

Schwarzschild 黑洞的 Dirac 粒子准束缚态

章 世 伟

(上海市化学工业学校)

1982年7月20日收到

提 要

本文将 Schwarzschild 度规中的二分量 Dirac 方程 (Brill-Wheeler 方程) 化为一个单分量的二阶方程, 考查了方程的有效势, 找出了自旋轨道耦合项. 视界附近是一个势垒, 当 $K^2 > 3\eta^2$, 势垒外侧出现势阱. Dirac 粒子将在势阱中某些能级上共振, 并穿越势垒被视界吸收. 借 WKB 方法求得准束缚态的能谱, 并计算了大 $|K|$ 情形下的寿命. 同样的处理方法还推广至 Reissner-Nordstrom 度规.

黑洞的特征之一是存在视界. 如所知, 无论是弯曲时空中的 Dirac 方程, 或是 Klein-Gordon 方程, 它们的解在视界处的行为都是 $\exp[\pm iE \ln(r - 2M)]$. Ruffini 等人^[1]及刘辽等人^[2]曾用出射波解释了 Bose 子及 Fermi 子的 Hawking 蒸发. 显然, 我们应该用 $\exp[-iE \ln(r - 2M)]$ 来描述粒子被视界吸收. 在能量小于粒子静质量的条件下, 只要存在势阱, 就将存在被视界吸收的共振态, 即准束缚态. 1974 年, Deruelle^[3] 处理了 Kerr-Newman 度规中 Klein-Gordon 方程的准束缚态解, 用数值积分及 WKB 方法计算了能谱及寿命, 但并未给出分析表达式. 至于 Dirac 方程, 直至 1977 年 Soffel^[4] 才著文讨论. 但他主要是研究了 Brill-Wheeler 方程^[5] (以下简称 B-W 方程) 的解的 Klein 佯谬问题, 稍带计算了两个最低共振态的能级, 用的也是数值计算方法.

一、Schwarzschild 度规中的 Dirac 方程

本文取自然单位 $G = \hbar = c = 1$; 并定义无量纲参数:

$$x = r/2M; \quad \epsilon = \frac{2GM}{c^2} \cdot \frac{E}{\hbar c} = 2ME; \quad \eta = \frac{2GM}{c^2} \frac{\mu c}{\hbar} = 2M\mu.$$

式中 r , M , E 及 μ 分别代表径向坐标、黑洞质量、粒子的能量及静质量. 我们用 B-W 方程来处理球对称度规中的 Dirac 粒子. 这是一个二分量方程. 将 Schwarzschild 度规代入, 便得

$$\begin{aligned} g'(x) &= -K[x(x-1)]^{-1/2}g + [\epsilon x(x-1)^{-1} + \eta x^{1/2}(x-1)^{-1/2}]f, \\ f'(x) &= K[x(x-1)]^{-1/2}f - [\epsilon x(x-1)^{-1} - \eta x^{1/2}(x-1)^{-1/2}]g, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 K 是与粒子总角动量有关的量子数. $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. 粒子波函数为

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} \Theta(\theta, \varphi) e^{-iEt}.$$

为了在视界外部求解(1)式,按通常做法,引入 tortoise 坐标 $\hat{x}$, 满足

$$d\hat{x}/dx = g_{11} = \frac{x}{x-1},$$

积分得 $\hat{x} = x + \ln(x-1)$. 当 $x \rightarrow 1$ (视界), $\hat{x} \rightarrow -\infty$. 在 $\hat{x}$ 坐标中(1)式化为

$$\begin{aligned} dg/d\hat{x} &= -K(x-1)^{1/2}x^{-3/2}g + [\epsilon + \eta(x-1)^{1/2}x^{-1/2}]f, \\ df/d\hat{x} &= K(x-1)^{1/2}x^{-3/2}f - [\epsilon - \eta(x-1)^{1/2}x^{-1/2}]g. \end{aligned} \quad (2)$$

从联立方程(2)中消去 f 得 g 的二阶方程

$$\begin{aligned} d^2g/d\hat{x}^2 + \alpha(\hat{x})dg/d\hat{x} + \beta(\hat{x})g &= 0, \\ \alpha &= -\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{d}{dx} \ln[\epsilon + \eta(x-1)^{1/2}x^{-1/2}], \\ \beta &= \epsilon^2 - \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\eta^2 + \frac{K^2}{x^2}\right) + \Delta\beta, \\ \Delta\beta &= K\left\{\alpha(x-1)^{1/2}x^{-3/2} + \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{d}{dx}[(x-1)^{1/2}x^{-3/2}]\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

研究 $\epsilon < \eta$ 的能量范围. 取如下的边条件: 当 $x \rightarrow \infty$, $g \sim \exp(-\sqrt{\eta^2 - \epsilon^2}x)$, 当 $x \rightarrow 1$, $g \sim \exp[-i\epsilon \ln(x-1)]$. 后者表示在视界处只有入射波. 可以再作一次坐标变换 $\hat{x} \rightarrow y = \int d\hat{x} \left[\exp \left\{ -\alpha(\hat{x})d\hat{x} \right\} \right]$, 在 y 坐标中将得到 Schrödinger 型方程

$$d^2g/dy^2 + \left[\beta(\hat{x}) \left(\frac{d\hat{x}}{dy} \right)^2 \right] g = 0.$$

但在 WKB 方法中这一步是多余的. 在 $\hat{x}$ 坐标中, 只需研究 $\beta(\hat{x})$. (3)式表示能量为 ϵ^2 的粒子处在有效势 $V_{\text{eff}} = \epsilon^2 - \beta$ 中.

$$V_{\text{eff}} = \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\eta^2 + \frac{K^2}{x^2}\right) - \Delta\beta. \quad (4)$$

计算表明 $\Delta\beta$ 项不出现奇性, 且与 K 一次方成正比, 所以在(4)式中可略去 $\Delta\beta$ 项而不影响 WKB 方法的准确性, 只要准束缚态的 $|K|$ 充份大即可. 于是得

$$V_{\text{eff}} \sim \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\eta^2 + \frac{K^2}{x^2}\right). \quad (5)$$

本征值 K 与轨道量子数 l 有如下关系: 当自旋与轨道角动量平行, $j = l + 1/2$, $K = -(l+1)$; 若反平行, $j = l - 1/2$, $K = l$. 无论哪种情况均有 $K(K+1) = l(l+1)$, 故(5)式事实上已含有自旋轨道耦合项

$$V_{\text{eff}} \sim \left(\frac{x-1}{x}\right)\left[\eta^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{K}{x^2}\right], \quad (6)$$

式中 $-K\left(\frac{x-1}{x^3}\right)$ 正是 Dirac 粒子比 Bose 子多出的自旋轨道耦合项. 而前两项正与文献[3]所给的完全一致. 计算表明, 在 $x = x_p \simeq \frac{3}{2} + \theta(\eta^2/K^2)$ 处存在势垒. 当 $K^2 >$

$3\eta^2$ 时, 在 $x_W \simeq 2K^2/\eta^2$ 处将出现势阱, 但势阱很浅, $[\eta^2 - V_{\min}]/\eta^2 < 0.1$. η^2 是有效势在无穷处的渐近值.

二、准束缚态能谱及宽度

Deruelle^[6] 用转折点处的连接条件推导了 WKB 方法求能谱及宽度的计算公式. 令 x_a, x_b, x_c 分别表 $e^2 = V_{\text{eff}}$ 的三个转折点, $x_a < x_b < x_c$; 则第 N 个束缚态的能级与宽度分别为

$$\int_{x_b}^{x_c} \sqrt{\epsilon_N^2 - V_{\text{eff}}} d\hat{x} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad \Gamma_N = \left[\frac{1}{2} e^{-2I_1} / \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_N}, \quad (7)$$

式中

$$I_1 = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{V_{\text{eff}} - \epsilon^2} d\hat{x}, \quad I_2 = \int_{x_b}^{x_c} \sqrt{\epsilon^2 - V_{\text{eff}}} d\hat{x}. \quad (8)$$

在大 $|K|$ 下, $x_a \sim 1 + \eta^2/K^2$, $x_b \sim \frac{1}{2\sigma} [1 - \sqrt{1 - 4\sigma K^2/\eta^2}]$, $x_c \sim \frac{1}{2\sigma} [1 + \sqrt{1 - 4\sigma K^2/\eta^2}]$,

式中 $\sigma = 1 - \epsilon^2/\eta^2$. (8) 式中的被积函数可化为

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon^2 - V_{\text{eff}}} &= \eta \sqrt{\sigma} x^{-3/2} \left(-x^3 + \frac{1}{\sigma} x^2 - \frac{K^2}{\sigma \eta^2} x + \frac{K^2}{\sigma \eta^2} \right)^{1/2} \\ &= \eta \sqrt{\sigma} x^{-3/2} \sqrt{(x - x_a)(x - x_b)(x_c - x)}. \end{aligned}$$

计算 I_2 时利用 $(x - x_a) \sim (x - 1) \sim x$, 并注意到 $d\hat{x} = \left(\frac{x}{x-1}\right) dx$, 就有

$$I_2 \simeq \eta \sqrt{\sigma} \int_{x_b}^{x_c} \frac{1}{x} \sqrt{(x - x_b)(x_c - x)} dx = \eta \pi \left[\frac{1}{2\sqrt{\sigma}} - \frac{|K|}{\eta} \right]. \quad (9)$$

将(9)式代入(7)式, 则得到能量 ϵ_N 及 σ_N 分别为

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_N}} = \frac{2}{\eta} \left[N + |K| + \frac{1}{2} \right], \quad \epsilon_N = \eta \left[1 - \frac{\eta^2}{4} \left(N + |K| + \frac{1}{2} \right)^{-2} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

为了与文献[4]给出的两个数值计算结果比较, 取 $\eta = 2$, $|K| = 4$, (10)式给出 $\epsilon_0/\eta = 0.975$, $\epsilon_1/\eta = 0.983$, ϵ_2/η 至 ϵ_5/η 分别为 0.988, 0.991, 0.993 及 0.994. 文献[4]给出 $\epsilon_0/\eta = 0.9761$, $\epsilon_1/\eta = 0.9833$. 可见能谱公式(10)与数值计算符合得相当好. 事实上, Klein-Gordon 方程 $\eta = 2$, $l = 4$ 时的两个最低共振态能量也与此相同^[6]. 可见自旋轨道耦合修正对能谱的影响很微. 现在来计算 I_1 以求宽度. 在大 $|K|$ 情形下, 令 $|K|^2 \gg \eta^2 = \epsilon^2$, 则 I_1 可估算为

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{V_{\text{eff}} - \epsilon^2} d\hat{x} \simeq \eta \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \sqrt{(x - x_a)(x_b - x)} dx \\ &\simeq \frac{\pi}{4} K^2/\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

又有

$$[\partial I_2 / \partial \epsilon]_{\epsilon = \epsilon_N} = \frac{\pi}{2} \frac{\epsilon_N}{\eta} (1 - \epsilon_N^2 / \eta^2)^{-3/2}. \quad (12)$$

从(11),(12)及(7)式可得宽度为

$$\Gamma_N \simeq \frac{\eta}{\pi \epsilon_N} (1 - \epsilon_N^2 / \eta^2)^{3/2} \exp \left(-\frac{\pi}{2} K^2 / \eta \right). \quad (13)$$

对应于上例 $\eta = 2$, $|K| = 4$, 计算得 $\Gamma_0 \sim 1 \times 10^{-7}$. 若取 $|K| = 6$ 及 8, 则 Γ_0 分别等于 5×10^{-16} 及 8×10^{-24} . 这些值也与文献[6]的数值结果一致. 故(13)式是宽度的良好近似式. 但须强调, 文献[6]适用于 Bose 子, 而(13)式适用于自旋 1/2 的粒子. 自旋轨道耦合对宽度的影响表现在: 同样的 l 若自旋与轨道角动量平行, 则有较大的 $|K|$, 故 Γ 较小, 寿命较长. 换言之, 在轨道量子数相同的情况下, 与轨道角动量方向平行的自旋粒子的寿命较反平行的粒子要长一些. 现在来估算寿命. 因 $\tau = \frac{2}{\mu \Gamma} \hbar / c^{2(6)}$, 若取 $\mu =$ 电子质量 $m_e \sim 10^{-27}$ 克, 则有 $\tau \Gamma \simeq 2 \times 10^{-21}$, τ 的单位取秒. 若 $\eta = 2$, $|K| = 6$, 则有 $\tau \sim 4 \times 10^{-6}$ 秒. 量子效应极为显著. $\eta = 2$ 表示黑洞半径与粒子的 DeBroglie 波长量级相同, 显然粒子是很难被视界吸收的.

三、Reissner-Nordstrom 度规中的准束缚态

B-W 方程也可描述荷电球对称度规. 将 Reissner-Nordstrom 度规

$$g_{00} = g_{11}^{-1} = \left(1 - \frac{1}{x} + q^2/x^2 \right) = \frac{1}{x^2} (x - x_+) (x - x_-) \quad (14)$$

代入 B-W 方程. 式中 $q = Q/2M$; $x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4q^2} \right)$ 表示两个视界坐标. 引入 tortoise 坐标 $\hat{x}$, 满足 $d\hat{x}/dx = g_{11}$, 当 $x \rightarrow x_+$ 时, $\hat{x} \rightarrow -\infty$. 再将 B-W 方程化为相应于(3)式的二阶方程

$$d^2 g / d\hat{x}^2 + \alpha dg / d\hat{x} + \beta g = 0, \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha &= -g_{00} \frac{d}{dx} \ln \left(\epsilon - \frac{eQ}{x} + \eta g_{00}^{1/2} \right), \\ \beta &= \left(\epsilon - \frac{eQ}{x} \right)^2 - g_{00} (\eta^2 + K^2/x^2) + \Delta\beta, \\ \Delta\beta &= K \left(\frac{d}{d\hat{x}} g_{00}^{1/2} + \alpha g_{00}^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

这里 e 为粒子的电荷. 与 Schwarzschild 情形一样, 要找的是 $\epsilon < \eta$ 的准束缚态, 波函数的边条件在远处取衰减解, 在 x_+ 处取入射波. 因束缚态对应大 $|K|$, 故在(16)式中略去 $\Delta\beta$ 项, 得

$$\beta = (\epsilon - V_+)(\epsilon - V_-), \quad V_{\pm} \simeq \frac{eQ}{x} \pm g_{00}^{1/2} \sqrt{\eta^2 + K^2/x^2}, \quad (17)$$

式中 $V_{\pm}$ 分别为正、反粒子的有效势. 文献[4]曾指出, 若 Q 较大, 即 $Q > \eta x_+/e$, 黑洞将借 Klein 机制不断地放电, 直到 $Q = \eta x_+/e$ 为止. 在放电过程中很难还有准束缚态的概念, 所以我们将 Q 限制为 $Q < \eta x_+/e$. 此式即 $\frac{e}{\mu} < \frac{1}{2q} (1 + \sqrt{1 - 4q^2})$. 以电子为例, 荷质比 $e/\mu \sim 10^{21}$, 故 q 为一个极小的量, $q \sim 10^{-21}$. 故在度规中可略去含 q 项, 即 $g_{00} \simeq (1 - \frac{1}{x})$. (17)式化为

$$V_{\pm} \simeq \frac{eQ}{x} \pm \sqrt{(1 - \frac{1}{x})(\eta^2 + K^2/x^2)}. \quad (18)$$

如前所述, 式中 K^2 项已含有自旋轨道耦合作用, eQ/x 显然是库仑能. WKB 方法求得准束缚态的能谱为

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_N}} = \frac{2}{\eta} \left(1 - \frac{2eQ}{\eta}\right)^{-1} \left[N + \frac{1}{2} + \sqrt{(K^2 - e^2 Q^2)} \right],$$

$$\sigma_N = 1 - e_N^2/\eta^2. \quad (19)$$

同样可求得与(7)式相应的能级宽度, 此处不赘述. 黑洞带电不仅对能谱与宽度产生修正, 并且对准束缚态的形成带来了附加条件. 将(17)式展开后得

$$\beta = \epsilon^2 - \frac{2eQ\epsilon}{x} + \frac{e^2 Q^2}{x^2} - \left(\frac{x-1}{x}\right) \left(\eta^2 + \frac{K^2}{x^2}\right). \quad (20)$$

势阱出现的充要条件是 β 有极小. 但若 $eQ = \frac{1}{2}\eta$, 并取 $\epsilon \sim \eta$, 则

$$d\beta/dx = \frac{1}{x^4} \left[\left(2K^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right)x - 3K^2 \right].$$

此式的根是 β 的极大点. 进一步计算表明: 当 $eQ \geq \frac{1}{2}\eta$, 就不出现势阱. 由此可见, 仅

当 $eQ < \frac{1}{2}\eta$ 才能有准束缚态. 巧合的是, 牛顿引力与库仑斥力平衡的条件 $GM\mu/r^2 = eQ/r^2$, 正是 $eQ = M\mu = \frac{1}{2}\eta$. 举一个数值例子, 取 $\mu =$ 电子质量, $M =$ 太阳质量, 则准束缚态出现必须 $|Q| < 0.0834$ 库仑.

四、小 结

1. 如同 Bose 子那样, Dirac 粒子在视界处的波函数是行波, 束缚态粒子将穿越势垒被视界吸收, 所以是准束缚态. 这是黑洞的特性所决定的.

2. 借 WKB 方法处理了 Schwarzschild 黑洞情形. 准束缚态形成的条件是 $K^2 > 3\eta^2$. 求得了能谱公式(10)及大 $|K|$ 情形下的宽度公式(13). 对于小黑洞与电子形成的准束

缚态, 当 $|K| = 6$, 寿命可长达 10^{-6} 秒, 量子效应极为显著.

3. 对于带电黑洞, 库仑作用的影响不可低估. 若 $eQ \geq \frac{1}{2}\eta$, 根本就形成不了准束缚态.

本工作是在方励之教授具体指导下进行的, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] R. Ruffini, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 332.
- [2] 刘辽, 许殿彦, 物理学报, **12**(1980), 1617.
- [3] N. Deruelle ed, *Phys. Lett. B*, **52**(1974), 437.
- [4] M. Soffel, ed, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10**(1977), 551.
- [5] D. Brill, J. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**(1957), 465.
- [6] N. Deruelle, *Proceedings of The First Marcel Grossmann Meeting On General Relativity*, 483.

THE QUASI BOUND STATES OF DIRAC FERMION IN SCHWARZSCHILD METRIC

Zhang Shi-wei

(Shanghai Chemical Engineering School)

ABSTRACT

In this paper, the two-component Dirac equation in Schwarzschild background space time is reduced to a one component second order equation. The effective potential and the L-S coupling term are given. Near the horizon, there is a potential wall. When $K^2 > 3\eta^2$, there is another potential well by the wall. So the particle resonating in the well will be absorbed by the horizon after penetrating through the wall. With WKB approximation, the resonance spectrum and its width are obtained. For the case of Reissner-Nordstrom background space time, the same procedure is also carried out, and the results are discussed briefly.