

电流非单调分布时的电阻流体不稳定性

马 腾 才 官 野

(中国西南物理研究所)

1983年8月6日收到

提 要

本文用数值方法研究了位形存在两个共振面时电阻流体活动的特性。计算是在不同电流分布和不同电导率的情况下,对 $m=2$ 的扰动做的。结果表明,电阻 MHD 活动的特征及其增长率不仅依赖于电导率的大小和电流径向剖面峰化的程度,而且依赖于两个共振面之间磁垒的高低。文中还详细介绍了数值方法,这个方法已用于研究撕裂模的非线性演化。

一、引 言

近年来,人们研究托卡马克上电流非单调径向分布时电阻流体运动的兴趣有所增加。其原因,一方面是由于 MHD 的约束理论指出非单调电流分布可能达到较高的 β 值^[1];另一方面是由于实验上观察到放电初期的 MHD 活动严重地损坏了放电稳态阶段的等离子体稳定性。从而引起人们对放电初期 MHD 活动的关注。在放电初期,当整个电流迅速上升时,由于趋肤效应,电流在等离子体边缘附近是非单调的。在这个阶段,实验上观察到具有明显螺旋形空间结构的 MHD 活动^[2]。在电流非单调径向分布的情况下,会有两个与螺旋扰动($\exp(im\theta + in\varphi)$)相共振的有理面 $r=r_s(q(r_s)=m/n)$ 存在,实验上看到的 MHD 螺旋振荡自然地同等离子体在两个共振面附近的运动有关。此外,目前引起研究电流非单调分布时电阻流体运动兴趣的一个更重要的原因,是在大托卡马克的稳态放电阶段观察到了电流的非单调径向分布^[3,4]。

在直柱近似下,文献[5]利用常“ ψ ”近似对电流非单调分布时撕裂模不稳定性已做了初步研究。但是,该文没有触及到在电流非单调分布下电阻流体运动的特征及其扰动增长率。对这方面物理上的认识与了解是很重要的,它们对电阻流体运动的进一步发展有决定性的作用。此外,文献[5]使用常“ ψ ”近似处理具有两个共振面的撕裂模不稳定性也是欠合理的。因为,当最外侧的共振面在等离子体边缘时,那里的电阻率与另一个共振面上的电阻率相比要高得多(文献[5]的假设条件)。这样一来,包含外共振面的耗散层厚度是比较宽的,取常“ ψ ”近似不太合理。

本文基于电阻的磁流体方程组,在强纵向磁场的近似下,用数值方法研究了位形存在两个共振面时电阻流体活动的特性。计算是在不同电流分布和不同电导率的情况下,对 $m=2$ 的扰动做的。结果表明:电阻 MHD 活动的特征及其增长率不仅依赖于电导率的大小和电流径向剖面峰化的程度,而且依赖于两个共振面之间磁垒的高低。当两个共振

面被很高的磁垒分隔开时,电阻流体的运动基本上局限于两个共振面的邻域里,难以离开共振面而汇合在一起,扰动必然增长得慢. 然而,当隔开两个共振面的磁垒比较低时,流体的动能就可能克服磁垒对运动的阻碍,于是流体就从共振面邻域扩展出来,而汇合在一起,这不仅导致增长率变大,而且这种汇合流动还会导致等离子体温度和电流径向剖面的加宽. 这可能是放电初期阶段电流径向剖面迅速加宽的基本原因,因为在这个阶段上,每对共振面之间的磁垒都是比较低的.

二、基本方程和定解条件

在强纵向磁场的情况下,可用一组简化的电阻 MHD 方程组^[6]描述等离子体的螺旋运动. 本文中我们将使用一组完全与文献[6]等价的、以场势 ψ 、速度势 ϕ 和涡旋 $\omega = \text{rot}_z \mathbf{V}$ 表出的方程组:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = (\mathbf{B}_* \cdot \nabla) j_z, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \phi = S^{-1}(\Delta \phi - 2q_0) - E_0, \quad (2)$$

$$\Delta \phi = -\omega. \quad (3)$$

包含在上述方程中的矢量 $\mathbf{B}_*$, $\mathbf{V}$ 和电流密度的 z 向分量 j_z 可由势函数给出如下:

$$\mathbf{B}_* = \nabla \psi \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \times \mathbf{e}_z, \quad j_z = -(\Delta \phi - 2q_0), \quad (4)$$

其中 $q_0 = nq_a/m$, q_a 是等离子体柱边界 $r = a$ 处的安全因子的值; $S = \tau_R/\tau_A$, $\tau_R = 4\pi a^2/c^2\eta$, $\tau_A = a/V_A$, $V_A = B_\perp(a)/\sqrt{4\pi\rho}$, 上述各方程中的物理量已用 a , τ_A 和 V_A 做距离、时间和速度的单位无量纲化了.

方程组(1)–(3)的解应满足边界条件

$$\phi|_{r=1} = \phi|_{r=1} = 0.$$

在螺旋扰动的假设下,可从方程(1)–(3)得到需要进行数值求解的下述线性化方程组:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \frac{m}{r} \left[\phi_1 \left(\Delta_\perp \phi'_0 + \frac{m^2 - 1}{r^2} \phi'_0 \right) - \phi'_0 \Delta_\perp \phi_1 \right], \quad (5)$$

$$\phi_1 = -\Delta_\perp^{-1} \omega_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\frac{m}{r} \phi_1 \phi'_0 + S^{-1} \Delta_\perp \phi_1. \quad (7)$$

初始条件:

$$\omega_1(r, 0) = 0, \quad (8)$$

$$\phi_1(r, 0) = \begin{cases} \text{const} & \text{当 } r_s - \varepsilon \leq r \leq r_s + \varepsilon, \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

边界条件:

$$\phi_1(0, t) = \phi_1(1, t) = 0, \quad (10)$$

$$\phi_1(0, t) = \phi_1(1, t) = 0. \quad (11)$$

上式中的下角标“0”表示未扰动量,下角标“1”表示扰动量,上角标“'”表示对 r 求导数,扰动磁场 $\mathbf{B}_1 = \nabla \phi_1 \times \mathbf{e}_z$; 算符

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}.$$

本文我们将使用如下的电流密度分布:

$$j_z = j_0 [r(1-r)]^{2p}. \quad (12)$$

当 $p=1$ 和 2 时, 电流密度的径向剖面由图 1 给出. 图上虚线给出是 PLT 上的等离子体电流分布 $(j_z - T_e^{3/2})^{[3]}$. 与电流分布 (12) 式相对应的 $q(r)$ 值由

$$q(r) = Q_0 \frac{r^2}{2} \left[\int_0^r (1-x)^{2p} x^{2p+1} dx \right]^{-1}$$

给出. 这里 Q_0 是一个由 q_a 决定的常数. 平衡磁场的通量函数 ϕ_0 为

$$\phi_0(r) = q_a \int_r^1 \left[\frac{1}{q(x)} - \frac{n}{m} \right] x dx.$$

扰动增长率由磁场扰动幅值的指数增长率决定

$$\gamma = \frac{1}{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}.$$

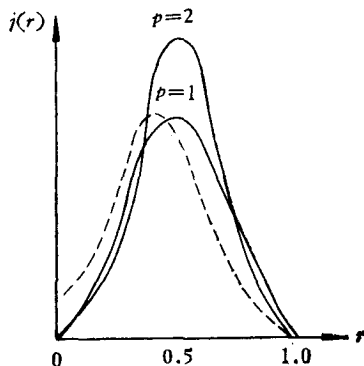


图 1 电流密度的径向剖面

共振面 $r = r_s$ 由方程 $\phi'_0(r_s) = 0$ 即 $q(r_s) = m/n$ 确定, 它有两个共振面 r_{s1} 和 r_{s2} .

三、数值解法

我们采用两步隐式有限差分法求解上述方程. 为书写方便, 将(5)–(11)式中的下角标“1”皆略去. 根据物理量的性质(在奇异面附近 $\phi \approx \text{const}$), 和方程对 ϕ 的齐次性, 在共振面 r_{s1} 和 r_{s2} 附近, 可分别构造一个 δ 函数. 例如, 把 $[0, 1]$ 区间分成 J 份(即 $J+1$ 个点), 令

$$\delta(r_i) = \begin{cases} \exp[-L * (NS_1 - 2 - i)] & \text{当 } i = 2, 3, \dots, NS_1 - 3; \\ \exp[-L * (i - NS_1 - 2)] & \text{当 } i = NS_1 + 3, NS_1 + 4, \dots, NS - 1; \\ \exp[-L * (NS_2 - 2 - i)] & \text{当 } i = NS + 1, NS + 2, \dots, NS_2 - 3; \\ \exp[-L * (i - NS_2 - 2)] & \text{当 } i = NS_2 + 3, NS_2 + 4, \dots, J; \\ 1 & \text{当 } i = NS_1 - 2, NS_1 - 1, \dots, NS_1 + 2; \\ & NS_2 - 2, NS_2 - 1, \dots, NS_2 + 2. \\ 0 & \text{当 } i = 0, NS, J + 1. \end{cases}$$

于是, 数值计算中可用 $\phi(r_i, 0) = \delta(r_i)$ (9')

代替(9)式. 式中的 $NS_1 = \text{ent}(r_{s1} * J) + 1$, $NS_2 = \text{ent}(r_{s2} * J) + 1$, $NS = \text{ent}((NS_1 + NS_2 + 1)/2)$, ent 表示取整数部分, L 是待选取的某个正整数.

本文采用的对时间步长的两步隐式差分格式^[7]如下:

对时间步长的前半步为

$$\omega^{t+\frac{1}{2}} = \omega^t + \frac{\Delta t}{2} (SM)^t, \quad (13)$$

$$\phi^{t+\frac{1}{2}} = -\Delta_{\perp}^{-1} \omega^{t+\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

$$\phi^{t+\frac{1}{2}} = \phi^t + \frac{\Delta t}{2} (KM)^{t+\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

对时间步长的后半步为

$$\omega^{t+1} = \omega^t + \Delta t (SM)^{t+\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$\phi^{t+1} = -\Delta_{\perp}^{-1} \omega^{t+1}, \quad (17)$$

$$\phi^{t+1} = \phi^t + \Delta t (KM)^{t+1}. \quad (18)$$

上式中的 SM , KM 分别表示(5)和(7)式的右端项.

旋度 ω 用显式格式, 螺旋磁通量 ϕ 和速度流函数 ϕ 用反演三对角矩阵求得. 其具体步骤是:

将(14)和(17)式写成三对角矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{J-1} & b_J & c_J \\ & & & a_J & b_{J+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_J \\ \phi_{J+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_J \\ \omega_{J+1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h r_i}, & b_i &= -\frac{2}{h^2} - \frac{m^2}{r_i^2}, \\ c_i &= \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h r_i}, & i &= 2, 3, \dots, J. \end{aligned}$$

由边界条件(11)式, 可取 $b_1 = b_{J+1} = 1$, $c_1 = a_J = 0$, $\omega_1 = \omega_{J+1} = 0$.

同样, 将(15)和(18)式写成三对角矩阵形式

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_1 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{J-1} & B_J & C_J \\ & & & A_J & B_{J+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_J \\ \phi_{J+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_J \\ f_{J+1} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{i-1} &= D_t \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h r_i} \right) / S, \\ B_i &= -D_t \left(\frac{2}{h^2} + \frac{m^2}{r_i^2} \right) / S^{-1}, \\ C_i &= D_t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h r_i} \right) / S, \\ f_i &= \frac{m}{r_i} D_t \phi_i \phi'_0(i) - \phi_i^t, \quad i = 2, 3, \dots, J. \end{aligned}$$

$$D_t = \begin{cases} \Delta t/2 & \text{对时间步长的前半步,} \\ \Delta t & \text{对时间步长的后半步.} \end{cases}$$

由边界条件(10)式,可取 $B_1 = B_{J+1} = 1$, $C_1 = A_J = 0$, $f_1 = f_{J+1} = 0$.

显然,上述矩阵皆是对角占优的. 因此,可采用“追赶”法求解. 关于“追赶”法的稳定性见文献[9].

方程(7)的本征模的出现,是由计算 r 方向的有限差分网格的每个点处的增长率

$$\gamma = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

确定. 当这个量在时间和空间上(除掉 r 方向上的两个端点)都变成常量时(例如,可由令

$$MD = \max_{2 \leq j \leq J} \frac{1}{\phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial t}, \quad MC = \min_{2 \leq j \leq J} \frac{1}{\phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial t},$$

当 $|(MD - MC)/MD| < \epsilon_0$ 时判定,有效数字四位),就认为指数增长模已经发展起来,我们就将这个常量看作增长率 γ 值.

考虑到速度流函数 ϕ 在共振面 $r=r_s$ 附近是奇函数,跳跃度较大. 因此,数值求解时,我们可在奇异层附近把分点取得密一些,在离奇异层远的区域取的稀一些. 这样做,既可保证得到物理上满意的结果,又可节省计算机内存量和计算时间.

为检验计算编码的可靠性,我们按文献[8]给出的单调电流分布,计算了 $m=2$ 撕裂模的增长率和本征函数. 其中 $m/n=2/1$, $p=2$, $\eta_s=1/S$ 时的部分结果见图 2 和表 1.

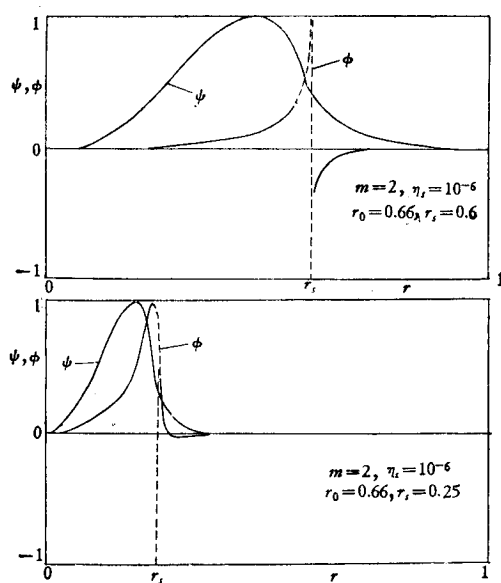


图 2 本征函数 ϕ 和 ϕ' 随 r 的变化曲线

对照文献[8],图 2 与文献[8]中的图 3 完全一致;表 1 的数据与文献[8]中图 2 相应的数据完全符合.

注意到在线性近似下,磁场增长率恰好等于扰动磁能增长率 γ_w 的一半,即 $\gamma = \gamma_w/2$.

表 1 ($r_0 = r_s = 0.66$)

S	10^2	5×10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
γ	0.049	0.067	0.061	0.026	0.010	0.0025

这里磁能增长率由

$$\gamma_W = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial t}$$

而定, 其中

$$W = \int_0^1 r \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \psi^2 \right] dr.$$

是磁能. 于是, 我们还可用计算出的 $\gamma_W/2$ 是否等于 γ 来检验结果的正确性. 计算结果表明, 当 γ 定出时, 它与同时算出的 $\gamma_W/2$ 至少能符合三位有效数字.

计算实践表明, 取 $L = 6$ 为宜 (我们取 $L = 5, 6, 7$ 发现对最终结果几乎没有影响). 另外, 对节点加倍, 时间步长减半, 分别重新计算, 其相应的增长率 γ 、本征函数 ψ 和 ϕ 都至少能符合三位有效数字.

四、计算结果及讨论

在计算中我们假定电阻率为常数, 参量 S 在 $10^4 - 10^6$ 范围取值, 平衡态时的 ϕ_0 由图 3 给出. 在 I 的情况下 ($q_a = 2.5$ 和 $p = 2$), 两个共振面 ($r_{s1} = 0.441$, $r_{s2} = 0.893$) 相距较远, 分隔开它们的磁垒

$$\delta_h = |\phi_0(r_{s2}) - \phi_0(r_{s1})| \approx 0.1$$

比较高. 这时磁垒基本上把等离子体的涡旋流动限制在共振面附近 (见图 4). 在 II 的情况下 ($q_a = 3.1$, $p = 2$, $r_{s1} = 0.511$, $r_{s2} = 0.786$) 共振面之间距离较近, 分隔两个共振面的磁垒

$$\delta_h = |\phi_0(r_{s2}) - \phi_0(r_{s1})| \approx 0.02$$

很低. 这时等离子体在共振面附近运动的动能可以克服磁垒的阻碍, 扩展到两个共振面中间区域里 (见图 5). 这时扰动增长率明显地比情况 I 时的大 (见图 6). 它们之间的差随着 S 值的增加而增大. 从物理上看, 这一点是容易理解的, 因为随着电导率的增大, 等离子体的冻结效应得到加强, 从而助长了磁垒对等离子体运动的阻碍作用. 图 7 给出 $p = 1$ 和 2 两种电流分布的扰动增长率与 S 的函数关系. 显然, 电流趋肤的程度越强, 即电流径向分布的剖面越窄、越尖, 稳定性就越差, 增

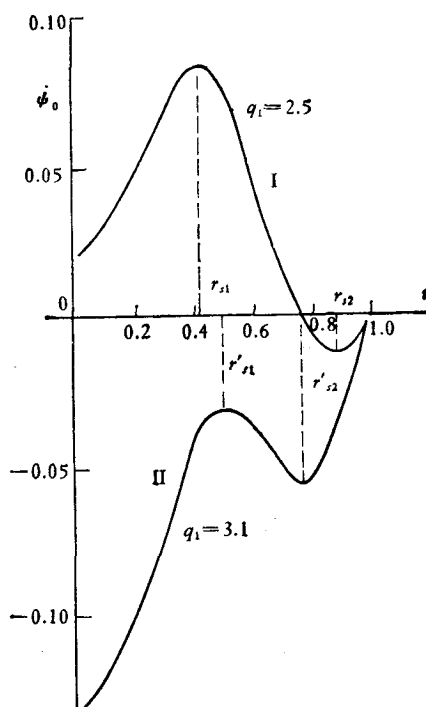


图 3 磁通量函数 ϕ_0 的径向分布

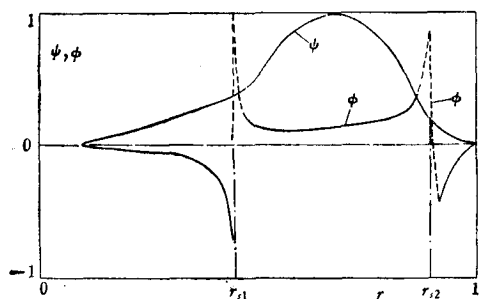


图4 对于 $p=2$, $q_a=2.5$ 时本征函数 ψ 和 ϕ 的径向分布

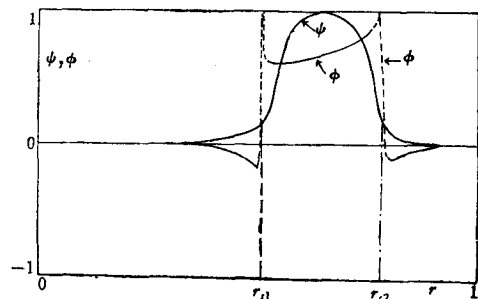


图5 对于 $p=2$, $q_a=3.1$ 时本征函数 ψ 和 ϕ 的径向分布

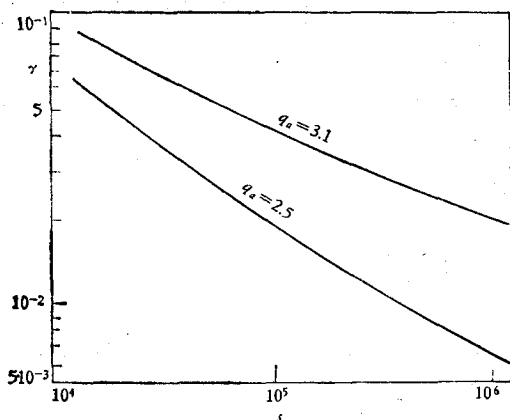


图6 $p=2$, $q_a=2.5$ 和 3.1 时增长率与 S 的函数关系

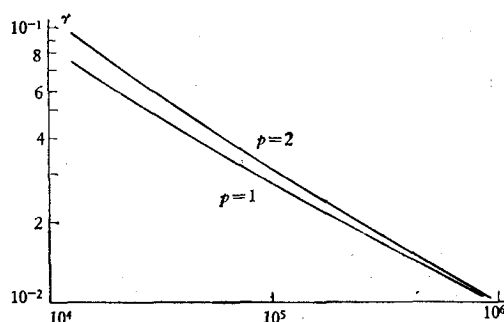


图7 在不同电流分布下 ($p=1, 2$; $q_a=2.7$), 增长率 γ 与 S 的函数关系

长率越大。随着电导率的增大, 电流分布对增长率的影响变小 (见图7)。

五、结 束 语

通过以上的数值分析, 我们看出: 对于非单调径向分布的等离子体电流, 电阻流体在共振面附近的运动具有明显的特点。当隔开共振面的磁垒很大时, 流体只局限在共振面的邻域里做涡旋运动。然而, 当隔开共振面的磁垒比较低时, 原来局限在共振面邻域的涡旋流动可以延伸到共振面的中间区域, 彼此混合起来。这种混合流动有助于等离子体温度和电流密度的径向剖面加宽, 削弱趋肤效应, 加速电流向中心集中, 从而可以改善等离子体的稳定性。

参 考 文 献

- [1] 石秉仁, 科学通报, **23**(1982), 1425.
- [2] С. В. Мирнов, Физика плазмы, **4**(1978), 50.
- [3] N. Bretz *et al.*, Status of Ohmic Heating in PLT, Symposium, Princeton, Sept., 2, 1, (1977).
- [4] Г. А. Бобровский и др., Физика плазмы, **5**(1982), 1027.
- [5] H. P. Furth, *et al.*, Phys. Fluids, **16**(1973), 1054.

- [6] B. B. Кадомцев, *ЖЭТФ*, **65**(1973), 575.
[7] B. V. Waddell, *et al.*, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 866.
[8] D. Biskamp, IAEA-CN-35/B₂-2.
[9] 张关泉, 计算数学, **3**(1982), 298.

RESISTIVE FLUID INSTABILITY AT THE NONMONOTONOUS CURRENT PROFILE

MA TENG-CAI GONG YE

(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

It can be shown that the dynamics of magnetic perturbation at the nonmonotonous profile of a current in tokamak is qualitatively different from that of normal profiles. Behaviour of the perturbation depends on the helical magnetic currents localized mainly between the two singular surfaces. In this paper the numerical method developed to study the non-linear evolution of tearing modes is described in detail.