

Kerr-Newman 度规的直接推导

桂元星 张继光¹⁾ 张 杨²⁾ 陈方培

(大连工学院物理系)

1983年7月4日收到

提 要

本文首次用基本方法直接求解 Einstein-Maxwell 方程,求出了 Kerr-Newman 度规。

1963年, Kerr^[1] 用退化度规方法给出了 Kerr 度规。1965年, Newman 等人^[2] 用复延拓方法给出了 Kerr-Newman 度规。通常认为,这两个解难以利用基本方法通过直接求解 Einstein 方程和 Einstein-Maxwell 方程求出。最近, Klotz^[3] 利用基本方法直接求解 Einstein 方程,成功地推出了 Kerr 度规。我们把 Klotz 的方法推广到存在电磁场的情况,求解 Einstein-Maxwell 方程,用基本方法求出了 Kerr-Newman 度规和对应的电磁场。文献[3]的计算中存在一些错误,本文中已予以修正。

—

设稳态轴对称度规具有如下形式:

$$ds^2 = r d\tau^2 - \Sigma \left(d\xi^2 + d\theta^2 + \frac{q}{a} d\varphi^2 \right) + 2q d\tau d\varphi, \quad (1)$$

式中 r 和 Σ 是坐标 ξ, θ 的函数, q 只是 θ 的函数, a 是出于量纲考虑引入的常数。

引入变换

$$d\tau = dt - q d\varphi, \quad (2)$$

并假设

$$\Sigma = a(p - q), \quad (3)$$

其中 p 仅是 ξ 的函数。于是(1)式变为

$$ds^2 = r dt^2 - a(p - q) d\xi^2 - a(p - q) d\theta^2 - [(1 - r)q^2 + pq] d\varphi^2 + 2q(1 - r) dt d\varphi. \quad (4)$$

在坐标

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \xi, \theta, \varphi) \quad (5)$$

中,可求出非零的 Christoffel 符号为

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{p r_1}{2\Delta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p r_2 + (1 - r)^2 q_2}{2\Delta},$$

1), 2) 张继光、张杨系八一级研究生。

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \ 3 \end{matrix} \right\} &= -\frac{q[p\gamma_1 + (1-\gamma)p_1]}{2\Delta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2 \ 3 \end{matrix} \right\} = -\frac{q[p\gamma_2 + (1-\gamma)2q_2]}{2\Delta}, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \ 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{\gamma_1}{2\Sigma}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \ 3 \end{matrix} \right\} = -\frac{q\gamma_1}{2\Sigma}, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} &= -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p_1}{2(p-q)}, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} &= \frac{q(q\gamma_1 - p_1)}{2\Sigma}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{q_2}{2(p-q)}, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \ 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{\gamma_2}{2\Sigma}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{(1-\gamma)q_2 - q\gamma_2}{2\Sigma}, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} &= -\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{q_2}{2(p-q)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{p_1}{2(p-q)}, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} &= \frac{q^2\gamma_2 - [p + 2(1-\gamma)q]q_2}{2\Sigma}, \\
\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{\gamma_1}{2\Delta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{q\gamma_2 - \gamma(1-\gamma)q_2}{2q\Delta}, \\
\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \ 3 \end{matrix} \right\} &= \frac{\gamma p_1 - q\gamma_1}{2\Delta}, \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{[p\gamma + (1-\gamma^2)q]q_2 - q^2\gamma_2}{2q\Delta},
\end{aligned}$$

式中

$$\Delta = \gamma p + (1-\gamma)q, \quad (6)$$

且度规系数 p, q, γ, Δ 的下标 1 和 2 分别表示对坐标 ξ 和 θ 的导数.

由 Ricci 张量的一般公式

$$R_{\mu\nu} = -\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\}_{,\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \ \sigma \end{matrix} \right\}_{,\nu} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma \ \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma \ \rho \end{matrix} \right\},$$

可求出不为零的 Ricci 张量分量只有 $R_{00}, R_{03}, R_{11}, R_{12}, R_{22}, R_{33}$. 写出其中几个

$$R_{12} = \frac{\Delta_{12}}{2\Delta} - \frac{\Delta_2}{4\Delta^2(p-q)} [(p-q)\Delta_1 + 2\Delta p_1], \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
R_{00} = & -\frac{\gamma_{11} + \gamma_{22}}{2\Sigma} + \frac{1}{4\Delta\Sigma} [(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(p-q) + 2\gamma_2 q_2(1-\gamma) - \gamma p_1 \gamma_1] \\
& + \frac{\gamma q_2}{4q\Delta\Sigma} [-2q_2(1-\gamma)^2 - p\gamma_2], \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{03} = & \frac{q(\gamma_{11} + \gamma_{22})}{2\Sigma} - \frac{q}{4\Delta\Sigma} [p_1\gamma_1(2-\gamma) + 3\gamma_2 q_2(1-\gamma) + (p-q)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] \\
& + \frac{1}{4\Delta\Sigma} \{2\Delta[2\gamma_2 q_2 - (1-\gamma)q_{22}] + [2\gamma q_2^2(1-\gamma)^2 - \gamma_2 p q_2]\} \\
& + \frac{1}{4q\Delta\Sigma} \gamma p q_2^2(1-\gamma). \quad (9)
\end{aligned}$$

二

如果把 Einstein-Maxwell 方程的所有稳态轴对称解划为一类的话,那这一类解所包含的范围仍是相当广的.例如旋转带电杆、旋转带电球、旋转带电圆盘等所产生的外部场都属于这一类解.我们讨论的 Kerr-Newman 解,是旋转带电奇环产生的外部电磁场和重力场,它只是这一类解中的一种.显然,要把 Kerr-Newman 解从一般的稳态轴对称解中挑出来,还需要加上更多的约束条件.前面给出的度规(4)式,已经从 Einstein 场方程的左边作了一些限制.下面,我们从场方程的右边,即对电磁场的能动张量 $T_{\mu\nu}$,作出进一步的限制.

一个合理的要求是假定

$$T_{12} = 0. \quad (10)$$

它的意义是在所讨论的情况下,径向不存在电磁场动量的 θ 分量流.于是立即有

$$R_{12} = 0. \quad (11)$$

由(7)式可知,满足(11)式的一个最简单的解是

$$\Delta_2 = r_2(p - q) + (1 - r)q_2 = 0 \quad (12)$$

或

$$r_2 = -\frac{(1-r)q_2}{p-q}. \quad (13)$$

(12)式表明, Δ 只是 ξ 的函数.于是可引入新的独立变量 σ ,

$$\sigma = \int \Delta^{1/2} d\xi. \quad (14)$$

这样由(6)式可得

$$r = 1 - \frac{2f}{p-q}, \quad (15)$$

其中 $f = \frac{1}{2}(p - \Delta)$, f 只是 σ 的函数.下边的讨论中我们将采用 σ 来表示径向坐标, ξ 和 σ 之间的关系由(14)式给出,并用“ $\cdot$ ”表示对 σ 的导数,

$$p_1 \equiv \frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{d\sigma} \Delta^{\frac{1}{2}} = \dot{p} \Delta^{1/2}.$$

(10)式还可对 Maxwell 方程的解提供一些有用的线索.由定义

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda k} F^{\lambda k}, \quad (16)$$

在稳态轴对称情况下,电磁势只有 A_0 和 A_3 分量,且 A_0 和 A_3 只是 σ 和 θ 的函数^[4].把(10)式用电磁势写出

$$T_{12} = A_0(g^{00}A_{0,2} + g^{30}A_{3,2}) + A_3(g^{03}A_{0,2} + g^{33}A_{3,2}) = 0. \quad (17)$$

相应的度规可求得(采用坐标 $(t, \sigma, \theta, \varphi)$)

$$g = -q\Sigma^2, \quad g^{11} = -\frac{\Delta}{\Sigma}, \quad g^{22} = -\frac{1}{\Sigma},$$

$$g^{33} = -\frac{\gamma}{\Delta q}, \quad g^{00} = \frac{(1-\gamma)q+p}{\Delta}, \quad g^{03} = \frac{1-\gamma}{\Delta}. \quad (18)$$

把(18)式代入(17)式,得

$$\left[A_{0,2}(1-\gamma) - \frac{\gamma}{q} A_{3,2} \right] \left(q + \frac{A_3}{A_0} \right) + (pA_{0,2} + A_{3,2}) = 0. \quad (19)$$

如此式成立,只要

$$q + \frac{A_3}{A_0} = 0, \quad (20)$$

$$pA_{0,2} + A_{3,2} = 0. \quad (21)$$

容易从(20)式看出,一个可能的解是

$$A_3 = -qA_0. \quad (22)$$

以后将看到,这正是我们需要的关系.

把(22)式代入(21)式,得

$$A_{0,2}(p-q) = q_2 A_0. \quad (23)$$

于是可期望 A_0 具有如下形式:

$$A_0 = \frac{\omega(p)}{p-q}, \quad (24)$$

式中 $\omega(p)$ 只是 p 的函数.

三

下面在 $(t, \sigma, \theta, \varphi)$ 坐标下求解 Maxwell 方程. 真空中的 Maxwell 方程为

$$F^{\mu\nu};_{\nu} = 0, \quad (25)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (26)$$

用电磁势

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \quad (27)$$

表示时,方程(26)成为恒等式. 方程(25)变为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\beta} (A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta})]_{;\nu} = 0. \quad (28)$$

取 $\mu = 0$, (28)式为

$$\partial_\sigma [\sqrt{-g} g^{11} (g^{00} \dot{A}_0 + g^{03} \dot{A}_3)] + \partial_\theta [\sqrt{-g} g^{22} (g^{00} A_{0,2} + g^{03} A_{3,2})] = 0. \quad (29)$$

取 $\mu = 3$, 有

$$\partial_\sigma [\sqrt{-g} g^{11} (g^{30} \dot{A}_0 + g^{33} \dot{A}_3)] + \partial_\theta [\sqrt{-g} g^{22} (g^{30} A_{0,2} + g^{33} A_{3,2})] = 0. \quad (30)$$

把(18)式代入,(29)和(30)式分别写为

$$\begin{aligned} & \Delta(-\dot{\gamma}q + \dot{p})\dot{A}_0 - \Delta\dot{\gamma}\dot{A}_3 + \Delta[(1-\gamma)q + p]\ddot{A}_0 + \Delta(1-\gamma)\ddot{A}_3 \\ & + \left[\frac{q_2}{2q} ((1-\gamma)q + p) - r_2 q + (1-\gamma)q_2 \right] A_{0,2} \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{(1-\gamma)q_2}{2q} - \gamma_2 \right] A_{3,2} + [(1-\gamma)q + p] A_{0,22} + (1-\gamma) A_{3,22} = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & -\Delta \dot{\gamma} \dot{A}_0 - \frac{\Delta \dot{\gamma}}{q} \dot{A}_3 + \Delta(1-\gamma) \ddot{A}_0 - \frac{\Delta \gamma}{q} \ddot{A}_3 + \left[\frac{(1-\gamma)q_2}{2q} - \gamma_2 \right] A_{0,2} \\ & + \left(\frac{\gamma q_2}{2q^2} - \frac{\gamma_2}{q} \right) A_{3,2} + (1-\gamma) A_{0,22} - \frac{\gamma}{q} A_{3,22} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

上式中 γ, q, p 是待求的度规系数. 在度规系数未知的情况下, 求解此方程当然是不可能的. 但我们可以利用本文第二部分讨论中所提供的一些线索, 使上述方程的形式大为简化, 并成功地给出了 A_0 和 A_3 的形式解.

由 (22) 式, 方程 (31) 和 (32) 变为

$$\begin{aligned} & \Delta \dot{p} \dot{A}_0 + \Delta p \ddot{A}_0 + \left[\frac{pq_2}{2q} - (1-\gamma)q_2 \right] A_{0,2} \\ & + \left[\gamma_2 q_2 - \frac{(1-\gamma)q_2^2}{2q} - (1-\gamma)q_{22} \right] A_0 + p A_{0,22} = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Delta \ddot{A}_0 + \frac{(1+2\gamma)q_2}{2q} A_{0,2} + \left(\frac{\gamma_2 q_2}{q} - \frac{\gamma q_2^2}{2q^2} + \frac{\gamma q_{22}}{q} \right) A_0 + A_{0,22} = 0. \quad (34)$$

把 (34) 式两边乘以 p 后减去 (33) 式, 并注意到 $\Delta_2 = (1-\gamma)q_2 + (p-q)\gamma_2 = 0$, 可得到

$$pq \dot{A}_0 - q_2 A_{0,2} + \left(\frac{q_2^2}{2q} - q_{22} \right) A_0 = 0. \quad (35)$$

考虑到

$$\dot{A}_0 = A_{0,p} \dot{p}, \quad A_{0,2} = A_{0,q} q_2,$$

(35) 式可写为

$$p^2 A_{0,p} - \left(\frac{q_2^2}{q} \right) A_{0,q} - \left(\frac{q_{22}}{q} - \frac{q_2^2}{2q^2} \right) A_0 = 0. \quad (36)$$

把 (24) 式代入, 可得关于 $\omega(p)$ 的方程为

$$\frac{d}{dp} \omega - \phi \omega = 0, \quad (37)$$

其中

$$\phi = \frac{1}{p^2(p-q)} \left[\left(\dot{p}^2 + \frac{q_2^2}{q} \right) + \left(\frac{q_{22}}{q} - \frac{q_2^2}{2q^2} \right) (p-q) \right]. \quad (38)$$

由于 ω 只是 p 的函数, 由 (37) 式可看出, ϕ 也应只是 p 的函数. 于是应有

$$\dot{p}^2 + \frac{q_2^2}{q} = c(p-q). \quad (39)$$

因左边没有 p 和 q 乘积的项, 一种最简单的情况可设 c 是一个常数. 欲 (39) 式成立, 应有

$$\dot{p}^2 = cp + n, \quad (40)$$

$$q_2^2 = -cq^2 - nq, \quad (41)$$

式中 c 和 n 是任意常数. 代回 (38) 式, 得

$$\phi = -\frac{1}{2(p-d)}, \quad (42)$$

其中已记 $n/c = -d$.

把(42)式代入(37)式,并积分,得

$$\omega = h(p-d)^{\frac{1}{2}}, \quad (43)$$

式中 h 为积分常数. 将此结果代回(24)和(22)式,可得

$$A_0 = \frac{h\sqrt{p-d}}{p-q}, \quad A_3 = \frac{-hq\sqrt{p-d}}{p-q}. \quad (44)$$

可以验证,这确实是 Maxwell 方程的解.

进而可求出

$$\begin{aligned} F_{20} &= -F_{02} = 2h \frac{\sqrt{q(d-q)(p-d)}}{(p-q)^2}, \\ F_{31} &= -F_{13} = -h \frac{q(p+q-2d)}{(p-q)^2}, \\ F_{10} &= -F_{01} = -h \frac{(p+q-2d)}{(p-q)^2}, \\ F_{32} &= -F_{23} = 2h \frac{p\sqrt{q(d-q)(p-d)}}{(p-q)^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

并写出电磁场能动张量的二个分量为

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\frac{h^2 a^2}{2\Sigma^3} [\gamma(p-q) + 2q], \\ T_{03} &= \frac{h^2 a^2 q}{2\Sigma^3} [(1+\gamma)p + (1-\gamma)q]. \end{aligned} \quad (46)$$

四

现在,我们可以求解 Einstein-Maxwell 方程

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (47)$$

把求得的关系代入方程

$$qR_{00} + R_{03} = \kappa(qT_{00} + T_{03}), \quad (48)$$

得

$$\begin{aligned} p \left[\frac{2}{f} \left(f\dot{p} - \frac{\kappa h^2}{2} \right) q^2 - 2qq_{22} + q_2^2 \right] - 2q^2 \dot{p}^2 \\ - q \left[\frac{2}{f} \left(f\dot{p} - \frac{\kappa h^2}{2} \right) q^2 + 3q_2^2 - 2qq_{22} \right] = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

把(40)和(41)式代入上式得

$$\frac{f\sqrt{cp+n} - \frac{\kappa h^2}{2}}{f} = \frac{c}{2}. \quad (50)$$

由(40)式得出

$$p = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{c}{2} \sigma \right)^2 - n \right], \quad (51)$$

由(41)式得

$$q = d \sin^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} \theta \right), \quad (52)$$

代入(50)式,可求出

$$f = u(p - d)^{1/2} - \frac{\kappa h^2}{c}. \quad (53)$$

这样就得到了场方程的解.

若令常数为

$$c = 4, \quad n = -4a, \quad u = \frac{m}{a^{1/2}}, \quad h = -\frac{e}{a^{1/2}}, \quad (54)$$

并定义

$$r = \sqrt{a} \sigma,$$

则

$$q = a \sin^2 \theta, \quad p = \frac{1}{a} (r^2 + a^2),$$

$$f = \frac{mr}{a} - \frac{\kappa e^2}{4a},$$

$$\gamma = 1 - \frac{2f}{p - q} = 1 - \frac{2mr - \frac{\kappa e^2}{2}}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (55)$$

上式代入线元的表达式(4),最后得到用 Boyer-Linquist 坐标表示的 Kerr-Newman 度规:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - \frac{2mr - \frac{\kappa e^2}{2}}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - 2mr + \frac{\kappa e^2}{2}} dr^2 \\ & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{\left(2mr - \frac{\kappa e^2}{2} \right) a^2 \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\varphi^2 \\ & + 2 \frac{\left(2mr - \frac{\kappa e^2}{2} \right) a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi. \end{aligned} \quad (56)$$

而相应的电磁场为

$$A_0 = -\frac{er}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad A_3 = \frac{e r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (57)$$

本文的一些问题得到了金百顺老师的帮助,与数学系王鸣同志进行了有益的讨论. 作者谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **11** (1963), 237.
- [2] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Prakash and R. Torrence, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 918.
- [3] A. H. Klotz, *General Relativity and Gravitation*, **14** (1982), 727.
- [4] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, Exact solutions of Einstein's field equations.

A DIRECT DERIVATION OF THE KERR-NEWMAN METRIC

GUI YUAN-XING ZHANG JI-GUANG ZHANG YANG CHEN FANG-PEI

(Department of Physics, Dalian Institute of Technology)

ABSTRACT

A direct derivation of the Kerr-Newman metric and corresponding electromagnetic field from Einstein-Maxwell equation by elementary methods is given in this paper.