 = 10^{16} \text{cm}^{-3},$$

$$n_0 = 10^{14} \text{cm}^{-3}, \quad V_S = \frac{4}{3} \pi R^3 = 4.19 \times 10^{-9} \text{cm}^3$$

的形状也相似。当参数 n , a_0 , τ_0 取不同值时, 曲线仅在 S_V - f 空间有一个平移而已。典型曲线分别如图 2, 3 (根据 (44) 式代入 (8) 式算得) 和图 4 (根据 (50) 式代入 (8) 式算得) 所示。

我们在计算图 2—3 所示曲线时, a_0 和 τ_0 分别取值为 10^{-3}cm 和 10^{-5}s , n 的取值则在 0 和 1 之间。把 n 和 τ_0 的值代入 (18) 或 (33) 式, 可以算得图示各条曲线的适用范围 (见附录)。从附录所列的表中可以看出, 图 2 所示的各条曲线在图示的 10^{-3} — 10^{+9}Hz 的全部范围内都是适用的, 而图 3 所示的曲线适用于这个范围的高端, 图 4 则适用于低端。我们把 n 值相同的“高端曲线”和“低端曲线”在中间弥合起来, 就得到了图 5 所示的各条

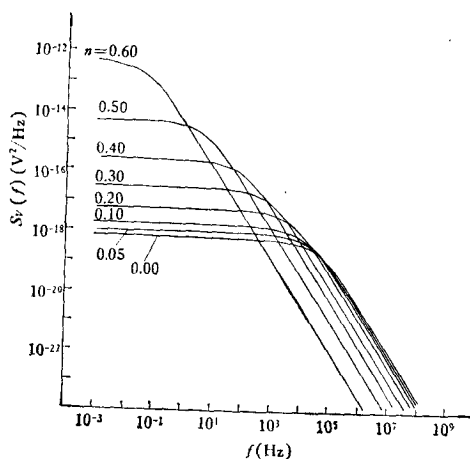


图 4

图注同图 3

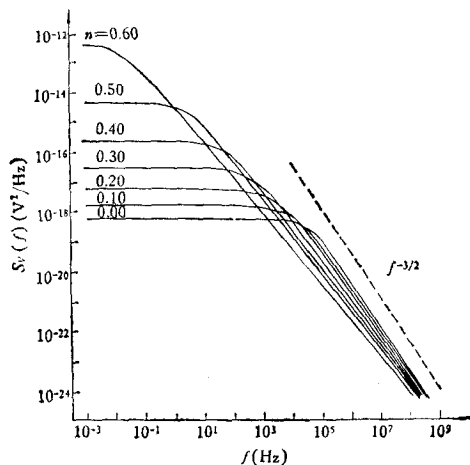


图 5

图注同图 3

曲线, 这些曲线在图示的整个频率范围内都是适用的。

从图 2 和图 5 可以清楚看出, 各种样品 (体现在取各种不同的 n 值上) 的 $S_V(f)$ 的大小在一定频段内确实正比于 $1/f^\alpha$, 而 α 的值在 1.0—1.5 之间, 这和实验常见的结果 (α 值在 0.9—1.4 之间) 吻合得较好。至于有的实验测得在某些情况下 α 的值为 0.8^[13], 甚至为 0.7^[7], 那也并不奇怪。因为有的实验观察的频率范围比较窄, 如果这个范围正好位于图 5 所示曲线的“拐弯”处, 那么完全可能出现测得 α 值为 0.8 或 0.7 的情况。

上面讲过, Clarke 等人曾用镀在不同衬底上的样品作测试, 得到三条不同的 $S_V(f)-f$ 实验曲线 (见图 6 中的曲线 a, b, c)。Clarke 算得的理论曲线和曲线 a 吻合得较好, 但对为什么会出现 b 和 c 却不能给予清楚的解释。而从我们的理论模型来看, 曲线 b 和 c 的出现是很自然的结果: 衬底不同的样品, 其红外发散特性不同 (即 n 值不同), 这样 $S_V(f)-f$ 曲线的形状当然会不同, 这就导致了 b 和 c 的出现。把图 2 和 5 中 $n=0.7, 0.4$ 和 0.3 的曲线和图 6 中 a, b, c 线相比可以发现, 它们是极其相似的。

Zhigal'skiy 等人曾做过一个实验^[7], 他们发现, 同一个样品, 其弯曲程度不同 (所受应力不同), 则测得的噪声谱的 α 值也不同 ($S_V(f) \propto \frac{1}{f^\alpha}$), 这个现象同样一直没有得到很好的解释。在我们看来, 这也是一个很自然的结果: 样品的弯曲程度不同, 意味着样品内部晶格结构的畸变程度不同, 所以弯曲程度不同的样品, 其 n 值是不同的, 这样测得的 α 值自然不一样 (见图 2, 对于不同的 n 值, 曲线斜率不同, 即 α 值不同)。

由上所述不难看出, 我们的模型较好地解释了各种 $S_V(f)-f$ 实验曲线。另外, 根据 (44) 和 (50) 式我们可以预言: 当频率足够高时, 任何样品的噪声谱 $S_V(f)$ 一定正比于 $1/f^\alpha$, 而 α 的值不可能大于 1.5, 也不可能小于 1; 当频率极低时, $S_V(f)$ 必将趋于一个常

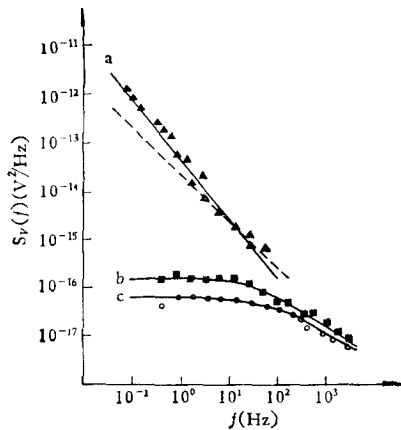


图 6

$\langle V \rangle = 500 \mu\text{V}$, $V_S = 3.75 \times 10^{-9} \text{cm}^3$; 本图采自文献[3], 虚线为 Clarke 的理论曲线; a 线为直接镀在玻璃上的锡层的 $S_V(f)$ 曲线; b 线和 c 线为镀在带有 $50 \text{\AA}$ 厚的铝层的玻璃 (或蓝宝石) 衬底上的锡的 $S_V(f)$ 曲线

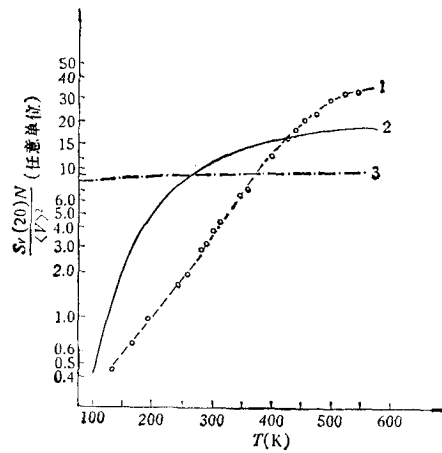


图 7

1——为 $800 \text{\AA}$ 厚的金片的实验曲线^[4]; 2——根据 (50) 式计算得的; 取 $n = 0.93$, $E_A = 0.01 \text{eV}$, $f = 20 \text{Hz}$, 并取 300K 时, $a_0 = 10^{-8} \text{cm}$, $\tau_0 = 10^{-9} \text{s}$, 由 (33) 式可知当 $n = 0.93$, $\tau_0 = 10^{-9} \text{s}$ 时, 只要 $f \ll 2.7 \times 10^3 \text{Hz}$, (50) 式即成立; 3——Clarke 的理论曲线

数,不再随 f 而变化.

3. (53) 和 (54) 式已指出了 τ_0 和 a_0 与温度 T 的关系, 因此我们只要取定了某一温度时 τ_0 和 a_0 的值, 即可根据 (8) 式和 (44) 式 (或 (50) 式) 算得 S_V-T 曲线.

由于现存的典型实验曲线均是确定频率下的 $\frac{S_V \cdot N}{\langle V \rangle^2}-T$ 曲线, 因此为了与实验相比较, 我们在实际运算中计算的也是确定频率下的 $\frac{S_V \cdot N}{\langle V \rangle^2}-T$ 曲线. 我们取不同参数算了几条这类曲线, 形状大致相同. 根据我们的模型算得的 $\frac{S_V N}{\langle V \rangle^2}-T$ 曲线比用 Clarke 的模型算得的同类曲线有了较大的改进, 但和实验曲线相比则还存在着一些差别 (见图 7). 我们认为, 之所以还存在着一些差别是因为我们在计算中没有计及红外发散指数 n 随温度 T 的变化. 根据我们看到的一些国外尚未发表的实验资料^[4], 同一样品的 n 值是随着温度的变化而作缓慢的改变. 不过由于很多金属材料的 $n(T)-T$ 曲线尚未测定, 因此我们在计算中暂时还无法计及这个因素. 如果计及这个因素, 估计会使我们的 $\frac{S_V N}{\langle V \rangle^2}-T$ 曲线得到进一步的改善.

4. 关于 S_V 与样品体积 V_s 的关系

保持 V_{DC} , f 和 T 不变, 改变 V_s 可测定 S_V-V_s 曲线. 现有的这类实验都是在样品体积很小时进行的. Clarke 曾测得 V_s 在 10^{-8}cm^3 这个量级左右变化时, S_V 与 V_s 成反比. Hooge 也曾观察到^[2]保持被测金属片的面积不变, 而改变其厚度, 则 S_V 与厚度成反比 (也即和体积成反比). Hooge 用的样品是镀在衬底上的一个极薄的金属层, 因此样品的体积也是很小的.

从我们的模型出发, 可以推导出当 V_s 很小时, $S_V \propto 1/V_s$. 下面证明这一点.

设样品为一小球, 当 V_s 很小时, 球半径 R 显然也很小. (例 $V_s = 10^{-9}\text{cm}^3$ 时, $R \approx 10^{-3}\text{cm}$, 此时可认为 $R \rightarrow 0$). 当 $R \rightarrow 0$ 时, 由 (46), (47), (48) 式可知: $P \rightarrow \infty$, $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$. 在这种情况下, 根据 (44) 式容易证明

$$S_N \propto R^2 n_0. \quad (57)$$

因为

$$S_V = \frac{\langle V \rangle^2}{N^2} S_N = \frac{\langle V \rangle^2}{n_0^2 V_s^2} S_N,$$

所以

$$S_V \propto \frac{R^2 n_0}{n_0^2 V_s^2} \propto \frac{1}{n_0 R^4}. \quad (58)$$

至此, 应对局域电子浓度 n_0 作一些讨论. 设样品内部局域电子的数目为 N' , 之所以有这部份局域电子存在是因为样品内部存在着杂质、位错、空位等, 而样品内部杂质、位错、空位数目的多少对同一类样品来说是与其体积成正比的, 所以有

$$N' \propto V_s \propto R^3 \quad \text{或} \quad N' = AR^3 \quad (A \text{ 为比例常数}). \quad (59)$$

另外, 我们还需考虑样品表面层的作用. 显然, 表面层中的原子所处的地位和内部原子是不一样的, 因此表面附近的晶格结构会发生畸变, 这使得表面层内有局域化电子存在, 设这部份局域电子的数目为 N'' , 则可认为 N'' 正比于样品表面的面积

$$N'' \propto R^2 \text{ 或 } N'' = BR^2 \quad (B \text{ 为比例常数}). \quad (60)$$

因此样品中局域电子的总数 N 可写成

$$N = AR^3 + BR^2. \quad (61)$$

若 R 很小, 则可近似认为

$$N = BR^2. \quad (62)$$

所以当 V_s 很小时, 可近似认为

$$n_0 = \frac{BR^2}{V_s} \propto \frac{1}{R}. \quad (63)$$

综观 (58) 和 (63) 式, 即有

$$S_V \propto \frac{1}{R^3} \propto \frac{1}{V_s}. \quad (64)$$

这就是实验曾观察到的结果.

从更广泛、更深入的角度来说, (61) 式实际上指出了噪声体效应和面效应之间的关系. 长期以来, 究竟是面效应还是体效应在 $1/f$ 噪声中起主要作用一直是有争论的. 我们觉得从 (61) 式出发可以这样认为: 当样品体积很小时, 表面层的影响是主要的; 而当样品体积较大时, 体效应将起主要作用.

另外, 我们认为现有的一些实验所测得的 $S_V \propto 1/V_s$ 并不是适用于任何情况的普遍规律. 如果作更广泛的观察, S_V 与 V_s 之间的关系并不是 $S_V \propto \frac{1}{V_s}$ 所能全部表达的, 这一点可从 (44) 和 (50) 式看出.

四、讨 论

综上所述, 可以认为, 我们的物理模型对金属中的 $1/f$ 噪声的起因作出了比较合理的解释.

假如这个理论模型是正确的, 那么它实际上还提出了一条通过测试 $1/f$ 噪声而确定一系列有意义的物理量 (τ_0 , n , a_0 , E_A) 的有效途径, 而以前由于这些物理量很难测试, 所以实验探索甚少.

$1/f$ 噪声不只是出现在金属材料中, 也出现在半导体材料和各种器件中^[15]. 如果我们的物理机制是正确的, 那么可以猜测, 其它各种情形下的 $1/f$ 噪声也将和这些情形下的局域态粒子的迁移有关, 并且由低能激发的红外发散程度所决定.

附 录

当 $f \gg A_1(n, \tau_0) = [a(1-n)\Gamma(1-n)]^{1/(1-n)}$ 时 (其中 $a \equiv [e^{n\gamma}(1-n)\tau_0 E_F]^{-1}$), (44) 式成立.

当 $f \ll A_2(n, \tau_0) = \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{1-n}\right)} a^{1/(1-n)}$ 时, (50) 式成立.

若取 $a_0 = 10^{-3}\text{cm}$, $\tau_0 = 10^{-5}\text{s}$, 经计算对于不同的 n , A_1 和 A_2 的值分别为下表所示.

n	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$A_1(\text{Hz})$	6.00×10^4	3.59×10^4	1.05×10^4	1.19×10^3	2.89×10^2	1.76×10	3.1×10^{-1}
$A_2(\text{Hz})$	5.84×10^4	3.22×10^4	0.776×10^4	1.27×10^3	1.13×10^2	3.75	2.31×10^{-2}

n	0.70	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99	
$A_1(\text{Hz})$	4.63×10^{-4}	2.05×10^{-9}	1.58×10^{-14}	3.33×10^{-24}	1.09×10^{-50}	8.18×10^{-217}	
$A_2(\text{Hz})$	4.66×10^{-6}	2.07×10^{-13}	8.80×10^{-21}	1.65×10^{-35}	1.07×10^{-79}	$\frac{101!}{201!} \times 3 \times 10^{-216}$	

参 考 文 献

- [1] K. M. Van Vliet and J. R. Fasset, *Fluctuation Phenomena in Solids* (ed. R. E. Burgess), Acad. Press, N-Y, (1965), p. 267.
- [2] P. Dutta and P. M. Horn, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(3), (1981), 497.
- [3] J. Clarke and T. Y. Hsiang, *Phys. Rev. Lett.*, **34**(1975), 1217.
- [4] J. W. Eberhard and P. M. Horn, *Phys. Rev. B*, **18**(1978), 6681.
- [5] R. Voss and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **13**(1976), 556.
- [6] K. M. Van Vliet, A. Van der Ziel and R. R. Schmidt, *J. Appl. Phys.*, **51**(1980), 2947.
- [7] G. P. Zhigal'skiy, Yu. Ye. Sokov and N. G. Tomson, *Radioeng & Electron. Phys.*, **24**(2) (1979), 137.
- [8] K. L. Ngai and C. T. White, *Phys. Rev. B*, **20**(1979), 2475.
- [9] K. L. Ngai, *Comments Solid State Phys.*, **9K**(1979), 127.
- [10] G. F. Leal Ferreira, *Phys. Rev. B*, **16**(1977), 4719; G. F. Leal Ferreira and L. E. Carrans, *Phys. Rev. B*, **19**(1979), 6601.
- [11] V. M. Kenkre, E. W. Montrol and M. R. Shlesinger, *J. Stat. Phys.*, **9**(1973), 45.
- [12] A. Van der Ziel, *Fluctuation Phenomena*, Academic, New York, (1959).
- [13] D. A. Bell, *Proceedings of Second International Symposium on 1/f Noise*, (1980), 22.
- [14] K. L. Ngai, Private Communication, (1981).
- [15] D. Wolf, *Noise in Physical Systems* (ed. D. Wolf), N-Y, (1978), 122.

A THEORY ON THE 1/f NOISE IN METALS

YU MING-KANG LIU FU-SUI

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, we suggest a new physical mechanism for the in 1/f noise metals phenomena, which have a history of experimental observation for more than forty years. We propose that the 1/f noise is caused by the diffusion transportation with infrared divergence of the local electrons in metals. Based on the general theory of the low-frequency fluctuation, dissipation and relaxation, a non-Markovian diffusion equation is established. The noise spectra deduced from this equation can explain the four basic characteristics of the 1/f noise. With reasonable choice of parameters, our noise spectra agree fairly well with experimental results. Some further discussions concerning the current theory and related problems are also given.