

强迫布鲁塞尔振子奇异吸引子的 柯尔莫哥洛夫容量和 李雅普诺夫维数

王 光 瑞
(北京 8009 信箱)

陈 式 刚
(中国科学院物理研究所)

郝 柏 林
(中国科学院理论物理研究所)

1983年8月8日收到

提 要

本文用周期采样降低吸引子维数的办法, 计算和讨论了强迫布鲁塞尔振子的几种典型吸引子的柯尔莫哥洛夫容量 d_c 和李雅普诺夫维数 d_L . 结果表明, 人们关于 d_c 和 d_L 关系的推测是正确的. 这些推测是: 当最大李雅普诺夫指数 $\lambda_1 > 0$ 时 $d_c = d_L$ 关系成立, 当 $\lambda_1 = 0$ 时 $d_c = d_L$ 关系不一定成立. 文中指出和论证了强迫布鲁塞尔振子的 Runge-Kutta 差分方程使上述算法给出的 d_c 不收敛的原因和克服办法. 文中还指出: 可能是类似的微分方程的差分化的原因, 使得用单个观察量的时间系列来计算容量的办法遇到了发散困难.

一、引 言

呈现混沌行为的耗散动力系统, 其相空间轨迹的集合形成一个奇异吸引子. 它的柯尔莫哥洛夫容量 d_c (在一般情况下, d_c 等于 Hausdorff 维数 d_H) 是低于相空间维数 n 的分数. 如用边长为 ϵ 的 n 维小格子来覆盖吸引子, 并设 N_ϵ 为含有轨迹的格子数目, 则 d_c 的定义为

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln N_\epsilon / \ln(1/\epsilon). \quad (1)$$

d_c 等于分数是混沌运动的表征之一. 直接用(1)式来计算 d_c 会遇到较多的困难^[1-4], 且当 $d_c > 2$ 时, (1)式收敛很慢^[5], 因而不是不现实的.

与维数有关的描述混沌运动的另一组特征量是李雅普诺夫指数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_i > 0$ 表征运动在相空间某一方向是不稳定的. 因此 Kaplan-Yorke 定义了下面的维数^[6]:

$$d_{KY} = j + \left(\sum_{i=1}^j \lambda_i \right) / (-\lambda_{j+1}) \quad (2)$$

并推测 $d_c = d_{KY}$, 这里设 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \cdots > \lambda_n, j$ 是使 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j > 0$ 的最

大整数. Mori 则建议了另一个公式^[7]

$$d_M = n^0 + n^+[1 + |\langle \lambda_i^+ \rangle / \langle \lambda_i^- \rangle|]. \quad (3)$$

其中 n^0 是等于零的 λ_i 的个数, n^+ 是大于零的 λ_i 的个数, $\langle \lambda_i^+ \rangle$ 是 $\lambda_i \geq 0$ 的 λ_i 的平均值. 当 $n > 2$ 时, (2) 与 (3) 式一般是不同的. 李雅普诺夫指数随着轨迹的延伸很快地收敛, 是一组容易计算的量, (2) 和 (3) 式较之 (1) 式要容易计算得多. 因此人们推测了它们之间可能存在的关系. 文献[1]对不同的系统分别用 (1) 和 (2) 式作了计算, 结果表明在误差范围内 $d_C = d_{KY}$.

本文作者曾对强迫布鲁塞尔振子作过详细的研究^[8-13]. 这个模型的方便之处是可以利用线性振子的周期或其倍数来进行采样^[10]. 下节将要证明, 用这个办法可以把计算容量时所需的集合的维数降低 1, 因而把 $2 < d_C < 3$ 的问题变为 $1 < d_C < 2$ 的问题, 避免了文献[5]中提到的困难. 本文将在这个模型中计算它的容量和李雅普诺夫指数, 并比较 d_C , d_{KY} 和 d_M . 不同于人们过去研究过的 Lorenz 模型和 Rössler 模型, 强迫布鲁塞尔振子在相空间的收缩率是不均匀的. 因而提出了局部维数与整体维数是否相同的问题. 考虑到文献[4]中提出的一维映像中不同临界点处奇异吸引子的 Hausdorff 维数的差别, 本文也计算了强迫布鲁塞尔振子的几个不同临界点处奇异吸引子的维数.

在我们的容量计算中, 也出现了类似于文献[5]中提到的不收敛现象. 我们在文献[14]中所作的分析表明这是微分方程的差分化所引起的. 本文将对有关的具体情况作进一步的分析.

此外本文也讨论了容量计算中出现的其他困难.

二、方程与计算方法

强迫布鲁塞尔振子

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha \cos \omega t, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y. \end{aligned} \quad (4)$$

在二维相空间 (X, Y) 中的轨迹可以是相交的. 为了明确地定义维数, 要通过另一维空间把轨迹拉开, 就是说要把它镶嵌到高维空间中去. 在方程的形式上就是要把它写成自治的. 可以用不同的方式把 (4) 式写成自治形式, 它们对应不同的镶嵌方法. 有利于我们讨论的最简单的自治形式是

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha \cos \phi, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y, \\ \dot{\phi} &= \omega. \end{aligned} \quad (5)$$

ϕ 的定义域为 $(0, 2\pi)$, 并视 0 和 2π 为同一点. 在不同维数空间中的各种镶嵌相当于不同的拓扑变换, 它们不会改变奇异吸引子的维数.

李雅普诺夫指数为由线性化方程:

$$\begin{aligned} (\delta X)^0 &= -(B + 1)\delta X + 2XY\delta X + X^2\delta Y - \alpha \sin \phi \delta \phi, \\ (\delta Y)^0 &= B\delta X - 2XY\delta X - X^2\delta Y, \\ (\delta \phi)^0 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

描述的 $(\delta X, \delta Y, \delta \phi)$ 的变化率. $\delta \phi$ 的变化与 $\delta X, \delta Y$ 无关, 其相应的李雅普诺夫指数 $\lambda_\phi = 0$. δX 和 δY 的变化率是相关的, 通常把它分解为最大增殖方向的变化率与与它垂直方向的变化率 λ_1, λ_2 . 显然 λ_1, λ_2 完全由 X, Y 空间的方程(4)决定, 与镶嵌的空间无关.

ϕ 自由度引进一个新的空间维, 它对容量的贡献为 1. 按(2)和(3)式, $\lambda_\phi = 0$ 也贡献维数 1. 所以无论从(1), (2)或(3)式看来, 都可以认为 ϕ 自由度是已知的, 可从计算中分离出去, 不予考虑. 余下的问题是要计算 $\phi = \text{常数}$ 平面上的点集的容量和 X, Y 方向上的李雅普诺夫指数 λ_1, λ_2 . 这样算得的容量与李雅普诺夫指数是强迫振子所固有的, 与镶嵌方式无关的拓扑不变量.

数值计算将采用文献[8—13]中给出的 (X, Y, u, v) 四变量的自治形式:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha u, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y, \\ \dot{u} &= -\omega v, \quad \dot{v} = \omega u\end{aligned}\quad (7)$$

来进行. 它以差分计算代替了余弦计算, 可以减少许多计算量. 差分计算采用四阶 Runge-Kutta 方法. 时间步长由公式

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} / 2^m \quad m = \text{整数} \quad (8)$$

给出.

在容量的计算中, 我们利用吸引子的 XY 平面上的采样图. 对欲求其容量的点集的区域划出一矩形框, 并把它等分成 640×640 个格子. 在解差分方程的过程中, 每当一个格子中落入一个采样点时就给格子标以记号, 表明这个格子包含有点集元素. 在足够长的时间后(下面将用周期数 $N_T = t/\text{周期}$ 来表示时间), 统计含有点集元素的格子数 N_ϵ . 与它相应的 ϵ 可取为 $1/640$. 然后逐次地把相邻的 2×2 个格子合并, 统计相应的 N_ϵ . 最后得到与 $\epsilon = 1/640, 1/320, 1/160, 1/80, 1/40, 1/20, 1/10$ 相应的 7 个 N_ϵ 值. 根据(1)式, $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 直线的斜率给出所需的 d_c .

在计算中我们发现, 当计算时间 N_T 超过某一数值时, $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 会由一直线变为向上翘的曲线, 而且随时间的延长会翘得愈来愈高. 在文献[14]中我们已证明线性振子 u, v 的 Runge-Kutta 差分方程的周期不是 $2\pi/\omega$, 而是

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \left[\sin \frac{2\pi}{2^m} + \frac{1}{6} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^5 + \frac{7}{144} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^7 + \dots \right] \\ &\doteq \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{1}{120} \left(\frac{2\pi}{2^m} \right)^5 \right].\end{aligned}\quad (9)$$

其中 2^m 为一周期内的步数. T 与 $\frac{2\pi}{\omega}$ 在 $O\left(\left(\frac{2\pi}{2^m}\right)^5\right)$ 上有差别. 这使采样平面, $\phi = \text{常数}$,

在 ϕ 方向发生移动, 偏离上面论证时 $\phi = \text{常数}$ 的要求. $\phi = \text{常数}$ 平面的移动首先使与最小 ϵ 相应的 N_ϵ 增大, 然后逐次地使 ϵ 较大的 N_ϵ 也增大, 因此出现了 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线上翘的现象. 在下节中, 我们将用计算结果来说明, 当以

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \left[\sin \frac{2\pi}{2^m} + \frac{1}{6} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^5 \right] \quad (10)$$

代替(8)式为步长,并隔 2^m 个步长取样,则不会出现 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线上翘的现象. 考虑到这个情况,在以(8)式为步长的计算中,我们就取 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 最接近直线时的 N_T 时的结果作为计算 d_c 的依据,而不重新用(10)式为步长来进行计算. Runge-Kutta 差分方程还引入了一个阻尼因子,它使线性振子的振幅不断减少,使本来只分布在 (X, Y, u, v) 四维空间中三维柱面上的轨迹弥散到柱体内部. 但在我们讨论的情况下,周期移动的影响比阻尼的影响大,后者的影响可以忽略不计. 一般说来,如果我们不详细考虑差分方程具体形式所产生的影响,那么克服不收敛困难的唯一办法是: 如果所要计算的时间愈长,所用的步长就要愈小,才能使差分方程的长时间行为接近于微分方程.

李雅普诺夫指数的计算采用文献[15]描述的办法. 最大 λ 为

$$\lambda_1 = \lambda(e^1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \frac{[\delta X((j+1)\Delta t)]^2 + [\delta Y((j+1)\Delta t)]^2}{[\delta X(j\Delta t)]^2 + [\delta Y(j\Delta t)]^2}. \quad (11)$$

二维体积的变化率为

$$\lambda(e^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \times \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|\delta X_1((j+1)\Delta t)\delta Y_2((j+1)\Delta t) - \delta Y_1((j+1)\Delta t)\delta X_2((j+1)\Delta t)|}{|\delta X_1(j\Delta t)\delta Y_2(j\Delta t) - \delta Y_1(j\Delta t)\delta X_2(j\Delta t)|} \quad (12)$$

其中 $(\delta X_1, \delta Y_1), (\delta X_2, \delta Y_2)$ 为互相垂直的矢量. $\lambda(e^2)$ 是 λ_1, λ_2 之和,所以有

$$\lambda_2 = \lambda(e^2) - \lambda(e^1). \quad (13)$$

在我们计算过的情况中都有 $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ 的关系,这时(2)和(3)式是确定的,并且给出相同的结果

$$d_L = d_{KY} = d_M = 1 + \lambda_1 / -\lambda_2. \quad (14)$$

仿照文献[15],我们把它称为李雅普诺夫维数. 如把 ϕ 方向的维数也考虑进去,还应该加 1,记为

$$d_L(XY\phi) = 2 + \lambda_1 / -\lambda_2. \quad (15)$$

我们所用的计算机精度是 10 进制 14 位.

三、计算结果

为了对尽可能多的不同类型的吸引子比较(1)与(14)式,我们仿照文献[4]讨论了三种不同类型临界点处的吸引子和混沌运动吸引子的容量和李雅普诺夫维数. 它们是 $B = 1.2, \alpha = 0.05$ 的 $A-\omega$ 平面上的 $1P-2P$ (P 表周期)临界点 $A = 0.4, \omega = 0.398205$; $2^m P$ ($n \rightarrow \infty$) 临界点 $A = 0.4, \omega = 0.78773629$; $3P$ 前的切分叉临界点 $A = 0.36999, \omega = 0.75$; 和一带区内混沌运动点 $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.08, \omega = 0.852$. 这里给出的临界点的位置不很准确. 但是,根据文献[4], $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线的斜率在大标度上对参数具有连续性,可以 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线上较大线性区间的斜率作为临界点的维数.

$1P-2P$ 临界点 $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.05, \omega = 0.398205$ 的采样图及计算维数时所用的方框如图 1 所示. 为了补救 ϵ 个数的不足,分别采用了不同的方框 1, 2, 3 来覆盖图形的不同部分,其中 1, 2, 都包含极限点. 一周期内的计算步数采用 $2^m = 512$. 图 2

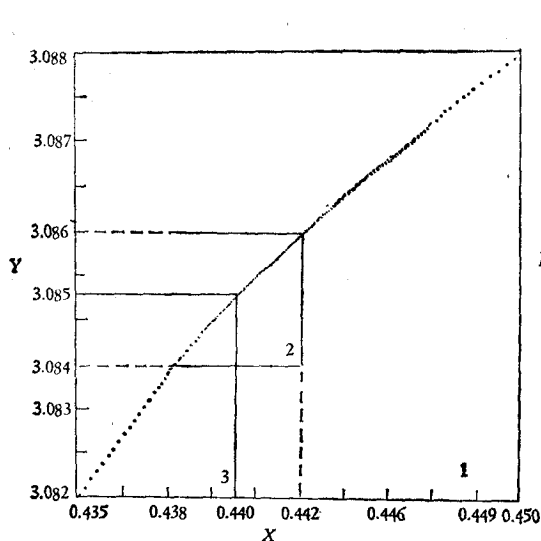
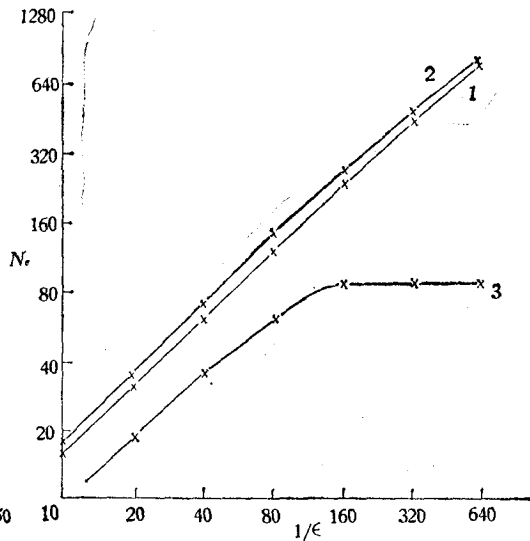


图1 1P-2P 临界点处的采样图及计算维数的方框

图2 与图1方框相应的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线
(图中为双对数坐标轴)

- 1——按图1中方框1计算的,算至 $N_T = 20000$;
2——按图1中方框2计算的,算至 $N_T = 8000$;
3——按图1中方框3计算的,算至 $N_T = 5000$

给出与图1方框相对应的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线。曲线3表明所取的格子已足够小,以致已能识别它所覆盖的点集的维数 $d_c \rightarrow 0$ 。除3以外,与它有重叠部分的包含极限点在内的方框都测得 $d_c \approx 1$ 。这个计算做到 $N_T = 20000$, 算得 $d_c = 0.96$, $\lambda_1 = -0.65 \times 10^{-4} \approx 0$, $\lambda_2 = -0.399$ 。从 $d-t$ 的变化趋势可得 $d_c = 1$, 这与用 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ 算得的 d_L 一致。一维映象 1P-2P 临界点吸引子的维数为 $2/3$ (文献[17]称其为运算维数)。不过,如果 $d_c = 1$ 确实反映了吸引子结构、点集还应具有垂直方向的结构。在下一节中我们将讨论计算结果中可能存在的不确定性。

$2^*P(n \rightarrow \infty)$ 临界点 $A = 0.4$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 0.78773634$ 的采样图及计算方框如图3所示。为了找到临界点的位置,采用 ω 对 λ 插值的办法。例如,算到 $N_T = 3000$ 有

$$\begin{aligned} \omega &= 0.78773626 \text{ 时,} \\ \lambda_1 &= -0.357 \times 10^{-4}, \\ \omega &= 0.7877365 \text{ 时,} \\ \lambda_1 &= 0.7083 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

取覆盖整个采样图的方框,得如图4曲线1所示的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线。由于 λ_1 和 N_T 的差别(N_T 分别为 3000 和 10000),这两条曲线不完全重合。但在 $\epsilon = 1/40, 1/80, 1/160$ 三个点上完全重合,且成一直线,它给出 $d_c = 0.64$ 。为了改进结果,在上两个 ω 值的基础上插值寻找 $\lambda_1 = 0$ 的点,同时把方框缩小为图3中的2。在 $N_T = 12000$ 时得图4曲线所示的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线及下述结果。这个值接近一维映象的结果^[3]:

$$d_c = 0.538,$$

而与(14)式的

$$d_L = 1$$

不同.

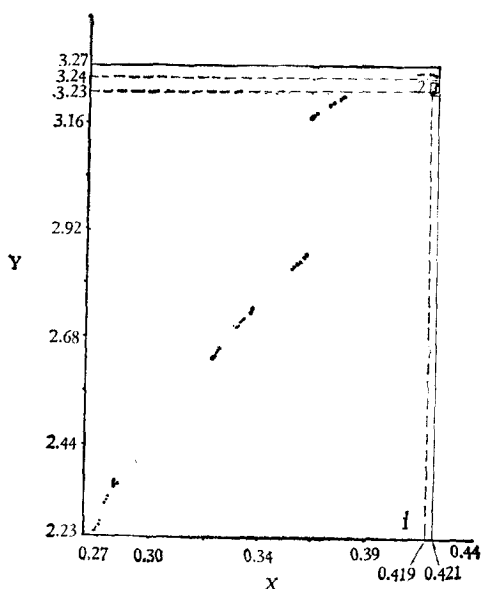


图 3

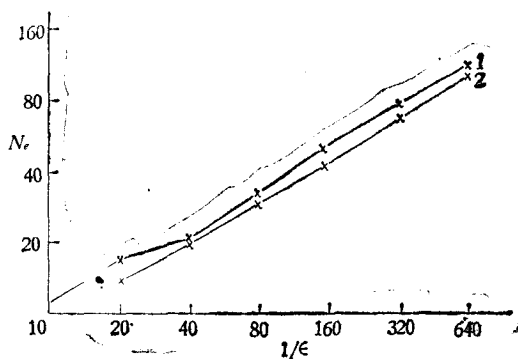


图 4

1— $\omega = 0.78773626$ 和 0.7877365 时的 $\ln N_r - \ln(1/\epsilon)$ 曲线, 这两条线只是在 $\epsilon = 1/640$ 处不重合, 它们的 $\ln N_r$ 分别为 114 和 115;

2— $\omega = 0.78773629$ 和 0.78773634 时的 $\ln N_r - \ln(1/\epsilon)$ 曲线, 这两条线只是在 $\epsilon = 1/640$ 处不重合, 它们的 $\ln N_r$ 分别为 108 和 109

(图中为双对数坐标轴)

三周期切分叉临界点 $A = 0.37$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 0.75$ 的采样图如图 5 所示. 图 5 中三团密集的点集之间存在一种映象关系, 而聚点的邻域之间的映象是线性映象. 因此这三个点集具有相同的维数. 计算采用图 5 中所示的方框. 图 6 给出 $\ln N_r - \ln(1/\epsilon)$ 曲线随 N_r 的变化情况. $\epsilon = 1/40, 1/80, 1/160$, 三个点的直线性最好, 它们给出的斜率随 N_r 的变化关系为

$$1 - d_c \propto N_r^{-0.6},$$

所以 $d_c = 1$. 这个结果与(14)式的 $d_L = 1$ 一致. 这个计算存在与 $1P-2P$ 临界点同样的问题, 一并在后面讨论.

$A = 0.4$, $B = 1.2$, $\alpha = 0.08$, $\omega = 0.852$ 处混沌运动的采样图如图 7 所示, 方框 1 包含了全部采样点. 与前面不同, 本计算采用步数 $2^m = 256$. 文献 [14] 给出 $\ln N_r - \ln(1/\epsilon)$ 曲线随 N_r 的变化情况. 其中以 $N_r = 62400$ 的曲线为最直, 它给出 $d_c = 1.185 \pm 0.006$ (误差按文献 [4] 中定义计算). 如果延长计算时间, $\ln N_r - \ln(1/\epsilon)$ 又偏离线性关系, $\ln(1/\epsilon)$ 大的地方往上翘. 上节与文献 [14] 已经指出, 这是由线性振子的微分方程的周期不等于差分方程的周期引起的. 用(10)式所作的估计证明了这一点: 当 $2^m = 256$ 时, $\Delta T/T = 0.3 \times 10^{-8}$, 经过 10^5 周期发生的位移约为 $10^5 \times 0.3 \times 10^{-8} \times 2\pi \approx 0.002$,

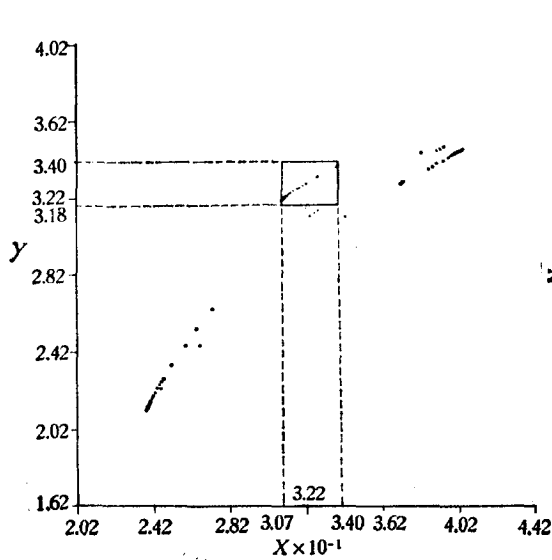


图 5

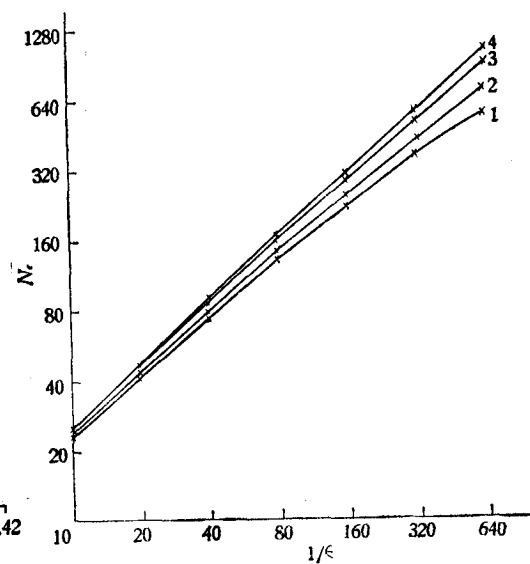


图 6

1, 2, 3, 4 分别表示 N_T 等于
18600, 31000, 51000, 62400

(图中为双对数坐标轴)

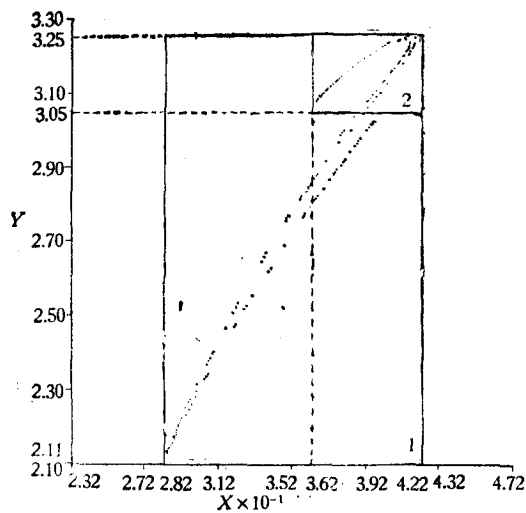


图 7

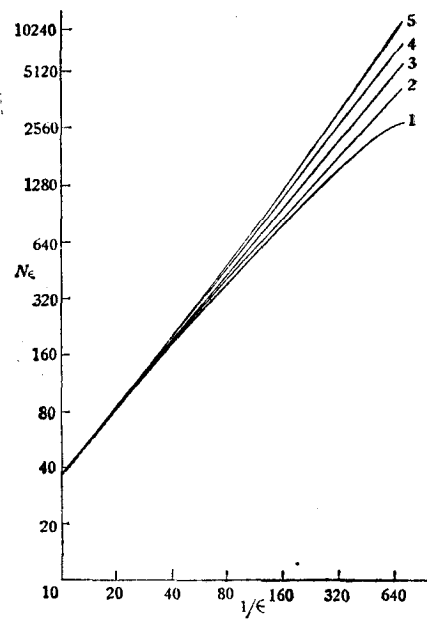


图 8

1, 2, 3, 4, 5 分别表示 N_T 等于
15600, 31200, 62400, 93600, 124800

(图中为双对数坐标轴)

它使点集越出 $\epsilon = 1/640 \approx 0.002$ 的格子, 所以 $\epsilon = 1/640$ 处首先发生明显的上翘现象. 为了进一步搞清这个问题, 我们又作了如下的计算^[4]. 首先用大步长 ($2^m = 128$) 重

复上述计算,发现 $N_T = 30000$ 时 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线已经上翘. 这时 $\epsilon = 1/40, 1/80, 1/160$ 三个点给出 $d_C = 1.222$. 然后改用 (10) 式 (仍取 $2^m = 128$) 来作这个计算,一直算到 $N_T = 70000$, $\epsilon = 1/640$ 的点仍然偏低. 这时 $\epsilon = 1/40, 1/80, 1/160, 1/320$ 四个点给出 $d_C = 1.177 \pm 0.005$. 根据李雅普诺夫指数 $\lambda_1 = 0.043, \lambda_2 = -0.286$, 算得 $d_L = 1.15$. 下节将要论证. 对于这里讨论的混沌运动, $d_C = d_L$. 此外,我们还计算了图 7 中小方框 2 包围的点集的维数,得到图 8 所示的曲线. 取图中 ϵ 小的区域为最直的一条线 3 ($N_T = 62400$) 来计算维数,得 $d_C = 1.214 \pm 0.038$. 在误差范围内它与整个点集的维数一致.

四、讨 论

人们曾经推测^[16]: 对于典型的混沌运动,柯尔莫哥洛夫容量等于 Hausdorff 维数,并且也等于李雅普诺夫维数 $d_C = d_H = d_L$. 对于 $\lambda_1 = 0$ 的情况, $d_C = d_H$ 不一定等于 d_L , 本文的计算是这个推测的例证.

这一节中,我们进一步讨论计算中遇到的困难和计算结果解释中的不确定性. 对于 $\lambda_1 = 0$ 并且具有有限聚点的吸引子,可能会遇到 $\epsilon \rightarrow 0$ 和 $N_T \rightarrow \infty$ 两个极限的先后和格子与方框的相对大小问题. $1P-2P$ 临界点和切分叉临界点就属于这种情况. 理想的计算条件是先让 $N_T \rightarrow \infty$, 然后让 $\epsilon \rightarrow 0$. 如果 $N_T \rightarrow \infty$, 而让 ϵ 由 1 变到 0, $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线的斜率也会由 1 变到 0, 就像图 2 中曲线 3 所示的那样. 这就产生了取哪一段斜率才能正确反映点集维数的问题. 实际计算中 $N_T \rightarrow \infty$, 所以也不能让 $\epsilon \rightarrow 0$. 反之,如果格子太大,总是测得 $d_C = 1$. 所以,如果在固定方框的情况下,不能让 N_T 充分地大和 ϵ 充分地小,就不能准确地测得维数. 由于计算机容量和采样图精度的限制,我们还不能准确地判断 $1P-2P$ 临界点和切分叉临界点 $d_C \simeq 1$ 的结果只是大标度现象或是由点集的垂直方向结构引起的.

关于 $2^n P(n \rightarrow \infty)$ 临界点,格子位置的移动会引起 d_C 较大的涨落. 前节用两种不同的方框分别得到 $d_C = 0.640$ 和 $d_C = 0.536$ 两个结果就说明了这一点. 如把大方框沿 X, Y 方向都移动 $1/2, 1/640$, 则测得 $d_C = 0.57$. 所以较可靠的估计是 $0.536 \leq d \leq 0.64$. 但是,可以肯定地说 $d_C \neq 1$, 所以 $d_C \neq d_L$.

对于混沌运动,看来上述两方面的问题对计算不会有太大的影响. 但是,由于我们在这个计算中所用的步长较大,因而出现了上面提到过的差分方程与微分方程的差别问题. 采用步长(10)式可使差分计算自洽化,但还存在差分方程到微分方程的收敛问题. 从上节给出的 $2^m = 128$ 和 256 时 d_C 的差别,可以期望 $2^m = 512$ 时会有 $d_C = d_L = 1.15$. 文献[14]中的估计也表明,当 $2^m = 512$ 时,算至 $N_T = 10^5$ 不会出现上翘现象.

参 考 文 献

- [1] D. A. Russel, J. D. Hanson and E. Ott, *Phys Rev. Lett.*, **45** (1980), 1175.
- [2] H. Froehling, J. P. Crutchfield, D. Farmer, N. H. Packard and R. Shaw, *Physica*, **3D** (1981), 605.
- [3] P. Grassberger, *J. Stat. Phys.*, **26** (1981), 173.
- [4] 王友琴、陈式刚, *物理学报*, **33**(1984), 341.

- [5] H. S. Greenside, A. Wolf, J. Swift and T. Pignataro, *Phys. Rev. A*, **25** (1982), 3453.
- [6] J. Kaplan and J. Yorke, *Functional Differential Equations and the Approximation of Fixed Points*, Proceedings Born, gune (1978), Lecture Notes in Math. 730, H. O. Peitgen and H. O. Walther, Eds., (Springer, Berlin, New York), p. 228.
- [7] H. Mori, *Prog. Theor. Phys.*, **63** (1980), 3.
- [8] Hao B.-L., Zhang S.-Y., *Commun. Theor. Phys.*, **1** (1982), 111.
- [9] 王光瑞, 物理学报, **32**(1983), 960.
- [10] B.-L. Hao, S.-Y. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **28** (1982), 769.
- [11] B.-L. Hao, S.-Y. Zhang, *Phys. Lett.*, **87A** (1982), 267;
物理学报, **32**(1983), 198.
- [12] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 自然杂志, **6**(1983), 475; 物理学报, **32**(1983), 1139.
- [13] Chen Shi-gang, Hao Bai-lin, Wang Gang-rui, Zhang Shu-yu, paper presented to the 15 th Int. Conf. on Thermodyn and Statistical Physics, 25—29 th July, 1983, Edinburgh; Institute of Theor. Physics Preprint AS ITP-83-024.
- [14] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 物理学报, **33**(1984), 437.
- [15] I. Shimada, T. Nagashima, *Progr. Theor. Phys.*, **61** (1979), 1605.
- [16] J. D. Farnez, E. Ott, J. A. Yorke, The Dimension of Chaotic Attractors (LA-UR-82-2856).
- [17] Hu Gang, Hao Bai-lin, AS-ITP-83-021.

KOLMOGOROV CAPACITY AND LYAPUNOV DIMENSION OF STRANGE ATTRACTORS OF FORCED BRUSSELTOR

WANG GUANG-RUI

(P. O. Box 8009, Beijing, China)

CHEN SHI-GANG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

HAO BAI-LIN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, by using stroboscopic sampling method which reduces the dimension of attractors, the Kolmogorov Capacity d_c and Lyapunov dimension d_L of some typical attractors of forced Brusselator are computed. The results show that the conjectures of ref. [6, 16] about the relations between d_c and d_L are correct. We spell out these conjectures as that if the maximal Lyapunov exponent $\lambda_1 > 0$, then $d_c = d_L$; if $\lambda_1 = 0$, then there exist examples that do not satisfy $d_c = d_L$. The reasons for nonconvergence of d_c for the forced Brusselator Calculated by using the Runge-Kutta difference equations and the way to improve it are pointed out and tested numerically. We conjecture further that by the same reason of using difference equations to approach differential equations, the capacity caculated from time series of a single observable may not be convergent.