

λ 小的超导体临界温度理论 (II)

翁征宇 吴杭生

(中国科学技术大学物理系)

1983年12月8日收到

提 要

本文在有效声子谱不加限制的情况下,利用文献[1,2]的方法,从 Eliashberg 方程导出了适用于小 λ 区域的 T_c 公式.

—

从线性 Eliashberg 方程解析地推导出适用于小 λ 区域的 T_c 公式仍是一个没有解决的问题. 在文献[1]和[2]中,我们提出一个解决这个问题的方法. 这是一个叠代法,基本叠代方程是

$$\bar{\Delta}_n^{(j)} = \lambda_j \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \bar{\Delta}_m^{(j-1)} - \mu^* \theta(j-n) \sigma_{j-1} \frac{2}{2n+1}, \quad (1)$$

$$1 = \lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \bar{\Delta}_m^{(j-1)} - \mu^* \sigma_{j-1} \ln \left(\frac{2\gamma \omega_c}{\pi T_c} \right), \quad (2)$$

其中

$$C_{nm} = C_{nm}^0 - \delta_{nm}; \quad (3)$$

$$C_{nm}^0 = \frac{1}{2n+1} [\bar{\lambda}_{n-m} + \bar{\lambda}_{n+m+1}] + \delta_{nm} \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^n (1 - \bar{\lambda}_l); \quad (4)$$

$$\bar{\lambda}_l = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi l T_c)^2}. \quad (5)$$

给定 T_c 和 μ^* , 选定一个能隙函数 $\bar{\Delta}_n^{(0)}$, 用叠代法从方程 (1) 和 (2) 依次求出 $\bar{\Delta}_n^{(j)}$ 和 λ_j , $j = 1, 2, \dots$. 序列 $\{\bar{\Delta}_n^{(j)}\}$ 和 $\{\lambda_j\}$ 的极限值是 $\bar{\Delta}_n$ 和 λ . 文献[1]和[2]指出, 在小 λ 区域, 把 $\bar{\Delta}_n^{(0)}$ 取为 δ_{n0} , 只要对方程 (1) 和 (2) 做很少几次叠代, 便可以得到相当准确的结果. 我们实际上只做了三次叠代, 把 λ_3 和 $\bar{\Delta}_n^{(3)}$ 就看成是 λ 和 $\bar{\Delta}_n$.

文献[2]在 Einstein 谱 $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ 情形, 用这个方法解析地推导出一个 T_c 公式. 在小 λ 区域, 它和 Eliashberg 方程数值解能很好地符合.

本文是文献[2]的继续, 将采用同样方法, 在有效声子谱不受限制的情况下, 从 Eliashberg 方程把 T_c 公式推导出来. 如果没有说明, 本文采用的符号和文献[1]和[2]相同.

二

取 $j = 1$, 把 $\Delta_n^{(0)} = \delta_{n0}$ 代入 (2) 式, 得到定 λ_1 的方程

$$1 + \lambda_1 = \lambda_1 \Gamma_0 - \mu^* \ln \left(\frac{2\gamma \omega_c}{\pi T_c} \right), \quad (6)$$

其中

$$\Gamma_0 = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \Gamma(\omega); \quad (7)$$

$$\Gamma(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\eta_n^2}{\eta_\omega^2 + 4n^2} + \frac{\eta_n^2}{\eta_\omega^2 + 4(n+1)^2} \right]; \quad (8)$$

$$\eta_\omega = \omega / \pi T_c. \quad (9)$$

在文献[2]中我们证明了, 当 $\eta_\omega \gg 1$ 时, 在略去 $o\left(\frac{1}{\eta^2}\right)$ 的小项后,

$$\Gamma(\omega) = \ln(2\gamma \eta_\omega). \quad (10)$$

如果把 (10) 式代入 (7) 式, 则得到

$$\Gamma_0 = \ln \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \omega_{log} \right). \quad (11)$$

对 Einstein 谱 $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, 只要 T_c 足够小, 参量 $\eta_\omega = \omega_0 / \pi T_c$ 无疑比 1 大得多, 因而 (11) 式成立. 但是, 对实际谱, (11) 式的正确性便不是很显然的了. 此时 η_ω 可以从 0 到 $\omega_c / \pi T_c$ 连续取值. 因此, 不论 T_c 多么低, 只要 ω 足够小, η_ω 不再比 1 大得多, 从而 (10) 式也不再成立. 可是, 考虑 $g(\omega) \Gamma_0(\omega)$ 是按 ω^3 趋于零的, 对积分 Γ_0 的贡献主要来自 ω 大的区域. 所以, 尽管在 ω 小时, (10) 式是不正确的, 但在乘以 $g(\omega)$, 并对 ω 积分后, 得到的表示式在 T_c 足够小时仍然是对的. 这样, 我们形式上仍然可以按文献[2]的方法, 在 $\eta_\omega \gg 1$ 时, 算出 $\Gamma_0(\omega)$; 把它代入 (7) 式, 求得 Γ_0 . 由此得到的结果, 在 T_c 足够小时, 是正确的. 严格地说, 这是我们引入的工作假设, 它是否正确, 要靠用此假设导出的 T_c 公式和 Eliashberg 方程数值解是否符合验证.

把 (11) 式代入 (6) 式, 得到

$$\lambda_1 = \frac{1 + \mu^* \ln \left(\frac{2\gamma \omega_{log}}{\pi T_c} \right) + A_3 \mu^*}{\ln \left(\frac{2\gamma \omega_{log}}{\pi T_c} \right) - 1}, \quad (12)$$

其中

$$A_3 = \ln \left(\frac{\omega_c}{\omega_{log}} \right). \quad (13)$$

顺便指出, (12) 式可改写成如下形式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{log} \left(\frac{\omega_{log}}{\omega_c} \right)^{\mu^*/(\lambda_1 - \mu^*)} \exp \left(- \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1 - \mu^*} \right), \quad (14)$$

如果让 $\lambda_1 = \lambda$, (14) 式就是文献[3]得到的 T_c 公式.

用同样计算方法, 继续对方程(1)和(2)作二级迭代和三级迭代, 并让 $\lambda_3 = \lambda$, 便可得

到 T_c 公式. 此时, 将遇到和 Γ_0 相类似的量, 只是更繁些罢了. 用上述方法不难把它们算出来. 由于计算特别繁, 下面只列出最后的结果.

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \left(\frac{\omega_{\log}}{\omega_c} \right)^{\mu^*/(\lambda - \mu^*)} \exp \left(- \frac{1 + \lambda(1 + \delta)}{\lambda - \mu^*} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \delta = & A_0 + \lambda_2 A_2 + \lambda_1 \lambda_2 A_{12} + \mu^* \lambda_2 \left(A_{32} + A_{23} \frac{1 + \lambda_1(1 + A_3)}{\lambda_1 - \mu^*} \right) \\ & + \mu^* (1 - \lambda_1 A_{33}) \left(A_{31} + A_{13} \frac{1 + \lambda_1(1 + A_3)}{\lambda_1 - \mu^*} \right) \\ & - \frac{\mu^*}{\lambda} \delta \sigma_2 \frac{1 + \lambda_1(1 + A_3)}{\lambda_1 - \mu^*}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\delta \sigma_2 = \lambda_2 (A_{33} + \lambda_1 A_{21} + \mu^* A_{22}). \quad (17)$$

λ_1 的表示式由(12)式给出, 而 λ_2 的表示式是

$$\lambda_2 = \frac{1 + \mu^* \ln \left(\frac{2\gamma \omega_{\log}}{\pi T_c} \right) + A_3 \mu^*}{\ln \left(\frac{2\gamma \omega_{\log}}{\pi T_c} \right) - 1 - \delta_2}, \quad (18)$$

其中

$$\delta_2 = A_0 + \lambda_1 A_1 + \mu^* A_{31} + \frac{\mu^*}{\lambda_2} \left(\frac{1 + \lambda_1(1 + A_3)}{\lambda_1 - \mu^*} \right) (-\lambda_1 A_{33} + \lambda_2 A_{13}). \quad (19)$$

在(16), (18)和(19)式中出现的系数均与谱有关. 它们的表示式为 (为简洁起见, 引入记号 $\int dQ \equiv \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega)$)

$$A_0 = \int dQ dQ'' \frac{\omega'^2 \ln(\omega/\omega')}{\omega^2 - \omega'^2}; \quad (20)$$

$$A_1 = (1 - \ln \omega_{\log}) A_0 + \int dQ dQ' \left[\ln \omega \frac{\omega'^2 \ln \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)}{\omega^2 - \omega'^2} - \int_0^\infty dx \frac{T \left(x, \frac{\omega}{\omega'} \right)}{x(1 + x^2)} \right]; \quad (21)$$

$$A_{31} = \int dQ \left[\int_0^{\omega_c/\omega} dx \frac{T(x, 1)}{x} + \ln \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right) \cdot \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \right]; \quad (22)$$

$$A_{33} = \int dQ \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right); \quad (23)$$

$$A_{13} = A_0 - \int dQ \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right); \quad (24)$$

$$A_2 = A_1 + A_0^2 - A_0 + B_1(\omega_{\log}) + \int dQ dQ' dQ'' \int_0^\infty dx \frac{x \Sigma \left(x, \frac{\omega''}{\omega'} \right)}{(\omega/\omega')^2 + x^2}; \quad (25)$$

$$B_1(x) = \int dQ dQ' \ln \omega' \frac{\omega'^2 \ln(\omega/\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} - A_0 \ln x; \quad (26)$$

$$A_{12} = A_1 A_0 - A_1 + (1 - \ln \omega_{\log}) A_0 + (1 + A_3 - \ln \omega_c) (A_2 - A_1 - A_0^2)$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \omega_c \cdot B_1(\omega_{\log}) + B_2(\omega_{\log}) + \int dQ dQ' dQ'' \\
& \times \int_0^\infty dx \left[\frac{x \Sigma\left(x, \frac{\omega''}{\omega'}\right)}{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 + x^2} \ln \omega - \frac{T\left(x, \frac{\omega}{\omega'}\right) \cdot \Sigma\left(x, \frac{\omega''}{\omega'}\right)}{x} \right]; \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2(x) = & \ln x [(1 - \ln \omega_{\log}) A_0 - A_1] - B_1(x) \ln \omega_c \\
& + \int dQ dQ' \ln \omega' \left[\ln \omega \frac{\omega'' \ln\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)}{\omega^2 - \omega'^2} - \int_0^\infty dx \frac{T\left(x, \frac{\omega}{\omega'}\right)}{x(1+x^2)} \right]; \quad (28)
\end{aligned}$$

$$A_{22} = A_{33} \ln \omega_c - \int dQ \left[\ln \omega \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) + \int_{\omega_c/\omega}^\infty dx \frac{H\left(x, \frac{\omega}{\omega_c}\right)}{x} \right]; \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & -(1 + \ln \omega_{\log}) A_{33} + \int dQ \ln \omega \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \\
& + \int dQ dQ' \int_{\omega_c/\omega}^\infty dx \frac{\Sigma\left(x, \frac{\omega'}{\omega}\right)}{x}; \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{32} = & (A_0 - 1) A_{31} - B_2(\omega_c) + \int dQ dQ' \\
& \times \int_0^\infty dx \left[\frac{x \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 + x^2} + \frac{T\left(x, \frac{\omega}{\omega'}\right)}{x} \right] \cdot H\left(x, \frac{\omega'}{\omega_c}\right); \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} = & A_{13}(A_0 - 1) + A_0 + A_2 - A_1 - A_0^2 - B_1(\omega_c) - \int dQ dQ' \\
& \times \int_0^\infty dx \frac{x H(x, \omega'/\omega_c)}{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 + x^2}, \quad (32)
\end{aligned}$$

其中函数 $T(x, y)$, $\Sigma(x, y)$ 和 $H(x, y)$ 的定义是

$$T(x, y) = \left[y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) / 2 + x^2 + y^2 \left(x - y \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right) / x \right] / (x^2 + y^2). \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma(x, y) = & \frac{(1 + x^2 - y^2)}{(y^2 - 1 + x^2)^2 + 4x^2} \ln y + \frac{y^2(y^2 - 1 + 3x^2)}{(x^2 + 1)[(y^2 + x^2 - 1)^2 + 4x^2]} \\
& \times \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{y^2 x (y^2 - 3 + x^2) \operatorname{tg}^{-1} x}{(x^2 + 1)[(y^2 + x^2 - 1)^2 + 4x^2]} \\
& + \frac{x - y \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)}{x(1 + x^2)}; \quad (34)
\end{aligned}$$

$$H(x, y) = T(x, 1) - \theta\left(x - \frac{1}{y}\right) \frac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{x}$$

$$-\frac{1}{1+x^2}\left\{\frac{1}{4}\ln[(1-y^2x^2)^2+2y^2(1+y^2x^2)+y^4]\right. \\ \left.+\frac{x}{2}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(x+\frac{1}{y}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(x-\frac{1}{y}\right)\right]\right\}, \quad (35)$$

(15), (16), (18) 和 (12) 式就是我们得到的 T_c 方程. 给定 λ 和 μ^* 可用文献[2]说明的步骤从这组方程算出 T_c .

正如文献[2]所指出的, 只要 λ 不是十分接近 μ^* , 我们可以让 T_c 公式 (15)–(18) 和 (12) 中的 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 从而得到一个封闭的 T_c 解析公式

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \left(\frac{\omega_{\log}}{\omega_c} \right)^{\mu^*/(\lambda-\mu^*)} \exp\left(-\frac{1+\lambda(1+\delta')}{\lambda-\mu^*}\right); \quad (36)$$

其中

$$\delta' = A_0 + \lambda A_2 + \lambda^2 A_{12} + \mu^* \left[A_{31} + (A_{13} - A_{33} - \mu^* A_{22}) \frac{1+\lambda(1+A_3)}{\lambda-\mu^*} \right] \\ + \lambda \mu^* \left[A_{32} - A_{33} A_{31} + (A_{23} - A_{13} - A_{21}) \frac{1+\lambda(1+A_3)}{\lambda-\mu^*} \right]. \quad (37)$$

下面就 $g(\omega)$ 取为双 δ 函数情形, 即

$$g(\omega) = c\delta(\omega - r\omega_0) + (1-c)\delta(\omega - \omega_0). \quad (38)$$

并取 $\mu^* = 0$ 时, 将 Eliashberg 方程数值解和本文的 T_c 公式进行比较.

表 1 中列出了 $r = 0.48$, $c = 0.71$ 和 $r = 0.25$, $c = 0.1$ 时对应 $\mu^* = 0$ 的 T_c 公式系数值. 把它们代入 T_c 公式 (15)–(18) 和 (12), 按照文献[2]所述的步骤, 算得 T_c .

表 1

	A_0	A_1	A_2	A_{12}
$r = 0.48 \quad c = 0.71$	0.5357	-0.3162	-0.3978	0.1046
$r = 0.25 \quad c = 0.1$	0.5514	-0.3818	-0.4609	0.1207

表 2

$r = 0.48 \quad c = 0.71$			$T_c/\omega_{\log}$	$T_c/\omega_{\log}$
λ	λ_2	λ_1	公式	数值解
0.3036	0.3061	0.2690	0.01014	0.01008
0.3225	0.3255	0.2843	0.01238	0.01231
0.3557	0.3598	0.3109	0.01672	0.01662
0.3818	0.3869	0.3316	0.02045	0.02030
0.4289	0.4362	0.3687	0.02770	0.02740
0.5124	0.5248	0.4340	0.04165	0.04088
0.5991	0.6188	0.5016	0.05683	0.05518
0.6346	0.6578	0.5294	0.06310	0.06099
0.6745	0.7021	0.5609	0.07014	0.06740
0.7194	0.7524	0.5965	0.07802	0.07449

表 3

$r = 0.25 \quad c = 0.1$			$T_c/\omega_{\log}$	$T_c/\omega_{\log}$
λ	λ_2	λ_1	公式	数值解
0.3112	0.3140	0.2754	0.01105	0.01100
0.3419	0.3456	0.3003	0.01493	0.01485
0.3792	0.3843	0.3303	0.02021	0.02005
0.4087	0.4152	0.3540	0.02474	0.02449
0.4431	0.4514	0.3815	0.03033	0.02991
0.4835	0.4942	0.4137	0.03721	0.03654
0.5065	0.5188	0.4321	0.04124	0.04038
0.5593	0.5757	0.4745	0.05071	0.04932
0.6236	0.6459	0.5267	0.06248	0.06024
0.7032	0.7340	0.5924	0.07713	0.07358

值列在表 2 和表 3 中, 在同表中还列出了同时求得的 λ_1 和 λ_2 值. 可见 λ_2 和 λ 已很接近, 表明迭代收敛是很快. 在表中还列出了 Eliashberg 方程数值解结果, 在小 λ 区域和本文 T_c 公式算出的数值符合得很好.

更详细的数值比较在以后文章再给出.

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、翁征宇, 物理学报, 33(1984), 277.
- [2] 吴杭生、翁征宇, 物理学报, 33 (1984), 975.
- [3] 吴杭生、顾一鸣、茅德强, 物理学报, 30(1981), 1137.

THEORY OF THE CRITICAL TEMPERATURE FOR SUPERCONDUCTORS WITH SMALL λ (II)

WENG ZHENG-YU WU HANG-SHENG

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

A T_c formula valid for the region of small λ and arbitrary effective phonon spectrum is derived from the Eliashberg equation by the method used in the previous papers^[1,2].