

用变分法近似计算椭球马克中的 倾斜模不稳定性

吴 汉 明 潘 良 儒

(中国科学院力学研究所)

1982年9月4日收到, 1983年6月17日收到修改稿

提 要

本文利用变分法的基本概念, 提出了一种在任意边界形状的情况下近似求解偏微分方程的方法. 把求解偏微分方程的问题近似地化为求解常微分方程组的问题. 尤其是当边界形状较为复杂时, 其优越性更为显著. 作者采用这种方法, 对大椭圆度的球形马克(Spheromak)中的倾斜模(Tilting Mode)不稳定性进行了研究. 得到的结论是: 在扁椭球马克中, 不会出现倾斜模不稳定性.

一、引 言

球形马克是当前受控核聚变领域里的一种新型的磁约束装置. 它的磁场形态与纵横比较小的托卡马克相似. 区别在于: 球形马克中的环向磁场是由等离子体自身的角向电流产生, 而不象托卡马克那样由外加线圈产生环向场^[1]. 另外, 它的 β 值在磁轴附近可达0.2左右, 几乎比托卡马克高一个量级.

在实验上, 最初在预电离的等离子体中, 磁场的形态是无力场形态, 即

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B},$$

其中 α 称为无力因子, 经过反场压缩后, 达到一个具有球形磁面的终态. 根据 Taylor 的理论^[2], 这个终态可近似地用无力场来很好地描述, 与此同时 α 可以认为是一个常数.

很自然地可以提出这样的问题: 究竟在长的($\gamma < 1$)还是在扁的($\gamma > 1$)椭球马克中, 这个终态的无力场的能量更低? Rosenbluth 在 1979 年作了小椭圆度($\gamma \approx 1$)假设后对这个问题进行了研究. 他假设等离子体边界的形状为

$$r = r_0(1 + \varepsilon \cos^2 \theta) \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

其中 r 与 θ 分别是球面坐标中的径向变量与纬度变量, ε 是变形参数. 他得到的结论是: 在 $\gamma \approx 1$ 时, 扁的椭球马克中无力场的能量更低, 从而可以抑制倾

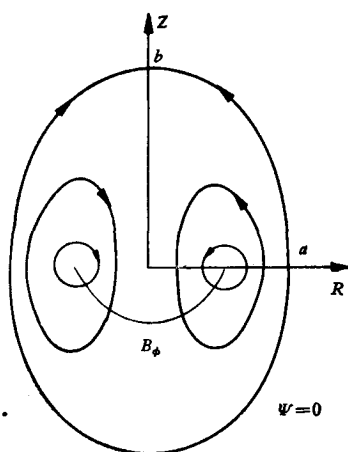


图1 $\gamma = a/b$

斜模不稳定性^[3]. 第二年, 又有人进一步计算了当等离子体边界形状为

$$r = r_0 \left(1 + \sum_l \varepsilon_l^i \sin l\theta + \sum_m \varepsilon_m^c \cos m\theta \right) \quad |\varepsilon_l^i|, |\varepsilon_m^c| \ll 1$$

时, 其无力场能量的大小^[4]. 但是对于大椭圆度的情况尚未有人去进行过研究与讨论. 本文将用直接的变分法来近似计算在大椭圆度情况下, 无力场在椭球马克中的能量, 从而判断哪种椭球马克能抑制倾斜模不稳定性. 由求得的无力因子与相应的无力场, 可以判断哪种椭球马克中的无力场具有较大的剪切, 从而得知哪种椭球马克较有利于抑制交换模不稳定性.

二、方法的说明

根据潘良儒在处理动边界交流电弧热平衡时所采用的方法¹⁾, 本文采用了多泛函的变分法. 基本过程如下:

1. 写出方程的定解问题

$$\hat{L}\phi(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$\phi|_{\Gamma} = Q(x, y), \quad (2)$$

其中 Γ 表示边界, $Q(x, y)$ 是已知函数, $\hat{L}$ 是椭圆型微分算子. 如果 $\hat{L}$ 是抛物型微分算子或双曲型微分算子, 那么, 除了上述的边界条件(2)式以外还要给出其它条件方可构成第一类的边值问题. 凡是第一类边值问题, 原则上都可以把(2)式化为

$$\phi|_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

的形式.

2. 由边界条件(3)式, 可以设满足方程(1)的解的形式为

$$\phi(x, y) = \Gamma(x, y) \sum_k^N f_k(y) e_k(x), \quad (4)$$

其中 $\Gamma(x, y)$ 为满足齐次边界条件的函数, $\{e_k(x)\}$ 是给定的已知函数序列. 若该函数序列是一个完备系列, 则原则上都应收敛, 此方法比里兹方法中选择基函数要容易一些. 当然, 在实际计算中 $\{e_k\}$ 的选择直接影响收敛速度, 所以首先要对问题有一个大概的了解, 从物理直觉来选择 $\{e_k\}$ 的形式.

3. 找出关于方程(1)的 Lagrange 量

$$L = L(\phi, \phi_x, \phi_y, x, y),$$

下标 x, y 分别表示对 x, y 的偏微分.

4. 求泛函:

$$\mathcal{L} = \iint_{\Gamma} L dx dy \quad (5)$$

的极值. 由(4)式可知上式中对 x 的积分可以求出, 即

1) 潘良儒, 私人通信.

$$\mathcal{L} = \int dy \int_{x=x(y)} L dx \equiv \int \tilde{L}(f_0, f_1, \dots, \dot{f}_0, \dot{f}_1, \dots, \dot{f}_n, y) dy.$$

这里,我们记 $\tilde{L} = \int_{x(y)} L dx$, $\dot{f}_i$ 表示对 y 的微商, $x(y)$ 由 $\Gamma(x, y)$ 得到.

5. 由 $\mathcal{L}$ 极值存在的必要条件,即欧拉方程

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{f}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k} = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

可以得到待定函数 $\{f_k(y)\}$, 从而由(4)式得到近似解 $\phi(x, y)$, 该近似解的精度与前面(4)式中所保留的项数有关. 实际计算表明, 一般情况下至多取 2—3 个 $f_k(y)$ 就可得到有实用意义的精度.

三、椭球马克中的无力场形态

我们假设等离子体的电导率很大, 以至于由电阻引起的耗散在整个问题感兴趣的时间尺度内可以略去. 另外还假设被约束的等离子体能量比磁场的能量小得多, 使得体系的能量可以近似地用磁场的能量来表示. 根据 Taylor 的理论可以认为终态的无力场中无力因子 α 是一个与空间无关的常数. 最后还假设等离子体的最外层是理想导体壳, 从而使边界上要求磁场的法向分量为零. 于是相应的 Grad-Shafranov 方程在柱坐标中可以写为

$$\begin{aligned} \Delta^* \phi(R, Z) &= -\alpha^2 \phi(R, Z), \\ \phi|_r &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \\ \Gamma: \frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} &= 1, \quad \alpha = |\mathbf{J}|/|\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

此地因为仅仅考虑轴对称的情况, 所以方位角在上面方程中不出现, 即问题与 φ 无关. 根据磁面 ϕ 与磁场的矢量势 $\mathbf{A}$ 的关系, (7)式可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial R^2} A + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} A + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} A - \left(\frac{1}{R^2} - \alpha^2 \right) A &= 0, \\ A|_r &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

这里 A 表示 $\mathbf{A}$ 的 φ 分量. 显然当 Γ 是一个圆时, 上式经过分离变量可以化为 Bessel 方程, 从而不难得到解析的结果. 但在 Γ 是椭圆时, 问题就较为复杂. 下面我们来讨论当 Γ 为椭圆时, 如何求解方程(8).

根据(4)式, 利用问题关于 Z 轴的对称性, 设满足(8)式的解为

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 \right) [f_0(R) + Z^2 f_2(R) + \dots] \\ &= \Gamma(R, Z) \sum_{k=0}^N Z^{2k} f_{2k}(R). \end{aligned} \quad (10)$$

关于方程(8)的 Lagrange 为

$$L = \frac{R}{2} \left[A_R^2 + A_Z^2 + \left(\frac{1}{R^2} - \alpha^2 \right) A^2 \right], \quad (11)$$

其中下标 R, Z 表示 A 对它们的微商.

首先讨论仅保留(10)式中 $f_0(R)$ 一项的情况,即

$$A = \left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 \right) f_0(R), \quad (12)$$

代入(11)式后得到关于方程(8)的 Lagrange

$$L = \frac{R}{2} \left\{ \Gamma^2 \dot{f}_0^2 + \frac{4R\Gamma}{a^2} f_0 \dot{f}_0 + \left[\frac{4R^2}{a^4} + \frac{4Z^2}{b^2} - \left(\alpha^2 - \frac{1}{R^2} \right) \Gamma^2 \right] f_0^2 \right\}.$$

按照第二部分所示,先求

$$\tilde{L} = \int_{-b\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{R^2}{b^2}}} L dZ = R \sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}} (F_1 \dot{f}_0^2 + F_2 \dot{f}_0 + F_3 f_0 \dot{f}_0),$$

此地

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{4}{3b a^4} \left(\frac{17b^2}{5} - a^2 \right) R^2 + \frac{4}{3b} \left(1 - \frac{4b^2}{5a^2} \right) \\ &\quad + \frac{8b}{15R^2} - \frac{8b}{15} \alpha^2 \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^2, \\ F_2 &= \frac{8b}{15} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right)^2, \\ F_3 &= \frac{8bR}{3a^2} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

由

$$\mathcal{L} = \iint_{\Gamma} L dZ dR = \int \tilde{L} dR$$

的极值条件

$$\frac{d}{dR} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{f}_0} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_0} = 0,$$

即可得到关于 $f_0(R)$ 的二阶常微分方程:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_0(R) + \frac{a^2 - 6R^2}{R(a^2 - R^2)} \dot{f}_0(R) \\ - \frac{5a^2R^2 + 8b^2R^2 + 2a^2b^2}{2b^2R^2(R^2 - a^2)} f_0(R) = -\alpha^2 f_0(R). \end{aligned} \quad (13)$$

相应的边界条件由 $f_0(0)$ 有限以及上式在 $R \rightarrow a$ 时成立,它可以写为

$$\dot{f}_0(a) = -\frac{2+\gamma^2}{2a} f_0(a), \quad (14)$$

$$f_0(0) = C, \quad (15)$$

其中

$$r = a/b.$$

由于方程(13)在边界两端有奇点,所以必须考察其奇点的性质. 结果发现在 $R = a$ 处的奇点是可去奇点,而 $R = 0$ 处幂级数的最低幂次分别是 $+1$ 与 -1 ,所以 $f_0(0)$ 有限条件意味着条件(15)式中 $C = 0$,物理上表示 $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B}|_{R=0} = 0$.

计算结果表明,采用单函数 $f_0(R)$ 的泛函极值条件逼近时,若 $\Gamma(R, Z)$ 是标准圆,则可得近似的本征值 $\alpha = 4.54$,这与解析的结果($\alpha = 4.493$)已相差无几. 但是相应的本征函数其精度比较差. 为了得到比较精确的磁面,以便满足今后研究稳定性的需要,下面做两个函数(f_0, f_2)逼近的计算.

由(10)式设

$$\begin{aligned} A &= \Gamma(R, Z)[f_0(R) + Z^2 f_2(R)] \\ &= \left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 \right) [f_0(R) + Z^2 f_2(R)]. \end{aligned} \quad (16)$$

用与上述单函数逼近时所采用的同样方法,即

$$\mathcal{L} = \int_0^a \tilde{L} dR = \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{1-R^2/a^2}}^{+\sqrt{1-R^2/a^2}} L dZ \right) dR,$$

其中 L 与 $\tilde{L}$ 的具体表达式见附录一. 上式的极值条件可以写为

$$\frac{d}{dR} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f_k} = 0 \quad k = 0, 2.$$

把附录一中的 $\tilde{L}$ 代入上式即可得到一个二阶变系数常微分方程组:

$$\begin{aligned} A_{11}\ddot{f}_0 + A_{12}\ddot{f}_2 + A_{13}\dot{f}_0 + A_{14}\dot{f}_2 + A_{15}f_0 + A_{16}f_2 &= 0, \\ A_{21}\ddot{f}_0 + A_{22}\ddot{f}_2 + A_{23}\dot{f}_0 + A_{24}\dot{f}_2 + A_{25}f_0 + A_{26}f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

此地 $A_{ij}(i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6)$ 的具体表达式见附录二. 相应的边界条件与前面单函数逼近时一样提法,即

$$f_0(0) = 0, \quad (18)$$

$$f_2(0) = 0, \quad (19)$$

$$\dot{f}_0(a) = -\frac{2+r^2}{2a} f_0(a), \quad (20)$$

$$f_2(a) < \infty. \quad (21)$$

注意: 由 f_0 与 f_2 在 $R = 0$ 点的展开可知,它们在零点附近的性质都与方程(13)中的 f_0 相同. 而在 $R = a$ 处, f_2 有一个以 $1/(R - a)$ 的速度趋于无穷的解. 这违背了(16)式在 Γ 上为零的边界条件(9)式,所以我们仅仅保留了在 a 点 f_2 有限的解.

在实际计算中,我们由总磁通守恒条件来给出归一化条件,即在磁轴上有

$$f_0(R_m) = \phi_{\max}/(R_m^2/a^2 - 1)R_m.$$

此地, $\phi_{\max}$ 由 $\nabla \phi_{\max} = 0$ 给出, R_m 为磁轴位置,即 $\phi_{\max} = \phi(R_m, 0)$. 作者在计算中取

$$\phi_{\max} = -0.0525.$$

这主要为了与标准圆球马克的解析结果比较.

为了估计上述方法的可靠性,作者首先作了在标准圆球马克中无力场形态与无力因子的计算. 因为在标准圆球马克中的无力场磁面方程是很容易找到解析解的,所以我们

可以估计其误差. 计算结果表明, 用单函数逼近求得的无力因子, 其精度已是 10^{-2} 量级, 只是磁面函数误差太大. 若用双函数逼近求解, 所得到的无力因子与磁面函数都有较好的精度, 它们的相对误差分别为

$$\delta_\psi = |\psi_A - \psi_N|/|\psi_A| \approx 10^{-2},$$

$$\delta_\alpha = |\alpha_A - \alpha_N|/|\alpha_A| \approx 10^{-3}.$$

这里下标 A, N 分别表示解析与近似结果.

下面用这种方法计算了椭圆度 $\gamma = a/b$ 分别为 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2 时的无力因子和相应的磁面函数. 为了能使结果与标准圆球马克作一些有意义的比较, 我们作了在任何椭圆度的球马克中总体积与总磁通不变的假设, 即

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b = \text{const}, \quad \psi_{\max} = \psi(R_m) = \text{const}.$$

然后把空间分成 50 格, 用主元消去法解出相应于方程(17)的差分方程, 从而得到 $\alpha(\gamma)$ 与 ψ . ψ 的结果见图 4. $\alpha(\gamma)$ 见表 1.

表 1

γ	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
α	5.196	4.726	4.498	4.398	4.377	4.382	4.42

于是由上面已知的 $\alpha(\gamma)$, 可以求出在各种椭圆度的球马克中无力场的安全因子:

$$q = \frac{\alpha\psi}{2\pi} \oint \frac{dl}{B_l R^2}.$$

不难求得在等离子体边界上的 q 值为

$$q_I = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\alpha\psi}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{dZ}{B_Z R^2} = \frac{\alpha b}{2\pi}.$$

在等离子体中的磁轴上的 q 值为

$$\begin{aligned} q_A &= \lim_{\substack{Z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow R_m}} \frac{\alpha\psi}{2\pi} \oint \frac{dl}{B_l^2 R^2} \\ &= \frac{\alpha\psi_{\max}}{2\pi R_m^2} \left(\lim_{\substack{Z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow R_m}} \oint \frac{dl}{B_l} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

为了求上式这个积分, 必须找到在磁轴附近的 $\mathbf{B}$ 与积分迴路的形状. 记磁轴附近的 R 为

$$R = R_m + r.$$

r 的意义见图 2. 然后将磁面函数 ψ 与磁场 $\mathbf{B}$ 在 $R = R_m$ 处作展开, 略去 $o(r^2)$ 小量后, 即可写出在磁轴附近的 $\mathbf{B}$ 与 ψ 的椭圆度 $\tilde{a}/\tilde{b}$,

$$\mathbf{B} = \mu Z \mathbf{e}_r + \nu r \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \tau = \tilde{a}/\tilde{b} &= \sqrt{\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial Z^2} / \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial R^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2a^2 R_m^2 (a^2 - R_m^2) f_{0m} / b^2 - 2R_m^2 (a^2 - R_m^2)^2 f_{2m}}{2(6R_m^4 - 3R_m^2 a^2 + a^4) f_{0m} - R_m^2 (a^2 - R_m^2)^2 f_{0m}}}. \end{aligned}$$

此地 μ, ν 分别为

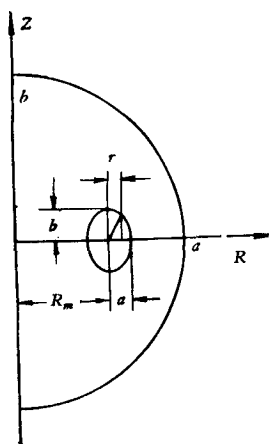


图 2

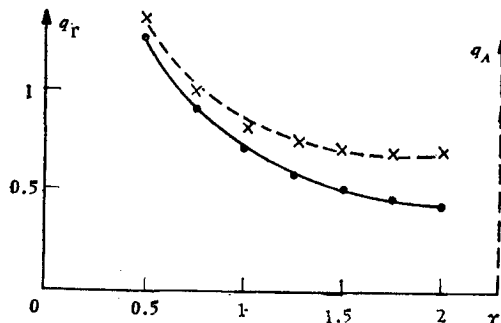


图 3

$$\mu = -2[f_{0m}/b^2 + (R_m^2/a^2 - 1)f_{2m}],$$

$$\nu = \frac{1}{a^2 R_m^2} [(-12R_m^4 + 6R_m^2 a^2 - 2a^4)f_{0m}/(R_m^2 - a^2) + R_m^2(R_m^2 - a^2)f_{0m}],$$

其中

$$f_{0m} = f_0(R_m), \quad f_{2m} = f_2(R_m).$$

注意, 在推导上面 τ, μ, ν 时, 利用了 $\nabla \phi_m = 0$ 的条件. 于是, q_A 的积分式(22)可以写为

$$q_A = \frac{\alpha \phi_{\max}}{\mu R_m^2} \left(\frac{\mu + \nu}{\nu \tau + \mu} \tau - 1 \right).$$

它们在各种椭圆度的球马克中的值分别在图 3 中表示.

为了估计上述方法的精度, 我们对 $\tau = 0.5, 1, 2$ 的情况保留三个待定函数进行计算, 用类似推导方程(17)的方法得到

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{f}_0 \\ \ddot{f}_2 \\ \ddot{f}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{f}_0 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

上述的 B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} 具体表达式见附录三.

相应的边界条件为

$$f_{2i}(0) = 0 \quad i = 0, 1, 2 \quad (24)$$

与

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{b^2} \ddot{f}_0 + \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \ddot{f}_2 + \left[\frac{4R}{a^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \right] \ddot{f}_4 + \frac{1}{Rb^2} \dot{f}_0 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{R^2} \right) \dot{f}_2/b^2 \right. \\ & \left. + \left[\frac{4}{a^2} + \frac{12}{b^2} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \right] \dot{f}_4 + 12 \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) f_4 \right\}_{R=a-h} = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{b^2} \ddot{f}_2 + \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \ddot{f}_4 + \left[\frac{4R}{a^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \right] \dot{f}_4 + \frac{1}{Rb^2} \dot{f}_2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{R^2} \right) f_2/b^2 + \left[\frac{4}{a^2} + \frac{30}{b^2} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \right] f_4 \right\}_{R=a-h} = 0, \quad (26)$$

$$\dot{f}_0(a) + \frac{2 + \gamma^2}{2a} f_0(a) = 0, \quad (27)$$

其中

$$a \gg h.$$

此地(25)与(26)式是把

$$A = \left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 \right) [f_0(R) + Z^2 f_2(R) + Z^4 f_4(R)]$$

代入方程(7)后,令 $R = a - h$ 得到的.

通过数值计算得到的方程(23)的解与方程(17)的解分别构成方程(7)的解 ϕ_3 与 ϕ_2 , 于是不难得到其收敛精度的估计(见图4)

$$\delta\phi = \left| \frac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_3} \right| \approx 10^{-2},$$

相应的无力因子收敛误差为

$$\delta\alpha = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3} \approx 10^{-3}.$$

由此可见,它的收敛性还是比较好的.

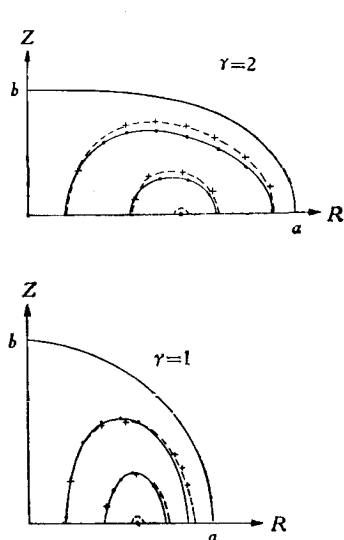


图4 一为二阶结果; ---为三阶结果

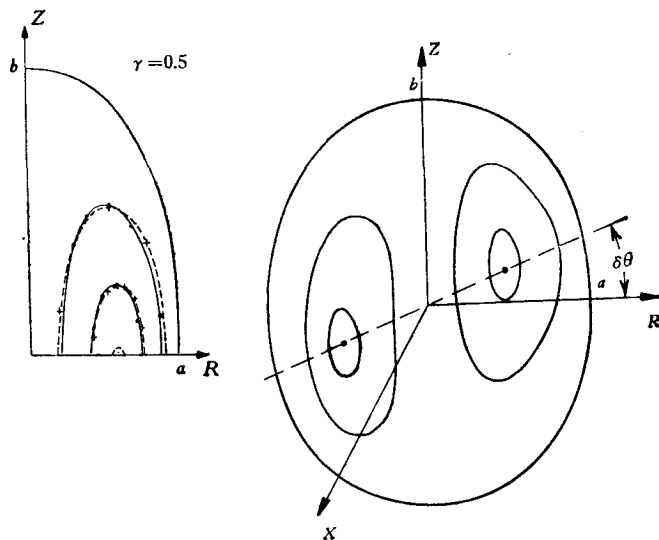


图5

四、结 论

由前面第三部分的 $\alpha(\gamma)$ 表可以看出,当总磁通 ϕ_m 与总体积 $\frac{4}{3} \pi a^2 b$ 被假设为不变

量后, $\alpha(r)$ 在 $r > 1.5$ 后略有回升. 但总的来说 α 在 r 大于 1 与小于 1 的两个区域内有

$$\alpha(r) < \alpha(1/r) \quad r > 1, \quad (28)$$

$$\alpha(r) > \alpha(1/r) \quad r < 1. \quad (29)$$

由于我们认为等离子体的电导率很大, 所以根据文献[5]与 Taylor 的理论, 可以认为

$$K = \oint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV = \text{const.}$$

积分在整个球形磁面内进行. 同时认为无力因子在整个球形磁面内是一个与空间无关的常数. 于是在作了固定边界假设后, 整个体系的能量 W 可以写为

$$W = \alpha \oint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \equiv \alpha K,$$

也就是说总能量正比于 α . 每个 r 的无力场的状态都对应一个 $1/r$ 的无力场的态(即磁轴平面绕 X 轴转动 $\pi/2$). 图 5 是一个长的椭球马克($r < 1$). 当磁轴平面受到一个小扰动而绕 X 轴转动 $\delta\theta$ 角度后, 可由(29)式得知, 整个体系将趋向于转动 $\pi/2$ 后的状态. 因为后者的能量比未扰动时体系的初始能量低, 所以整个球形磁面内的等离子体球就因为倾斜而不稳定, 这就是通常所说的倾斜模不稳定性. 反之, 在扁的椭球马克中, 由(28)式可知, 当磁轴平面绕 X 轴转动 $\delta\theta$ 角后, 没有使转动增加的趋势, 所以当 $r > 1$ 时, 倾斜模不稳定性将被抑制.

另外, 我们可以根据前面已经得到的边界上的安全因子 q_r 与磁轴上的安全因子 q_A , 定性地估计一下磁场的剪切程度, $\left| \frac{dq}{d\psi} / q \right|$ 越大, 表示剪切越大, 对抑制交换模不稳定性越有利. 下面对它们的量作一个粗略的估计:

$$\frac{dq}{d\psi} \approx \frac{q_A - q_r}{\phi_{\max}},$$

$$q \approx \frac{q_A + q_r}{2},$$

$$\frac{dq}{d\psi} / q \approx \frac{2(q_A - q_r)}{\phi_{\max}(q_A + q_r)}.$$

由图 3 与上面的估计, 可以推测在长椭球马克中磁场的剪切较小, 因此交换模不稳定性较容易发生. 当然这仅仅是一个估计, 确切的结论要在做了进一步计算后才能得到.

附 录 一

$$L = \frac{R}{2} \sum_{n=0}^4 \left(\mu_{2n} + \frac{1 - \alpha^2 R^2}{R^2} \nu_{2n} \right) Z^{2n},$$

$$\tilde{L} = R \sqrt{\Delta} \Phi(f_0, f_1, f_2, f_3, R),$$

其中

$$\Delta = 1 - \frac{R^2}{a^2},$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \frac{4R^2}{a^4} f_0^2 + \Delta^2 f_0^2 - \frac{4R\Delta}{a^2} f_0 f_2, \\
\mu_2 &= 8 \left(\frac{R^2}{a^4} - \frac{1}{b^2} \right) f_0 f_2 + 2\Delta^2 f_0 f_2 + \frac{4}{b^4} f_0^2 + 4\Delta^2 f_2^2 \\
&\quad - \frac{2\Delta}{b^2} f_0^2 + \frac{4R}{a^2 b^2} f_0 f_2 - \frac{4R\Delta}{a^2} (f_0 f_2 + f_0 f_2), \\
\mu_4 &= 4 \left(\frac{R^2}{a^4} - \frac{4\Delta}{b^2} \right) f_2^2 + \frac{16}{b^4} f_0 f_2 + \frac{1}{b^4} f_0^2 + \Delta^2 f_2^2 \\
&\quad - \frac{4\Delta}{b^2} f_0 f_2 - \frac{4R\Delta}{a^2} f_2 f_2 + \frac{4R}{a^2 b^2} (f_0 f_2 + f_0 f_2), \\
\mu_6 &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{1}{b^2} f_0 f_2 - \Delta f_2 \right) + \frac{4R}{a^2 b^2} f_2 f_2 + \frac{16}{b^4} f_2^2, \\
\mu_8 &= \frac{1}{b^4} f_2^2, \quad \nu_0 = \Delta^2 f_0^2, \\
\nu_2 &= 2\Delta^2 f_0 f_2 - \frac{2\Delta}{b^2} f_0^2, \quad \nu_4 = \frac{f_0^2}{b^4} - \frac{4\Delta}{b^2} f_0 f_2 + \Delta^2 f_2^2, \\
\nu_6 &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{f_0 f_2}{b^2} - \Delta f_2^2 \right), \quad \nu_8 = \frac{f_2^2}{b^4},
\end{aligned}$$

上面 Φ 的表达式为

$$\Phi = \sum_{n=0}^4 e_n \Delta^n + \frac{1 - \alpha^2 R^2}{R^2} G(f_0, f_2),$$

其中

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{4R^2 b}{a^4} f_0^2, \quad e_1 = \frac{8R^2 b^3}{3a^4} f_0 f_2 - \frac{8Rb}{3a^2} f_0 f_0 + \frac{4}{3b} f_0^2, \\
e_2 &= \frac{4R^2 b^3}{5a^4} f_2^2 + \frac{6b}{5} f_0^2 - \frac{8Rb^3}{15a^2} (f_0 f_2 + f_0 f_2) + \frac{8b}{15} f_0 f_2, \\
e_3 &= \frac{16b^3}{105} f_0 f_2 - \frac{8Rb^3}{35a^2} f_2 f_2 + \frac{44}{105} b^3 f_2^2, \quad e_4 = \frac{8b^3}{315} f_2^2, \\
G &= \Delta^2 \left[\frac{b^3 \Delta^2}{9} f_2^2 + \frac{2b^3}{7} \left(\frac{10}{3} f_0 f_2 - \Delta b^2 f_2^2 \right) \Delta + \frac{b}{5} \left(\frac{8}{3} f_0^2 - 4b^2 \Delta f_0 f_2 + b^4 \Delta^2 f_2^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

附 录 二

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 14bR^2 \Delta, & A_{12} &= 2b^3 R^2 \Delta^2, \\
A_{21} &= 6b^3 R^2 \Delta, & A_{22} &= 2b^3 R^2 \Delta^2, \\
A_{13} &= 14bR \left(1 - 6 \frac{R^2}{a^2} \right), & A_{14} &= 2b^3 R \Delta \left(1 - 8 \frac{R^2}{a^2} \right), \\
A_{23} &= 6b^3 R \left(1 - 8 \frac{R^2}{a^2} \right), & A_{24} &= 2b^3 R \Delta \left(1 - 10 \frac{R^2}{a^2} \right), \\
A_{15} &= -7b \left[\left(\frac{8b}{a^2} + \frac{5}{b} \right) R^2 + 2b - 2b\alpha^2 R^2 \Delta \right], \\
A_{25} &= -3b^3 \left[\left(\frac{12}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) R^2 + 2 - 2\alpha^2 R^2 \Delta \right], \\
A_{16} &= -b^3 \Delta \left[\left(\frac{12}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) R^2 + 2 - 2\alpha^2 R^2 \Delta \right], \\
A_{16} &= -b^3 \Delta \left[\left(\frac{16}{a^2} + \frac{33}{b^2} \right) R^2 + 2 - 2\alpha^2 R^2 \Delta \right],
\end{aligned}$$

其中

$$\Delta = 1 - R^2/a^2.$$

附 录 三

$$B_{11} = 2bR\Delta, B_{12} = \frac{2b^3R}{7} \Delta^2, B_{13} = \frac{2}{21} b^5R\Delta^3,$$

$$B_{21} = 2b^3R\Delta, B_{22} = \frac{2}{3} b^5R\Delta^2, B_{23} = \frac{10}{33} b^7R\Delta^3,$$

$$B_{31} = 2b^5R\Delta, B_{32} = \frac{10}{11} b^7R\Delta^2, B_{33} = \frac{70}{143} b^9R\Delta^3.$$

$$C_{11} = 2b\left(1 - 6\frac{R^2}{a^2}\right), C_{12} = \frac{2}{7} b^3\Delta\left(1 - 8\frac{R^2}{a^2}\right), C_{13} = \frac{2}{21} b^5\Delta^2\left(1 - 10\frac{R^2}{a^2}\right),$$

$$C_{21} = 2b^3\left(1 - 8\frac{R^2}{a^2}\right), C_{22} = \frac{2}{3} b^5\Delta\left(1 - 10\frac{R^2}{a^2}\right), C_{23} = \frac{10}{33} b^7\Delta^2\left(1 - 12\frac{R^2}{a^2}\right),$$

$$C_{31} = 2b^5\left(1 - 10\frac{R^2}{a^2}\right), C_{32} = \frac{10}{11} b^7\Delta\left(1 - 12\frac{R^2}{a^2}\right), C_{33} = \frac{70}{143} b^9\Delta^2\left(1 - 14\frac{R^2}{a^2}\right).$$

$$D_{11} = -R\left[10\frac{b}{a^2} + \frac{5}{b} + \frac{2b}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{12} = -\frac{bR\Delta}{7} \left[14\frac{b^2}{a^2} + 7 + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{13} = -\frac{b^3R\Delta^2}{21} \left[\frac{18b^2}{a^2} + 9 + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{21} = -Rb \left[14\frac{b^2}{a^2} + 7 + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{22} = -\frac{Rb^3\Delta}{3} \left[18\frac{b^2}{a^2} + 33 + \frac{2b^2\Delta}{R^2} (1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{23} = -\frac{35}{231} Rb^5\Delta^2 \left[22\frac{b^2}{a^2} + \frac{231}{5} + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{31} = -Rb^3 \left[18\frac{b^2}{a^2} + 9 + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{32} = -\frac{5}{11} Rb^5\Delta \left[22\frac{b^2}{a^2} + \frac{231}{5} + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

$$D_{33} = -\frac{35}{143} Rb^7\Delta^2 \left[26\frac{b^2}{a^2} + \frac{507}{7} + \frac{2b^2}{R^2} \Delta(1 - \alpha^2 R^2)\right],$$

其中 $\Delta = 1 - R^2/a^2$.

参 考 文 献

- [1] G. C. Goldenbaum, J. H. Irby, Y. P. Chong, and G. W. Hart, *Phys. Rev. Lett.*, **44** (1980), 393.
- [2] J. B. Taylor, *Pulsed High-Beta Plasmas*, edited by D. E. Evans, Pergamon, Oxford, (1976), p. 59.
- [3] M. N. Rosenbluth and M. N. Bussac, *Nucl. Fusion*, **19** (1979), 489.
- [4] K. Yamazaki, *Nucl. Fusion*, **20** (1980), 1459.
- [5] 潘良儒, *天文学报*, **20**(1979), 182.

APPROXIMATE CALCULATION OF THE TILTING MODE INSTABILITY IN AN ELLIPTICAL SPHEROMAK BY VARIATIONAL METHOD

WU HAN-MING PAN LIANG-RU
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Based on the variational principle, a new method for approximately solving partial differential equation with an arbitrary boundary shape is proposed. Accordingly, the problem of solving a partial differential equation is reduced to one of solving a series of ordinary differential equations. This method proves to be more powerful when the boundary shape gets complicated. An application is made to the problem of the tilting mode instability for spheromak without restriction in ellipticity. The following physical conclusion is arrived at, namely, the oblate spheromak is better than elongated one as far as suppressing the tilting mode instability is concerned.