

在 HeII 中超漏对第四声的折射*

王 本 仁 魏 荣 爵

(南京大学物理系, 声学研究所)

1983年7月11日收到

提 要

本文从平均压缩率和平均密度变化的观点计算了超漏颗粒对 HeII 中传播的第四声的折射. 也从多重散射的方法, 计算了由此引起的折射. 分别得出了解析式. 并进行了数值计算. 结果表明, 前者的影响不是主要的, 而由多重散射导出的第四声声速变化所得的结果和实验吻合较好.

一、引 言

在液 HeII 中第四声的存在首先由 Pellam^[1] 指出, 后由 Atkins^[2] 实验证实. 它是仅存在于量子流体液氦中的波. 在 λ 相变点以下, ⁴He 液体进入超流态, 对它的描述可以用 Landau^[3] 的二流体理论, 此时流体中存在着正常和超流两种成份. 它们相对的密度比随温度而变. 第四声是在正常成份的运动受阻塞, 只有超流成份运动, 所传播的一种密度(或压力)的涨落波. 依二流体理论, 容易导出声速的理论值, 可以表示为

$$c_T^2 = \rho_{s0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\rho_s},$$

其中 ρ_{s0} 表示静态时超流的密度. μ 是氦的化学势, 下标 ρ_s 为总熵.

在实验中, 为了确定声速, 需要在实验腔体中填补许多线度大体均匀的极微小的颗粒, 以阻止正常成份的运动. 如颗粒的线度为 a , 则要求正常成份的粘滞波长满足条件

$$\lambda_n = 2\pi \left(\frac{\eta_n}{\omega \rho_n} \right)^{\frac{1}{2}} \gg a,$$

下标 n 表示正常成份, η_n 是它的粘滞系数, ω 为角频率. 这些微粒称超漏颗粒, 常用氧化铝 (Al_2O_3) 和炭黑等较稳定的材料, 将它们加工成尺度不等的粉状颗粒.

由于超漏材料同样占有第四声的传播空间, 这些颗粒必然影响流体的运动. 一是在声波传播的作用下, 经由颗粒对声振动动量和能量的输运; 二是对声的散射. 且由于颗粒间距较小, 即使在适当稀疏的情形, 多重散射作用也会产生.

许多作者已对不同条件下多重散射问题和等效场量进行计算, 并应用于实验. 例如, 为了计算液体中的电子结构和在无序合金中波的传播所发展的理论^[4], 在悬浮液和含气

* 中国科学院基金资助的课题.

泡的水中^[5],在多孔介质中^[6]的多重散射等.在第四声的研究方面^[7],从实验上研究和确定称为折射率的量

$$R = \frac{c_T}{c_P},$$

其中 c_P 是实测声速.并在理论上讨论了对规则形状的颗粒作有序排列时 R 的情况.它与实际情况有相当的差距.而 Rudnick 等人,在实验的基础上总结出一经验公式.本文从平均压缩率和平均密度变化以及多重散射的影响来讨论超漏颗粒对第四声传播的影响.

二、平均压缩率和平均密度变化的影响

对第四声声速可等效表示为

$$c_T^2 = \frac{1}{\beta_0 \rho_0},$$

β_0 和 ρ_0 分别表示在一定的温度和压力下液氮的压缩率和密度值.声压传播的波动方程有^[8]

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) - \beta_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

考察稳态时谐运动,声压 $p = P e^{-i\omega t}$, 并 $k_0 = \omega/c_T$ 表示波数,代入(1)式得

$$\nabla^2 P = -k_0^2 P.$$

但对超漏材料而言,它们相应的量为 β_n, ρ_n , 则在颗粒材料中有方程

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_n} \nabla p \right) - \beta_n \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

将(1)和(2)式同乘以 ρ_0 后相减,得

$$\nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_n} \right) \nabla P \right] - k_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\beta_0} - 1 \right) P = 0. \quad (3)$$

这是描述混合态的方程.若在传播介质的单位体积内有 Q 个体积为 V_i 的颗粒,则可将(3)式推广为

$$\nabla \cdot \left\{ \left[1 - \sum_{i=1}^Q \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_n} \right) v_i \right] \nabla P \right\} + k_0^2 \left[1 + \sum_{i=1}^Q \left(\frac{\beta_n}{\beta_0} - 1 \right) v_i \right] P = 0. \quad (4)$$

令

$$1 - \sum_{i=1}^Q \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_n} \right) v_i = A, \quad 1 + \sum_{i=1}^Q \left(\frac{\beta_n}{\beta_0} - 1 \right) v_i = B,$$

则在此时的波矢量可表示为

$$K^2 = k_0^2 \frac{B}{A} = \omega^2 (\rho_0/A) (\beta_0 B).$$

有等效参量为 $\rho = \frac{\rho_0}{A}$, $\beta = \beta_0 B$, 并可表示出

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} (1 - \Sigma V_i) + \frac{1}{\rho_n} (\Sigma V_i)$$

$$\text{和} \quad \beta = \beta_0 B = \beta_0 (1 - \Sigma V_i) + \beta_n (\Sigma V_i). \quad (5)$$

显然, ρ^{-1} 是相应物质密度倒数的体积权重平均, 而 β 则是相应压缩率的体积权重平均.

现定义空隙率 $P = 1 - \sum_{i=1}^Q V_i$ 是单位体积内未被颗粒所占的体积. 这样可得到折射率

$$R^2 = \left(\frac{c_T}{c_p} \right)^2 = \frac{\beta \rho}{\beta_0 \rho_0} = \frac{P + \frac{\beta_n}{\beta_0} (1 - P)}{P + \frac{\rho_0}{\rho_n} (1 - P)}. \quad (6)$$

这就是用平均场所得的混合介质折射率的公式.

三、多重散射的影响

对随机分布的散射体中波的传播问题, 解析解法的多重散射理论^[9,11], 是自支配基本场量的微分方程开始, 再引入统计平均.

若在体积 V 中有 Q 个散射体, 分别位于 $r_1, r_2, \dots, r_Q$, 现考虑在散射体之间的一点 r_a 处的标量场 ϕ^a . 这场满足波动方程

$$(\nabla^2 + K^2)\phi = 0.$$

令 ϕ_i^a 表示入射到 a 点的人射波, 场 ϕ^a 可表示为

$$\phi^a = \phi_i^a + \sum_{i=1}^Q U_i^a. \quad (7)$$

此处 U_i^a 是位于 r_i 的散射体散射到 r_a 位置的场. 而它可以用入射波 ϕ^i 以及在 r_a 处看到在 r_i 处散射体的散射特征 u_i^a 来表示:

$$U_i^a = u_i^a \phi^i.$$

此处 $u_i^a \phi^i$ 并非指两个量的相乘, 而是个作用符. 于是有

$$\phi^i = \phi_i^i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^Q u_i^i \phi^i, \quad (8)$$

$$\phi^a = \phi_i^a + \sum_{i=1}^Q u_i^a \phi^i. \quad (7')$$

根据以上两式可以迭代而得

$$\phi^a = \phi_i^a + \sum_{i=1}^Q u_i^a \phi_i^i + \sum_{i=1}^Q \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^Q u_i^a u_i^i \phi_i^i + \dots. \quad (9)$$

等式右方分别为入射波, 经一次散射、二次散射……的波等等. ϕ^a 可分解成

$$\phi^a = \langle \phi^a \rangle + \phi_f^a.$$

前者代表相干分量, 后者是起伏分量. 对(9)式取统计平均, 在第一级近似下认为各粒子

相互独立¹⁾, 则有

$$\sum_{s=1}^Q \langle u_s^a \phi_i^s \rangle = \sum_{s=1}^Q \int (u_s^a \phi_i^s) \frac{q_0(r_s)}{Q} dr_s = \int u_s^a \phi_i^s q_0(r_s) dr_s,$$

$q_0(r_s)$ 是单位体积内散射体的数密度. 同样有

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^Q \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^Q \langle u_s^a u_i^s \phi_i^s \rangle &= \sum_{s=1}^Q \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^Q \iint u_s^a u_i^s \phi_i^s \frac{q_0(r_s) q_0(r_i)}{Q^2} dr_s dr_i \\ &\simeq \iint u_s^a u_i^s \phi_i^s q_0(r_s) q_0(r_i) dr_s dr_i, \end{aligned}$$

$$\langle \phi^a \rangle = \phi_i^a + \int u_s^a \langle \phi^s \rangle q_0(r_s) dr_s. \quad (10)$$

这是基本积分方程. 为求解这个方程, 先讨论在声场中一球体的散射解.

1. 一个刚性球的散射场

作为散射体的超漏粉末, 假设它们是半径为 a 的球形. 则由于声的传播, 散射球可作整体运动. 如入射为一平面波, 用球函数展开

$$\varphi_i = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (11)$$

散射势为

$$\varphi_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m i^m (2m+1) h_m(kr) P_m(\cos \theta), \quad (12)$$

其中 B_m 为散射波的幅, 而 $j_l(kr)$, $h_m(kr)$ 是球 Bessel 和球 Hankel 函数. $P_l(\cos \theta)$, $P_m(\cos \theta)$ 是 Legendre 多项式. 在球的边界要满足

$$-\left. \frac{\partial(\varphi_i + \varphi_s)}{\partial r} \right|_{r=a} = \xi \cos \theta, \quad (13)$$

ξ 是球运动时的速度幅. 而球是在合力作用下作振动, 运动方程为

$$M \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \iint p \cos \theta a^2 d\sigma, \quad (14)$$

$a^2 d\sigma$ 是立体角 $d\sigma$ 所张的面元. $M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_n$ 是球的质量. 依声振动有声压

$$p = P_0 + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_i + \varphi_s) = P_0 - i\omega \rho_0 (\varphi_i + \varphi_s).$$

将其代入(14)式, 由于各阶 Legendre 多项式的正交性, 对 φ_i , φ_s 的积分只留下 $l, m=1$ 的项. 这样解得

$$\xi = \frac{3}{ia} \frac{\rho_0}{\rho_n} [j_1(ka) + B_1 h_1(ka)]. \quad (15)$$

再将其和 φ_i , φ_s 的表达式一起代回(13)式, 并利用各阶 Legendre 多项式的独立性,

1) 由于相互作用粒子之间并不独立, 这里只是作为一级近似的假设.

可解得在 Rayleigh 极限下各阶散射幅为

$$B_0 = -\frac{i}{3}(ka)^3, B_1 = -\frac{i}{3}(ka)^3 \frac{\rho_0 - \rho_n}{\rho_0 + 2\rho_n}, B_2 = -\frac{2}{135i}(ka)^5. \quad (16)$$

因此, 此时 B_2 以上为高阶小量, 只有 B_0, B_1 是主要的. 于是得到散射势的近似式.

$$\varphi_s \simeq B_0 h_0(kr) + 3iB_1 h_1(kr) P_1(\cos\theta). \quad (17)$$

2. 多重散射场的解

考虑散射介质是处在半无限空间 (见图 1), 并在散射体密度适当稀疏的情况下求解

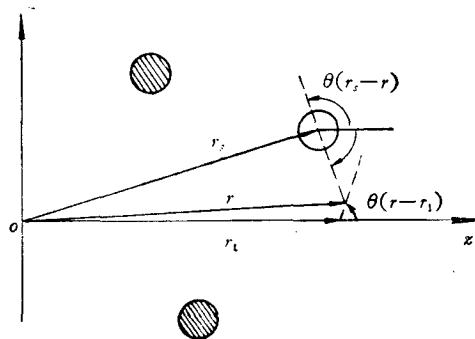


图 1 散射体几何位置示意图

多重散射的相干场. 入射波为 $\varphi_i = e^{ikz}$ 的平面波. 考虑到单个球形粒子散射的结果, 现在对入射波也用球函数展开, 则有

$$e^{ikz} = e^{ikz_1} e^{ik(z-z_1)} = e^{ikz_1} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k|r-r_1|) P_n(\cos\theta(r-r_1)), \quad (18)$$

而我们待求的解可表示为 (r_1 为参考点见图 1)

$$\langle \phi(z) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_n(k|r-r_1|) P_n(\cos\theta(r-r_1)). \quad (19)$$

此处 $\cos\theta(r-r_1)$ 是代表 z 轴和 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ 正向之间夹角的余弦. (角的表示见图 1). 在散射符作用下,

$$u_s^a \langle \phi(z_s) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z_s) B_n h_n(k|r-r_s|) P_n(\cos\theta(r-r_s)). \quad (20)$$

将(18), (19)和(20)式代入(10)式, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(z_1) - i^n (2n+1) e^{ikz_1}) j_n(k|r-r_1|) P_n(\cos\theta(r-r_1)) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} B_j \int A_j(z_s) h_j(k|r-r_s|) P_j(\cos\theta(r-r_s)) q_0(r_s) d\tau_s \end{aligned} \quad (21)$$

现要求出以上积分, 应用球函数的关系式

$$P_n(\cos\theta(r-r_s)) h_n(k|r-r_s|) = i^n P_n\left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s}\right) h_0(k|r_s-r|). \quad (22)$$

因为在单球散射中, 只要保留 $B_0 B_1$ 的振幅系数. 于是可将(21)式右边的积分表示为

$$I = \int \left[B_0 A_0(z_s) + i B_1 A_1 P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] h_0(k|r_s - r|) q_0 d\tau_s.$$

因为我们讨论的是散射球外的多重散射场, 因此上式中的 q_0 应满足

$$q_0 = \begin{cases} q_0(r_s) & |r_s - r| > a, \\ 0 & |r_s - r| \leq a. \end{cases}$$

然后对 Hankel 函数再应用下述等式:

$$\begin{aligned} h_0(k|r_s - r|) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos\{m[\varphi(r-r_1) \\ - \varphi(r_s-r_1)]\} P_n^m[\cos\theta(r-r_1)] P_n^m[\cos\theta(r_s-r_1)] \\ \cdot j_n(k|r-r_1|) h_n(k|r_s-r_1|). \end{aligned} \quad (23)$$

此处

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{当 } m=0, \\ 2 & \text{当 } m \text{ 为其他值.} \end{cases}$$

但上式应在 $|r_s - r_1| > |r - r_1|$ 的条件下成立, 故 r 限于 $|r - r_1| < a$. 将上式代回 I , 并先考虑对 $\cos m\varphi(r_s - r_1)$ 的积分. 因为

$$\begin{aligned} \cos\{m[\varphi(r-r_1) - \varphi(r_s-r_1)]\} = \cos m\varphi(r-r_1) \cos m\varphi(r_s-r_1) \\ + \sin m\varphi(r-r_1) \sin m\varphi(r_s-r_1) \end{aligned}$$

对 $\varphi(r_s - r_1)$ 求积分后, 当 $m \neq 0$ 时积分值为 0, 除非 $m=0$. 因此, 只需留下 $m=0$ 的项. 再次应用(22)式则有

$$\begin{aligned} I = \int q_0 \left(B_0 A_0 + i B_1 A_1 P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n[\cos\theta(r-r_1)] \\ \cdot j_n(k|r-r_1|) (-i)^n P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) h_0(k|r_s-r_1|) d\tau_s. \end{aligned}$$

因在(22)式中 $\theta(r-r_s) = \pi - \theta(r_s-r)$ 故 $\cos\theta(r-r_s) = -\cos\theta(r_s-r)$ 以及 $P_n(-\cos\theta) = (-1)^n P_n(\cos\theta)$ 再将 I 代回(21)式则有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} j_n(k|r-r_1|) P_n[\cos\theta(r-r_1)] \left\{ A_n(z_1) - i^n (2n+1) e^{ikz_1} \right. \\ \left. - (-i)^n (2n+1) \int q_0 \left[B_0 A_0 + i B_1 A_1 P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] \right. \\ \left. \cdot P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) h_0(k|r_s-r_1|) d\tau_s \right\} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由于各阶 Legendre 函数的独立性, 则可得方程组

$$\begin{aligned} A_n = i^n (2n+1) e^{ikz_1} + (-i)^n (2n+1) \int q_0 \left[B_0 A_0 + i B_1 A_1 P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] \\ \cdot P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) h_0(k|r_s-r_1|) d\tau_s \quad n=0, 1, \dots. \end{aligned} \quad (25)$$

现求上式的积分. 采用柱坐标系, z 轴选为通过 r_1 参考点, 则有 $|r_s - r_1| = [\rho_s^2 + (z_s - z_1)^2]^{1/2}$ 和 $d\tau_s = \rho_s d\rho_s d\theta_s dz_s$. 先对 $d\rho_s$ 从 0 到 ∞ 和 $d\theta_s$ 从 0 到 2π 求积分. 并注意到求 $d\tau_s$ 的积分中 r_1 是个奇点, 因此要求主值. 假设 $A_n(z)$ 可表为

$$A_n(z) = i^n(2n+1)A'_n e^{iKz}, \quad (26)$$

A'_n 是常系数. 并引入等效波数 K . 对 ρ_s, θ_s 积分得

$$I_1 = (-i)^n(2n+1) \frac{2\pi}{k^2} P \int q_0 \left[B_0 A'_0 e^{iKz_s} + i^2 3 B_1 A'_1 e^{iKz_s} P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] \\ \cdot P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) e^{ik|z_s - z_1|} dz_s, \quad (27)$$

P 表示主值.

因为
$$P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) e^{\pm iKz_s} = P_n(\pm 1) e^{\pm iKz_s} = (\pm 1)^n e^{\pm iKz_s},$$

于是
$$I_1 = (-i)^n(2n+1) \frac{2\pi}{k^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{z_1-\epsilon} q_0 \left[B_0 A'_0 e^{iKz_s} + i^2 3 B_1 A'_1 e^{iKz_s} P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] \right. \\ \cdot P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) e^{ik(z_1-z_s)} dz_s + \int_{z_1+\epsilon}^{\infty} q_0 \left[B_0 A'_0 e^{iKz_s} + i^2 3 B_1 A'_1 e^{iKz_s} P_1 \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) \right] \\ \cdot P_n \left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial z_s} \right) e^{ik(z_s-z_1)} dz_s \left. \right\} \\ = i^n(2n+1) \frac{2\pi}{k^2} q_0 \left\{ (B_0 A'_0 + 3 B_1 A'_1) \frac{e^{iKz_1} - e^{ikz_1}}{i(K-k)} \right. \\ \left. - (-1)^n (B_0 A'_0 - 3 B_1 A'_1) \frac{e^{iKz_1}}{i(K+k)} \right\}, \quad (28)$$

其中已将积分中的振荡部分除去. 将上式代回(25)式, 考虑到单球散射的结果, 在多重散射系数中保留 A'_0, A'_1 项, 经整理后有

$$A'_n e^{iKz_1} = e^{ikz_1} + \frac{2\pi q_0}{ik^2} \left(\frac{B_0 A'_0 + 3 B_1 A'_1}{K-k} - (-1)^n \frac{B_0 A'_0 - 3 B_1 A'_1}{K+k} \right) e^{iKz_1} \\ - \frac{2\pi q_0}{ik^2} \frac{B_0 A'_0 + 3 B_1 A'_1}{K-k} e^{ikz_1} \quad n = 0, 1. \quad (29)$$

上式要对任意的 z_1 皆成立, 则有方程

$$\frac{2\pi q_0}{ik^2} \frac{B_0 A'_0 + 3 B_1 A'_1}{K-k} = 1$$

和
$$A'_n = \frac{2\pi q_0}{ik^2} \left(\frac{B_0 A'_0 + 3 B_1 A'_1}{K-k} - (-1)^n \frac{B_0 A'_0 - 3 B_1 A'_1}{K+k} \right). \quad n = 0, 1$$

将上第二式写出即有

$$A'_0 \left\{ 1 - \frac{2\pi q_0}{ik^2} B_0 \left(\frac{1}{K-k} - \frac{1}{K+k} \right) \right\} - A'_1 \frac{6\pi q_0}{ik^2} B_1 \left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k} \right) = 0, \\ A'_0 \left(-\frac{2\pi q_0}{ik^2} \right) B_0 \left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k} \right) + A'_1 \left\{ 1 - \frac{6\pi q_0}{ik^2} B_1 \left(\frac{1}{K-k} - \frac{1}{K+k} \right) \right\} = 0. \quad (30)$$

为了得到振幅的非平凡解, 方程组的系数行列式必须为零. 这样得到 K 和 k 间方程. 同样引用空隙率

$$P = 1 - \frac{4}{3} \pi a^3 q_0$$

和注意文献[4]中 Lloyd 所引入的修正,得折射率为

$$R^2 = \left(\frac{K}{k}\right)^2 = 1 + \frac{1-P}{2} + \frac{3}{2} (1-P)^2. \quad (31)$$

四、和实验相比较

因为不论用氧化铝、炭黑或聚苯乙烯球体作为超漏材料,对于(6)式都有 $\rho_n \gg \rho_0$ 以及 $\beta_n \ll \beta_0$, 因此可以算得 $R^2 \simeq 1$. 于是表明由此引起的折射是很小的.

(31) 式在空隙率是 0.5—0.9 的范围内, 对折射率进行数值计算, 得 R^2 的曲线. 并将赵超先¹⁾ 所实测的第四声声速和折射率的实验值 (对应于 1.8K) 皆示于图 2 上. 从图

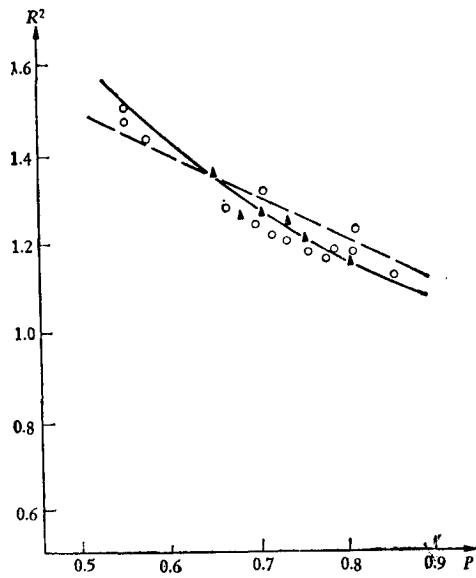


图2 折射率 R^2 对空隙率的关系.

○为文献[10]中引的实验点; ▲为赵超先的实验点; 为本文(31)式, ---为 $R^2 = 2 - P$ 式

2 可看出曲线和实验点间吻合较好. 在图 2 中也给出了文献[10]中所引述的几位作者的折射率实验结果, 以及一般认为和实验值吻合较好的 Shapiro 和 Rudnick^[7] 给出的经验公式, $R^2 = 2 - P$. (在文献[10]中是按 $\frac{1}{R} - P$ 的关系用图表示出的). 当然, 所给的

实验点是在不相同的条件下进行的, 如赵超先所用的超漏颗粒是平均线度为 $0.3\mu\text{m}$ 的氧化铝粉末, 而文献[10]中引述的 Rudnick 的工作, 用的是 $0.05\mu\text{m}$ 的氧化铝粉. 而(31)式的曲线和这些实验点也基本相吻.

1) 赵超先, 私人通信.

虽则从平均观点出发进行的计算中,似乎并未给出特殊的信息,但是它正帮助我们了解为什么在液氦的 λ 点以下较宽的实验温度范围内(此时相应的 ρ_s 可以有一个量级以上的变化),和用不同材料的颗粒作为超漏填充介质时,折射率都能近似用同一经验公式来表述. 并且只依赖于参数空隙率. 这表明由于平均参量的改变引起的折射是可以忽略的.

本文导出的散射式是用球形粒子的假设,并且认为是刚性的. 实际氧化铝粉末并非球形,虽则它们各各线度大体相当,但是形状并不规则. 然而在 Rayleigh 极限下,可以作为球形体的多重场来处理,而得出相吻合的结果. 而且在这样 (kr) 值较小的极限情况,对球外的散射场,用球函数展开时, Hankel 函数分母 (kr) 的幂次随函数的阶数而增高. 但是由于 $B_i h_i(kr)$ 随 i 的增大收敛很快,因此可以仅保留有限项. 且在多重散射中虽则较远的散射体对总的散射场都有贡献,然而起作用的仍然是紧围着考察点邻近的散射体.

我们在计算中也同样取了近似,但是结果比文献[7]中所引的 Twersky 的公式更为逼近. Twersky 的针形公式虽和 Shapiro-Rudnick 的经验公式形式相吻,但是实际的散射体并非是细长比趋于零时的这种极限情况,也非如此规则的排布.

参 考 文 献

- [1] I. R. Pellam, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 608.
- [2] K. R. Atkins, *Phys. Rev.*, **113** (1959), 962.
- [3] L. Landau, *J. Phys. U. S. S. R.*, **5** (1941), 77.
- [4] J. M. Ziman, *Proc. Phys. Soc.*, **88** (1966), 387; P. Lloyd, M. V. Berry, *Proc. Phys. Soc.*, **91** (1967), 678.
- [5] 钱祖文, 物理学报, **30**(1981), 433; 唐应吾, 声学学报, (1981), 181; S. M. Sayers, *J. Phys. D*, **13** (1980), 179.
- [6] J. Lefebvre *et al.*, *Ultrasonic*, **18** (1980), 170; C. M. Sayers, R. L. Smith, *Ultrasonic*, **20** (1982), 201.
- [7] K. A. Shapiro, I. Rudnick, *Phys. Rev.*, **137** (1965), A 1383.
- [8] P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill Book Co., (1968).
- [9] V. Twersky, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 700; *ibid.*, **3** (1962), 724; *J. Acoust. Soc. Am.*, **36** (1964), 1314.
- [10] H. J. Lauter, H. Wiechert, *J. Low. Temp. Phys.*, **36** (1979), 139.
- [11] P. C. Waterman, R. Truell, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 512.

THE REFRACTION OF 4th SOUND BY SUPERLEAK GRAINS IN HeII

WANG BEN-REN WEI RONG-JUE

(Institute of Acoustics, Nanjing University)

ABSTRACT

From the point of view of the average compressibility and density, and based on the theory of multiple scattering, the effects of superleak grains on the propagation of the 4th sound in liquid helium II have been discussed. The formulas of the index of refraction both (6) and (31) are obtained. The results of numerical calculations show the role of the former is negligible but the variation of 4th sound velocity due to the multiple scattering agrees well the experimental values given in the literature.