第 32 卷 第 5 期 物 理 学 报 Vol. 32, No. 5
1983 年 5 月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1983

等离子体中调制不稳定性和波包的坍缩过程

贺 贤 土
(中国科学院原子能研究所)

1982 年 4 月 26 日收到

提 要

本文给出了等离子体中由动力学理论所得到的形成强湍流的高频和低频非线性电流的表达式. 根据文献[2]给出的包含有质动力、自生磁场和它们的阻尼效应的方程组,我们推广了 Kono 等人关于调制不稳定性的分析,得到了在各种情况下由 Langmuir 波或横波 pump 波激发的纵波和横波的增长率与参量的关系式. 最后,讨论了波包的坍缩动力学问题,把非线性 Schrödinger 方程的坍缩讨论推广到密度和场耦合的方程组的情况.

本文继续文献[1,2]的讨论,研究等离子体中长波长 Langmuir 波或横波扰动的调制不稳定性(MI)以及其发展后期波包的非线性坍缩过程. 我们知道,当长波能量超过阈值以后,且它们的波数 $|\boldsymbol{k}_0| \leqslant k^* \equiv \frac{1}{3}\ \mu^{1/2}\lambda_e^{-1}$ ($\mu = m_e/M$——电子离子质量比, λ_e 为电子 Debye 长度)时, MI 通过自调制激发波数大于 $|\boldsymbol{k}_0|$ 的波,其结果是被激发波的振幅变得足够大,两个高频波拍频成为低频波的非线性作用促使低频振荡粒子密度有强的扰动,激发非线性有旋电流,产生低频自生磁场,这时波场的能量便会在局部空间集中. 为了维持平衡,通常在能量聚积当地电子(从而离子)密度必须被排空. 这种能量集中和密度排空运动具有准粒子特性,即准粒子数、动量和能量守恒. 在一维情况下数值模拟表明, MI 可以发展成为一个个几乎是互相独立的尖峰结构[3],可能对应稳定态时的 soliton 运动. 就物理上来说,它是波包运动在空间一维方向上的弥散与非线性凝聚力之间竞争的结果;在多维情况下,波包运动在几个方向上同时与非线性凝聚力之间处于平衡状态成为困难. 在 MI 发展后期非线性凝聚效应愈来愈强,最后导致运动的不平衡收缩. 根据守恒关系[4,5],可以预言会出现波包的坍缩. 一旦波包不稳定收缩,最终可能出现奇点. 但是,实际过程则是收缩到 Debye 长度大小时就会迅速被阻尼而导致粒子的急剧加热. 这种不稳定性及其以后发展过程对于研究强湍流运动的形成和发展具有重要的理论意义. 事实上,从 1965 年 Vedenov, Rudakov[6] 工作开始一直到现在,这方面研究文章很多,其中包括近几年 Tsytovich, Thornhill 以及 Harr[7,8] 等人的评论性文章. 正如上面所提到的,在 MI 过程中除了两个高频波向低频波拍频激发离子声涨落的放大以外,还可以通过两个高频波交叉拍频激发低频振荡电子非线性电流的有旋分量从而激发低频磁场,其具体形式的给出以及它对 MI 过程影响的研究,则是最近一年左右时间的工作[2,9,10],虽然实验的发现和

无碰撞磁场机制的提出是七十年代的事情. 研究表明,在一维情况下自生磁场不起作用,但是二维和三维情况下它有助于 MI 过程中坍缩的发生[10].

本文目的是给出我们从 Vlasov-Maxwell 体系出发导得的各种非线性电流形式和描述强湍流运动(包括自生磁场效应)的动力学方程组[1,2],以及从它们出发进一步讨论 MI 发展及其坍缩问题. 这里我们扩展了文献[10]关于色散关系的讨论,得到了包含密度、磁场阻尼效应的单色波的色散方程. 对纵、横 pump 波的扰动,近似求解了色散关系;关于坍缩问题,我们推广了迄今为止只对非线性 Schrödinger 方程的讨论到较为普遍包含场幅和密度扰动耦合的方程组情况.

一、波与粒子相互作用的动力学方程组

如上所述,在 MI 后期高频有限幅波与背景粒子的扰动分布相互作用激发了高频和低频非线性电流,而这些非线性电流又进一步驱动着高频和低频波的传播,以及促进了有限幅波与低频粒子的耦合关系.在最低阶非线性近似下,产生的高频非线性电流有如下两种类型[1,2]: 第一种系高频场与粒子的低频振荡相互作用产生的低频电子(或离子)的定向运动电流.如果略去高频波非线性 Landau 阻尼和频率 $\omega \simeq \omega_{pe} \gg \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ 项(这里, ω_{pe} 为电子等离子体频率, $\boldsymbol{v}$ 为粒子速度),就可得到这种电流的 Fourier 表象

$$\boldsymbol{j}_h^{(1)}(k) = \frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega}\sum_{\sigma_1}\int \boldsymbol{E}_h^{\sigma_1}(k_1)\frac{n_e(q)}{n_0}\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}. \tag{1}$$

这里 $k=\{\omega,\boldsymbol{k}\}$, $q=\{\Omega,\boldsymbol{q}\}$ 分别为高、低频四度动量, $dk=d^3kd\omega$, $dq=d^3qd\Omega$, $\boldsymbol{E}_h^\sigma(k)$ 为高频 σ 波 ($\sigma=l,t$) 的场强, $n_e(q)$ 为低频电子扰动密度.

第二种高频电流由粒子高频振荡与低频电场相互作用所产生. 它主要表现为高频电场与低频自生磁场相互作用形成的电子螺旋运动的非线性电流

$$\boldsymbol{j}_h^{(2)}(k) = \frac{\omega_{pe}e}{4\pi m_e\omega c}\sum_{\sigma_1}\int \boldsymbol{E}_h^{\sigma_1}(k_1)\times\boldsymbol{B}(q)\delta^4(k-k_1-q)\frac{dk_1dq}{(2\pi)^4}, \tag{2}$$

其中 e 为电子电荷, c 为光速.

同样近似下,又可得到两类低频电流,它们分别为高频场与电子高频振荡相互作用拍频成为低频波时激发的纵向电流 $\boldsymbol{j}_d^{(1)}(q)$ 和螺旋运动电流 $\boldsymbol{j}_d^{(2)}(q)$,其表达式为

$$\boldsymbol{j}_d^{(1)}(q) = \frac{\Omega e}{4\pi m_e\omega_{pe}^2}(\varepsilon_e^l(q)-1)\boldsymbol{q}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int \boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)$$

$$\cdot\overline{\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)\delta^4(q-k_1}+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}, \tag{3}$$

其中

$$\varepsilon_\alpha^l(q) = 1+\frac{\omega_{p\alpha}^2}{|\boldsymbol{q}|}\int\frac{\boldsymbol{e}_d^l\cdot\dfrac{\partial F_{0\alpha}}{\partial\boldsymbol{v}}d^3v}{\Omega-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_d^l(q) = \sum_{\alpha=i,e}\varepsilon_\alpha^l(q)-1 \tag{5}$$

为纵波线性介电函数，$F_{0\alpha}$ 为背景粒子 Maxwell 速度分布函数（归一化），$\sigma^{\pm}$ 表示以四度动量 $\{\pm\omega,\ \pm\boldsymbol{k}\}$ 振荡的波，$\boldsymbol{e}_d^l=\boldsymbol{q}/|\boldsymbol{q}|$.

$$\boldsymbol{j}_d^{(2)}(q)=\frac{e}{4\pi m_e\omega_{pe}}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int[\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)\times\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*)]\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}. \tag{6}$$

由(1),(2),(3),(6)式就可得到高、低频场方程分别为

$$\varepsilon_h^\sigma(k)\boldsymbol{E}_h^\sigma(k)=-\frac{4\pi i}{\omega}\sum_\nu\boldsymbol{j}_h^{(\nu)}(k), \tag{7}$$

$$\varepsilon_d^\sigma(q)\boldsymbol{E}_d^\sigma(q)=-\frac{4\pi i}{\Omega}\sum_\nu\boldsymbol{j}_d^{(\nu)}(q). \tag{8}$$

为了使 (7), (8) 式闭合，尚需给出低频自生磁场 $\boldsymbol{B}$ 和电子扰动密度 n_e 表达式. 在 $\omega\simeq\omega_{pe}\gg\Omega$ 或 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}$ 近似下，可得低频电子扰动密度

$$n_e(q)=-\frac{1}{4\pi m_e}\frac{\varepsilon_i^l(q)}{\varepsilon_d^l(q)}(\varepsilon_e^l(q)-1)\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_{pe}^2}\sum_{\sigma_1^+\sigma_2^-}\int\boldsymbol{E}_h^{\sigma_1^+}(k_1)\cdot\boldsymbol{E}_h^{\sigma_2^-}(k_2)^*\delta^4(q-k_1+k_2)\frac{dk_1dk_2}{(2\pi)^4}. \tag{9}$$

至于低频磁场，由 Faraday 感应定律得

$$\boldsymbol{B}(q)=\frac{c}{\Omega}\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{E}_d^\sigma(q), \tag{10}$$

它是(8)式中低频螺旋运动电流激发结果.

如果被激发低频波的相速度 $\Omega/|\boldsymbol{q}|$ 处在电子离子热速度之间，则变换到时、空表象时(7),(9),(10)式就成为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}+c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-3v_{T_e}^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\omega_{pe}^2\left(1+\frac{n_e}{n_0}\right)\boldsymbol{E}+\frac{i\omega_{pe}e}{m_ec}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Gamma_e\frac{\partial}{\partial t}-v_s^2\nabla^2\right)n_e(\boldsymbol{x},t)=\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{8\pi M}, \tag{12}$$

$$\Gamma_e\frac{\partial}{\partial t}n_e\equiv-(2\pi)^{-3/2}\mu^{1/2}v_s\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{n_e(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}d^3x', \tag{13}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{e}{2im_e\omega_{pe}c}\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)]-\frac{\omega_{pe}^2}{(2\pi)^{3/2}v_{T_e}c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}d^3x', \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ 包括纵波 ($\nabla\times\boldsymbol{E}=0$) 和横波 ($\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$) 之和，并已省去下标 “$h$” 记号；$v_{T_e}=(T_e/m_e)^{1/2}$，$T_e$ 为电子温度(能量单位)；$v_s=(T_e/M)^{1/2}$；$\mu=m_e/M$.

(13)式和(14)式中等号右端第二项分别为电子扰动密度和磁场的电子 Landau 阻尼项，这里略去了离子的阻尼效应，详见文献[2].

应当提到，当波的相速度处在 v_{T_e} 和 v_{T_i} (离子热速度)之间时 (11)—(14) 式是比较完善的方程组. 早在 1972 年 Захаров[11] 首先导得了 $\boldsymbol{B}=0$ 无阻尼的方程组(11)—(12)

形式，其后 Tsytovich, Rudakov, Harr 和 Thornhill[12,9,10] 又综合讨论了这组方程的 MI 发展行为，并把它们用于强湍流理论研究。但是所有这些，除了文献 [12] 中部分讨论以外，都建立在双流体矩方程模型基础上进行的。因此，微观作用的细致图象不能充分反映，Landau 阻尼等效应自动消失，且推导过程所作的近似物理意义也很不明确。我们从 Vlasov-Maxwell 微观理论体系出发，重新导得包含阻尼、无磁场的方程组 (11)—(12)[1]，并接着又导得了包含磁场的方程组(11)—(14)[2]、关于单一的(14)形式的磁场方程，Kono[9] 等人于 1980 年发表了他们的结果，但是他们的阻尼项与我们结果差了一个号。最近，我们又见到他们的另一篇文献[10]讨论了(11)—(14)式的动力学行为。但是他们仍然用双流体力学模型结果进行处理，所以密度的阻尼项不能出现，这就与磁场方程的阻尼项发生不自洽。由于没有密度的阻尼效应，在波包坍缩后期通过非线性 Landau 阻尼把场能转化为粒子能就不可能，并要出现奇点。

为了能方便求解(11)—(14)式，通常把高频场 $\boldsymbol{E}$ 分解为缓变振幅 $\boldsymbol{\phi}$ 和高频振荡因子两部分，以便使所得的振幅方程具有与 n_e 和 $\boldsymbol{B}$ 相同的时标，

令
$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\phi} e^{-i\omega_{pe}t}+\mathrm{c.\,c.}\right). \tag{15}$$

如果略去 $\boldsymbol{\phi}$ 的二次时间导数项，并引入如下替换：

$$\frac{2}{3}\,\omega_{pe}\mu t\rightarrow t,\ \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda_e}\boldsymbol{x}\rightarrow\boldsymbol{x},\ \frac{3n_e}{4\mu n_0}\rightarrow n,$$

$$\frac{\sqrt{3}\,\boldsymbol{\phi}}{(64\pi\mu n_0 T_e)^{1/2}}\rightarrow\boldsymbol{\varepsilon},\ \frac{3\boldsymbol{B}}{(64\pi\mu^2 n_0 m_e c^2)^{1/2}}\rightarrow\boldsymbol{B},\quad \alpha^2=\frac{c^2}{3v_{T_e}^2}, \tag{16}$$

(11)—(14)式就成为如下无量纲的方程组：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon}-\alpha^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon})=n\boldsymbol{\varepsilon}-i(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{B}), \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)n=\nabla^2|\boldsymbol{\varepsilon}|^2+\frac{\xi_0}{2\pi^2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{n(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}d^3x', \tag{18}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=i\beta^2\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*)]+\frac{\chi_0}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}d^3x', \tag{19}$$

其中

$$\beta^2=\frac{v_{T_e}^2}{c^2},\ \xi_0=\frac{\pi\mu^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}},\ \chi_0=\frac{9}{4}\frac{\beta^2\pi}{\mu^{1/2}(2\pi)^{1/2}}. \tag{20}$$

在 Landau 阻尼可忽略情况下，(19)式变为

$$\boldsymbol{B}=-i\beta^2(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*), \tag{21}$$

(17)，(18)式就成为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon}-\alpha^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon})=n\boldsymbol{\varepsilon}-\beta^2\boldsymbol{\varepsilon}\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*), \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)n=\nabla^2|\boldsymbol{\varepsilon}|^2. \tag{23}$$

二、有限振幅单色波的色散关系

方程组(17)—(19)或(22)—(23)都具有调制不稳定性（MI）和三波不稳定性解，后者发生在 $|\boldsymbol{k}_0| > k^* = \frac{1}{3}\frac{\mu^{1/2}}{\lambda_e}$ 区域．这里我们只感兴趣 MI 问题．为了简单起见，只讨论波谱较窄的波包近似单色波问题．这相应于 MI 的早期发展过程；当 MI 后期强湍流形成波包有显著宽度时，这里的结果需要作一些修正．

关于方程(22)，(23)的 Langmuir 波 MI 稳定性分析，较详细的可见文献[8]；在有磁场情况下，Kono[10] 等人的工作最近刚见到．正如前面所提到的，他们只是在有磁场阻尼而无密度阻尼情况下，讨论了纵 pump 波激发纵波的色散关系，而我们这里将用方程(17)—(19)——包含磁场和密度 Landau 阻尼——去讨论纵和横 pump 波激发纵波和横波的情况．

设初始未扰动的波为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^\sigma e^{ik_0x},\ n=0,\ B=0,\ \sigma=l,\ t,$$

$$k_0x \equiv \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}-\omega_0t. \tag{24}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_0^\sigma=\boldsymbol{e}_{0\sigma}\varepsilon_0^\sigma$，分别为 $\boldsymbol{e}_{0l}=\boldsymbol{k}_0/|\boldsymbol{k}_0|$ 的 Langmuir 波或 $\boldsymbol{e}_{0t}\perp\boldsymbol{e}_{0l}$ 频率接近 ω_{pe} 的横波．将上式代入(17)式后，(24)式满足

$$\omega=\begin{cases}k_0^2, & \sigma=l;\\ \alpha^2k_0^2, & \sigma=t.\end{cases} \tag{25}$$

现在讨论初始单色波(24)式扰动后场和粒子密度的稳定性问题．设场和扰动密度的形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sum_{\sigma=l,t}\boldsymbol{\varepsilon}_0^\sigma e^{ik_0x}+\sum_{\sigma=l,t}(\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma e^{iqx}+\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^+e^{-iqx})e^{ik_0x}. \tag{26}$$

这里

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma=\boldsymbol{e}_\sigma\varepsilon_\sigma,\ \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^+=\boldsymbol{e}_\sigma^+\varepsilon_\sigma^*,\ \boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_0}{|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_0|},\ \boldsymbol{e}_l^+=\frac{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}_0}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}_0|}, \tag{27}$$

$\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_t^+$ 分别与 $\boldsymbol{e}_l$ 和 $\boldsymbol{e}_l^+$ 垂直，$qx\equiv\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\Omega t$.

$$\begin{pmatrix}n\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta\boldsymbol{B}\end{pmatrix}(e^{iqx}+e^{-iqx})=2\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\cos qx. \tag{28}$$

为了使方程(17)—(19)闭合解，(17)式必须被分成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 两个方程．把方程组线性化后，取含扰动因子 $e^{i(q+k_0)x}$ 的 $\boldsymbol{\varepsilon}_l$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 和 $e^{-i(q-k_0)x}$ 的 $(\boldsymbol{\varepsilon}_l^+)^*$，$(\boldsymbol{\varepsilon}_t^+)^*$ 部分，注意到 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_0)$ 平面上的夹角关系：$\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_{0l}=\cos\theta_+$，$\boldsymbol{e}_l^+\cdot\boldsymbol{e}_{0l}=\cos\theta_-$ 和 $\boldsymbol{B}$ 垂直 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}_0)$ 平面，可以得到如下色散方程:

$$\begin{vmatrix}
A_+^\sigma & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0^\sigma b_+^\sigma & -\varepsilon_0^\sigma a_+^\sigma\\
0 & A_-^\sigma & 0 & 0 & \varepsilon_0^{*\sigma}b_-^\sigma & \varepsilon_0^{*\sigma}a_-^\sigma\\
0 & 0 & B_+^\sigma & 0 & \varepsilon_0^\sigma a_+^\sigma & \varepsilon_0^\sigma b_+^\sigma\\
0 & 0 & 0 & B_-^\sigma & \varepsilon_0^{*\sigma}a_-^\sigma & -\varepsilon_0^{*\sigma}b_-^\sigma\\
\varepsilon_0^{*\sigma}b_+^\sigma & \varepsilon_0^\sigma b_-^\sigma & \varepsilon_0^{*\sigma}a_+^\sigma & \varepsilon_0^\sigma a_-^\sigma & \left(i\Omega\xi_0+\dfrac{\Omega^2-q^2}{q^2}\right) & 0\\
-\varepsilon_0^{*\sigma}a_+^\sigma & \varepsilon_0^\sigma a_-^\sigma & \varepsilon_0^{*\sigma}b_+^\sigma & -\varepsilon_0^\sigma b_-^\sigma & 0 & \beta^{-2}\left(\dfrac{i\Omega\chi_0}{q^2}-1\right)
\end{vmatrix}=0. \tag{29}$$

(29)式中取电场沿 $\boldsymbol{e}_\sigma$, $\boldsymbol{e}_\sigma^+$ 方向分量,磁场沿垂直于 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}_0)$ 平面方向分量. 行列式中

$$A_\pm^\sigma = k_\sigma^2 \pm \Omega - (\boldsymbol{q} \pm \boldsymbol{k}_0)^2,$$
$$B_\pm^\sigma = k_\sigma^2 \pm \Omega - \alpha^2(\boldsymbol{q} \pm \boldsymbol{k}_0)^2; \tag{30}$$

$$a_\pm^\sigma = \begin{cases} \sin\theta_\pm, & \sigma = l, \\ \cos\theta_\pm, & \sigma = t; \end{cases}$$
$$b_\pm^\sigma = \begin{cases} \cos\theta_\pm, & \sigma = l, \\ -\sin\theta_\pm, & \sigma = t; \end{cases} \tag{31}$$

$$k_\sigma = \begin{cases} k_0, & \sigma = l, \\ \alpha k_0, & \sigma = t. \end{cases} \tag{32}$$

方程(29)即为

$$\beta^{-2}\left(\frac{i\Omega\chi_0}{q^2} - 1\right)\left(i\Omega\xi_0 + \frac{\Omega^2 - q^2}{q^2}\right) - |\boldsymbol{\varepsilon}_0^\sigma|^2\left[\left(i\Omega\xi_0 + \frac{\Omega^2 - q^2}{q^2}\right)D_1^\sigma + \beta^{-2}\left(\frac{i\Omega\chi_0}{q^2} - 1\right)D_2^\sigma\right] + |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\left\{D_1^\sigma D_2^\sigma - \left[a_+^\sigma b_+^\sigma\left(\frac{1}{A_+^\sigma} - \frac{1}{B_+^\sigma}\right) - a_-^\sigma b_-^\sigma\left(\frac{1}{A_-^\sigma} - \frac{1}{B_-^\sigma}\right)\right]^2\right\} = 0, \tag{33}$$

其中

$$D_1^\sigma = \frac{(a_+^\sigma)^2}{A_+^\sigma} + \frac{(a_-^\sigma)^2}{A_-^\sigma} + \frac{(b_+^\sigma)^2}{B_+^\sigma} + \frac{(b_-^\sigma)^2}{B_-^\sigma},$$
$$D_2^\sigma = \frac{(b_+^\sigma)^2}{A_+^\sigma} + \frac{(b_-^\sigma)^2}{A_-^\sigma} + \frac{(a_+^\sigma)^2}{B_+^\sigma} + \frac{(a_-^\sigma)^2}{B_-^\sigma}. \tag{34}$$

求解(33)式是十分复杂的,但可以作简化讨论. 由于 pump 波具有长波长特性,我们可以只讨论 $|\boldsymbol{q}| \gg |\boldsymbol{k}_0|$ 情况,这时 $\cos\theta_\pm \simeq \cos\theta$, $\sin\theta_\pm \simeq \sin\theta$, $A_\pm^\sigma \simeq \pm\Omega - q^2$, $B_\pm^\sigma \simeq \pm\Omega - \alpha^2 q^2$. 考虑到量纲化后 $\Omega/|\boldsymbol{q}| \to \Omega/|\boldsymbol{q}|v_s$, 而一般情况下 $\alpha^2 \gg 1$, 所以(33)式中含因子 $(\Omega^2 - \alpha^2 q^4)^{-2}$ 项可以略去,这样(33)式可得到简化. 下面首先讨论 pump 波为纵波 $\sigma = l_0$ 的情况,这时

$$D_1^{l_0} = 2q^2[\sin^2\theta(\Omega^2 - q^4)^{-1} + \alpha^2\cos^2\theta(\Omega^2 - \alpha^4 q^4)^{-1}]$$
$$D_2^{l_0} = 2q^2[\cos^2\theta(\Omega^2 - q^4)^{-1} + \alpha^2\sin^2\theta(\Omega^2 - \alpha^4 q^4)^{-1}]. \tag{35}$$

于是(33)式便成为

$$\Omega^6\frac{(1 + \chi_0\xi_0)}{q^2} - \Omega^4[1 + q^2(1 + \chi_0\xi_0)(1 + \alpha^4) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\beta^2 C_\alpha^2] + \Omega^2\{q^4(1 + \alpha^4) + \alpha^4 q^6(1 + \chi_0\xi_0) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^2[\beta^2 C_\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 q^2 S_\alpha^2 + S_\alpha^2] - 4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta\} - i\Omega\left\{\left(\frac{\Omega^2 - q^2}{q^4}\chi_0 - \xi_0\right)(\Omega^2 - q^4)(\Omega^2 - \alpha^4 q^4) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2[\beta^2 q^2\xi_0(\Omega^2 C_\alpha^2 - \alpha^2 q^4 S_\alpha^2) + \chi_0(\Omega^2 S_\alpha^2 - \alpha^2 q^4 C_\alpha^2)]\right\} + 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\alpha^2 q^6(\beta^2 S_\alpha^2 + C_\alpha^2) - \alpha^4 q^8 - 4\alpha^2\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4 q^4(\alpha^2\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0, \tag{36}$$

其中

$$C_\alpha^2 = \sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta, \quad S_\alpha^2 = \cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta. \tag{37}$$

(36)式中 pump 波 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 已省写了上角标 l_0.

下面分两种情况讨论(36)式解:

1. 考虑 $l_0 - l$ 激发，即纵 pump 波激发沿 $\boldsymbol{q}$ 方向偏振的波，这时去掉含 α 因子的项. (36)式有纯增长解，令 $\Omega = i\gamma$，因为量纲化后 $\gamma/|\boldsymbol{q}| \to \gamma/|\boldsymbol{q}|v_s \ll 1$，保留 γ^4 以下的项，从(36)式就得如下二次方程:

$$\gamma^2[1 + q^2(1 + \chi_0\xi_0) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\beta^2 \sin^2\theta] + \gamma[q^2(\chi_0 + \xi_0 q^2) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2(\beta^2 q^2 \xi_0 \sin^2\theta + \chi_0 \cos^2\theta)] + q^4 - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^2(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta) - 4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = 0. \tag{38}$$

要使(38)式有增长解其阈值满足方程

$$2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^2(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta) + 4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta - q^4 = 0, \tag{39}$$

它与阻尼常数无关. 当 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \ll 1$ 时，(39)式变为

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{q^2}{2(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta)}. \tag{40}$$

(39)式对于 $\theta = 0$,

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{q^2}{2}, \tag{41}$$

还原量纲后即

$$\frac{|\boldsymbol{E}_0|^2}{8\pi n_0 T_e} = 3q^2\lambda_e^2.$$

对于 $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{q^2}{2\beta^2}, \tag{42}$$

还原量纲后即 $\frac{|\boldsymbol{E}_0|^2}{8\pi n_0 T_e} = 3\,\frac{q^2\lambda_e^2}{\beta^2}$. 显见 $l_0 - l$ 激发阈值随 θ 增大而增加. 由于一般情况下 $\beta^2 \ll 1$，所以激发 $\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{k}_0$ 波的阈值要很大才行.

当 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \gg 1$ 时，对 $2\theta \neq n\pi (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 阈值便为

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{q^2}{\beta|\sin 2\theta|}. \tag{43}$$

从二次方程(38)很容易求得增长率

$$\gamma = \gamma(|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2, T_e, |\boldsymbol{q}|, \theta, \chi_0, \xi_0) \tag{44}$$

的明显表达式. 当阻尼为 0 时，$\xi_0 = \chi_0 = 0$，得

$$\gamma^2 = [2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^2(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta) + 4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta - q^4](1 + q^2 - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\beta^2 \sin^2\theta)^{-1}. \tag{45}$$

由于 $\beta^2 \ll 1$，足够大的 pump 波能量能使分母大于 0. 当 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \ll 1$ 时，极大增长率

$$\gamma_{\max}(\theta) = |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta), \tag{46}$$

相应的波数

$$q_{\max}(\theta) = (|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2)^{1/2}(\beta^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta)^{1/2}. \tag{47}$$

这时(45)式退化为文献[10]的结果. 显然,$\theta = 0$ 时 $\gamma_m(0)$ 最大,这时(46),(47)式退化为文献[8]的无磁场的结果.

这里,我们看到 MI 发展结果形成了类似"铁饼"状空间结构,$\boldsymbol{q} /\!/ \boldsymbol{k}_0$ 发展最快,至 $\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{k}_0$ 时几乎停止增长.

2. $l_0 - t$ 激发,即纵 pump 波激发偏振方向垂直 $\boldsymbol{q}$ 的横波. 考虑到 $\alpha^2 \gg 1$,(36)式中略去 γ 的高阶项后,得到如下的二次方程:

$$\gamma^2 \left[q^4(1+\alpha^4) + \alpha^4 q^6 (1 + \chi_0 \xi_0) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^2 \left(\beta^2 C_\alpha^2 + \frac{q^2}{3} S_\alpha^2 + S_\alpha^2 \right) \right.$$
$$\left. - 4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4 \beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \right] + \gamma \left[\alpha^4 q^6 (\chi_0 + \xi_0 q^2) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^4 \left(\frac{\xi_0}{3} q^2 S_\alpha^2 + \chi_0 \alpha^2 C_\alpha^2 \right) \right]$$
$$- 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^6 \left(\frac{S_\alpha^2}{3} + \alpha^2 C_\alpha^2 \right) + \alpha^4 q^8 + \frac{4}{3} |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4 q^4 (\alpha^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta$$
$$+ \sin^4\theta) = 0. \tag{48}$$

(48)式有增长解的阈值为

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{3}{4} q^2 \left(\frac{S_\alpha^2}{3} + \alpha^2 C_\alpha^2 \right) (\alpha^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta)^{-1}$$
$$- \frac{3}{4} q^2 \left[\left(\frac{S_\alpha^2}{3} + \alpha^2 C_\alpha^2 \right)^2 (\alpha^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta)^{-2} \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3} \alpha^4 (\alpha^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta)^{-1} \right]^{1/2}. \tag{49}$$

对于 $\theta = 0 - \frac{\pi}{2}$ 变化,很易证明,根号内总是大于零且阈值随 θ 增加而增加. 由于 $\alpha^2 \gg 1$,$\beta^2 \ll 1$,在 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2$ 相当宽的变化范围内,γ^2 系数也总大于零,所以(48)式的 $\gamma > 0$ 增长解总是存在. 下面分两种情况讨论:

1) 当 $\theta \approx 0$ 时,注意到 $\alpha^2 \gg 1$,$\beta^2 \ll 1$,写(48)式为

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \tag{50}$$

其中

$$a = \alpha^4 q^4 (1 + q^2) - \frac{(8 + 2q^2)}{3} q^2 |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \quad (\text{已略去 } \chi_0 \xi_0 \ll 1 \text{ 项}),$$
$$b = \alpha^4 q^6 (\chi_0 + \xi_0 q^2) - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 q^4 \left(\chi_0 \alpha^4 + \frac{\xi_0}{3} q^2 \right),$$
$$c = \frac{4}{3} |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4 q^4 - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \alpha^4 q^6 + \alpha^4 q^8. \tag{50'}$$

(50)式的阈值与 $l_0 - l$ 激发一样为

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 \doteq \frac{q^2}{2}. \tag{51}$$

当 pump 波能量增加到 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 < \frac{3}{8} \alpha^4 q^2$ 时,总有 $a > 0$,$c < 0$. 因此,在相当宽的 pump 波能区内可以出现纯增长解. 当阻尼不存在时,如 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \ll \frac{3}{8} \alpha^4 q^2$,增长率为

$$\gamma^2 \simeq \left[2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2q^2 - q^4 - \frac{4}{3}\alpha^{-4}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\right](1+q^2)^{-1}, \tag{52}$$

极大增长率为

$$\gamma_{\max} = [2(1+|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2)(1+2a_0)^{1/2} - 2(1+2a_0)]^{1/2}(1+2a_0)^{-1/4}, \tag{53}$$

$$a_0 \equiv |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 + \frac{2}{3}\alpha^{-4}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4. \tag{53'}$$

相应于 $\gamma_{\max}$ 的波数为

$$q_{\max} \equiv [(1+2a_0)^{1/2} - 1]^{1/2}. \tag{54}$$

当 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \ll 1$ 时，

$$\gamma_{\max} = |\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2, \tag{55}$$

$$q_{\max} = (|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2)^{1/2}. \tag{56}$$

这与文献[13]的结果相同，且与 $l_0 - l$ 激发相类似.

2) 当 $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ 时，对 $\alpha^2 \gg 1$，$\beta^2 \ll 1$，(48) 式变为

$$\gamma^2\left[\alpha^4q^4(1+q^2) - \left(\frac{6+2q^2}{3}\right)\alpha^2q^4|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\right] + \gamma\left[\alpha^4q^6(\chi_0+\xi_0q^2)\right.$$
$$\left. - 2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\alpha^2q^4\left(\chi_0 + \frac{\xi_0}{3}q^2\right)\right] - \frac{8}{3}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\alpha^2q^6 + \alpha^4q^8 + \frac{4}{3}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4q^4 = 0, \tag{57}$$

阈值为

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_0|_s^2 = \frac{\alpha^2q^2}{2}. \tag{58}$$

把 (57) 式写成 (50) 式形式后，我们看到，增加 pump 波能量出现下列情况：由于在 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 < \alpha^2/2$ 以前恒有 $a > 0$，仅当 $|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2$ 处于从 $\frac{1}{2}\alpha^2q^2$ 到 $\frac{3}{2}\alpha^2q^2$ 的窄的区域内，$c < 0$ 有 $\gamma > 0$ 增长解外，其余区域 $b^2/a < 4c$ 无纯增长解.

从(49)式和上述结果我们看到，与 $l_0 - l$ 激发一样，阈值随 θ 增加而变得很大. 无阻尼时，

$$\gamma^2 = \alpha^{-4}\left(\frac{8}{3}\alpha^2q^2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 - \alpha^4q^4 - \frac{4}{3}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^4\right)\left[1 - 2\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{2}{3}\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2\right)q^2\right]^{-1}. \tag{59}$$

极大增长率为

$$\gamma_{\max} = \left\{\frac{2d_0^2}{(1-2\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2)}\left[\left(1 + \frac{4}{3}\frac{|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2}{d_0\alpha^2}\right)(1+2b_0)^{1/2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - (1+2b_0)\right]\right\}^{1/2}(1+2b_0)^{-1/4}, \tag{60}$$

$$b_0 = \frac{2}{3}\frac{|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2}{\alpha^2d_0^2}(2d_0 + \alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2),\quad d_0 = (1-2\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2)\left(1 - \frac{2|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2}{3\alpha^2}\right)^{-1}, \tag{60'}$$

$$q_{\max} = d_0^{1/2}[(1+2b_0)^{1/2} - 1]^{1/2}. \tag{61}$$

当 $\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2 \ll 1$ 时，

$$\gamma_{\max}=\frac{2}{3}\alpha^{-2}|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2, \tag{62}$$

$$q_{\max}=2\alpha^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2}{3}\right)^{1/2}. \tag{63}$$

可见，与 l_0-l 激发一样，增长率随 θ 增加而变小． 至 $\theta=\pi/2$ 时，比 $\theta=0$ 小一个 $\alpha^{-2}=3\beta^2\ll 1$ 因子，而波长大了一个 α 因子．

同样，我们看到，l_0-t 激发具有与 l_0-l 类似的“铁饼”状结构．

关于 t_0 激发的情况类似 l_0 激发的讨论，只是把 $\cos^2\theta$ 与 $\sin^2\theta$ 互换一下，这里不再赘述．

三、守恒量和坍缩动力学

本节将先给出方程(22)，(23)的守恒量，然后讨论 MI 发展后期波包坍缩动力学问题．这里我们将目前为止见到的文献中，只对非线性 Schrödinger 方程的坍缩讨论，推广到方程组(22)，(23)的情况．从文献[2]得到拉氏密度函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{2}i\left(\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^*}{\partial t}\right)-\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}|^2-|\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2-\frac{\partial\varphi}{\partial t}|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\\&+\frac{1}{2}\left[|\boldsymbol{\varepsilon}|^4+\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-(\nabla\varphi)^2\right],\end{aligned} \tag{64}$$

其中 φ 在形式上相当于流体力学流势，即 $\mathbf{u}=-\nabla\varphi$；$\varphi$ 满足 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=n+|\boldsymbol{\varepsilon}_0|^2$. 从(64)式可得能量-动量张量密度

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\Phi^{\gamma}_{,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi^{\gamma}_{,\nu}} \tag{65}$$

的具体形式．这里

$$\Phi^{\gamma}=\Phi\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^*;\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^*}{\partial t};\frac{\partial\varphi}{\partial t},\nabla\varphi\right), \tag{66}$$

$$\Phi^{\gamma}_{,\mu}=\left(\frac{\partial\Phi^{\gamma}}{\partial x},\cdots\right). \tag{67}$$

当 $\mathscr{L}$ 平移不变时，则有守恒方程

$$\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}T_{\mu k}=0\quad k=1,2,3;\ x_k=x,y,z. \tag{68}$$

上式取 $\mu=0$ 就是能量守恒方程；取 $\mu=k$ 时得线动量守恒方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{T}=0, \tag{69}$$

其中

$$p_k=T_{k0}=\sum_j\frac{1}{2}i\left(\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_j^*-\varepsilon_j^*\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_j\right)+nu_k, \tag{70}$$

$$T_{ij}=\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x_i}\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*+\text{c.c.}\right)+\alpha^2\left[\sum_k\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varepsilon_k^*}{\partial x_j}-\frac{\partial\varepsilon_j^*}{\partial x_k}\right)+\text{c. c.}\right]$$

$$+ u_i u_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left\{\nabla\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^* + \text{c. c.}) + \beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}|^4 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right.$$

$$\left. + (\nabla\varphi)^2 + \alpha^2|\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \frac{\alpha^2}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon})) + \text{c. c.}]\right\} (i, j \neq 0). \tag{71}$$

于是得线动量和能量守恒关系

$$\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{p} d^3x = \text{const.}, \tag{72}$$

$$H = -\int T_{00} d^3x = \int\left\{\frac{\alpha^2}{2}|\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + |\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \frac{1}{2}[\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2 - n^2 - u^2]\right\} d^3x = \text{const.}. \tag{73}$$

另外，从复场规范不变性得四度流

$$j_\mu = -i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi^\gamma_{,\mu}}\Phi^\gamma - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi^{*\gamma}_{,\mu}}\Phi^{*\gamma}\right). \tag{74}$$

守恒方程为

$$\frac{\partial j_0}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0. \tag{75}$$

这里

$$\boldsymbol{j} = i(\boldsymbol{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) + i\alpha^2[\boldsymbol{\varepsilon}\times(\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\varepsilon}^*\times(\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon})], \tag{76}$$

$$j_0 = |\boldsymbol{\varepsilon}|^2. \tag{77}$$

(75)式表示

$$\int j_0 d^3x = \int|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 d^3x = N = \text{const.}, \tag{78}$$

N 为准粒子数.

有了上述守恒量，就可以讨论方程组 (22),(23) 中波包 $\boldsymbol{\varepsilon}$ (或 n) 随时间的坍缩情况. 定义波包的中心座标 $\langle\boldsymbol{x}\rangle$，平均$\langle\cdots\rangle$系按归一化的准粒子数密度分布 $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2/N$ 作为权重进行，这样

$$\langle\boldsymbol{x}\rangle = \int\boldsymbol{x}\frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|^2}{N}d^3x. \tag{79}$$

波包的均方根宽度为 $\langle\delta\boldsymbol{x}^2\rangle^{1/2}$，其平方值

$$\langle\delta\boldsymbol{x}^2\rangle = \langle\boldsymbol{x}^2\rangle - \langle\boldsymbol{x}\rangle^2. \tag{80}$$

从(75)式得

$$\frac{\partial\langle\boldsymbol{x}\rangle}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{J}}{N} = \text{const.}, \tag{81}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \int\boldsymbol{j}d^3x. \tag{82}$$

对(80)式求二次时间导数得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\delta\boldsymbol{x}^2\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\boldsymbol{x}^2\rangle - 2\left(\frac{\boldsymbol{J}}{N}\right)^2, \tag{83}$$

其中

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\boldsymbol{x}^2\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{x}^2}{N}\nabla\cdot\boldsymbol{j}d^3x. \tag{84}$$

下面为了方便，只讨论 Langmuir 波情况，这时 $\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon} = 0$，于是(70)式为

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}i[(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varepsilon}^* - (\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\nabla)\boldsymbol{\varepsilon}] + n\boldsymbol{u}. \tag{85}$$

(85)式由(70)式把 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示为势的梯度并交换算子 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}$ 后而得到，对于 Langmuir 波，

$$\boldsymbol{j} = i\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*) + 2\boldsymbol{p} - 2n\boldsymbol{u}. \tag{86}$$

所以

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle \boldsymbol{x}^2\rangle = \frac{4}{N}\int \mathrm{Tr}\mathbf{T}d^3x + 2\frac{\partial}{\partial t}G(t), \tag{87}$$

其中

$$G(t) = -\frac{2}{N}\int \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{u}nd^3x, \tag{88}$$

$$\int \mathrm{Tr}\mathbf{T}d^3x = 2H - \frac{N}{2}[(D-2)I(t) + DF(t)], \tag{89}$$

$$H = \int\left\{|\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \frac{1}{2}[\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2 - n^2 - u^2]\right\}d^3x, \tag{90}$$

$$I(t) = \frac{1}{N}\int[\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2 - 2n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - n^2]d^3x, \tag{91}$$

$$F(t) = \frac{1}{N}\int u^2d^3x, \tag{92}$$

D 为空间维数．在静态近似下，$\boldsymbol{u}=0$，$n = -|\boldsymbol{\varepsilon}|^2$，于是(89)式变为

$$\int \mathrm{Tr}\mathbf{T}d^3x = 2H_s - \frac{N}{2}(D-2)I_s(t), \tag{93}$$

其中

$$H_s = \frac{1}{2}\int[2|\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - |\boldsymbol{\varepsilon}|^4 - \beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2]d^3x, \tag{94}$$

$$I_s = \frac{1}{N}\int[|\boldsymbol{\varepsilon}|^4 + \beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2]d^3x. \tag{95}$$

这时就退化为文献[10]中非线性 Schrödinger 方程的结果．

一般情况下，方程(22)，(23)中波包宽度平方值的变化由(83)式得

$$\langle\delta\boldsymbol{x}^2\rangle = A_0t^2 + B_0t + C_0 - 2\int_0^t dt'\int_0^{t'}[(D-2)I(t'') + DF(t'')]dt'' - 2\int_0^t G(t')dt', \tag{96}$$

其中 $A_0 = \frac{4H}{N} - \left(\frac{\boldsymbol{J}}{N}\right)^2$ 为运动积分常数，B_0，C_0 为积分常数．我们知道，在 MI 发展过程中亚声情况下 $n<0$．因此，如果 MI 发展后期场幅有了足够增大使非线性凝聚项超过空间弥散项的作用，即有

$$\int\left\{|\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + n|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - \frac{1}{2}[\beta^2|\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*|^2 - n^2]\right\}d^3x < 0, \tag{97}$$

于是

$$2H - \frac{N}{2}F < 0, \tag{98}$$

而

$$I(t) > 0, \tag{99}$$

所以(96)式等号右端

$$A_0t^2 - 2\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''[(D-2)I(t'') + DF(t'')] < 0 \quad (\text{对 } D \geqslant 2). \tag{100}$$

故 t 增大时，在有限的时间内 t 的二次方项起主导作用，对 $D \geqslant 2$，$\langle \delta \boldsymbol{x}^2 \rangle$ 收缩变得足够小，出现波包的坍缩运动．实际情况是，当 $\langle \delta \boldsymbol{x}^2 \rangle^{1/2}$ 接近几个 Debye 长度时，方程 (22)，(23)不再适用，必须由包含非线性 Landau 阻尼效应的方程(17)—(19)来描述，这时阻尼项起主要作用，波能迅速耗散加热等离子体背景粒子．由于一般情况下 $\beta^2 \ll 1$，磁场的作用是不重要的，但是它的存在却起了加快坍缩过程的作用．

参　考　文　献

[1] 贺贤士，核聚变，**1**(1980)，245.
[2] 贺贤士，物理学报，**32**(1983)，325.
[3] D. R. Nicholson and M. V. Goldman. *Phys. Fluids*, **21** (1978), 1766.
[4] E. A. Кузнецов, *ЖЭТФ*, **66** (1974), 2037.
[5] M. V. Goldman and D. R. Nicholson, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 406.
[6] A. A. Vedenov and L. I. Rudakov, *Sov. Phys. Doklady*, **9**(1965), 1073.
[7] L. I. Rudakov and V. N. Tsytovich, *Phys. Reports*, **40C**(1978), 3.
[8] S. G. Thornhill and D. ter Harr, *Phys. Reports*, **43C**(1978), 45.
[9] M. Kono *et al.*, *Phys. Lett. A.*, **77**(1980), 27.
[10] M. Kono *et al.*, *J. Plasma Physics*, **26**(1981), 123.
[11] B. И. Захаров, *ЖЭТФ*, **62** (1972), 1745.
[12] V. N. Tsytovich, Theory of Turbulent Plasma, Consultants Bureau, New York, (1977).

THE MODULATION INSTABILITY AND THE COLLAPSE PROCESS OF WAVE PACKET IN PLASMA

HE XIAN-TU

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the expressions of the high-frequency and low-frequency nonlinear currents that leads to strong turbulence formation in plasma were found by using Kinetic theory. According to the system of equations in the reference [2] which included pondermotive force, self-generated magnetic field and their damping effects, we generalized the modulation instability analysis given by Kono et al. and obtained the expressions of growth rate parameter etc. in various cases while the longitudinal and transverse waves were excited by Langmuir or transverse pump waves. Finally, we discussed the collapse dynamics of wave packet and extended the collapse argument on nonlinear Schrödinger equation to the case of the density and field coupling equation system.