

象面斑纹噪声相乘性的进一步探讨

刘培森 秦克诚

(北京工业学院光学工程系) (北京大学物理系)

1983年9月6日收到

提 要

本文导出了部分偏振斑纹象强度的 n 阶矩, 考察了部分偏振象面斑纹噪声相乘性的统计学论据, 并讨论了部分偏振斑纹象乘法模型的均方误差. 最后讨论了 N 个等强度照明的独立直线偏振斑纹象非相干叠加时乘法模型的有效性.

引 言

在应用数字处理技术抑制斑纹噪声的工作中, 常将象面斑纹作为相乘噪声处理. 近来, 人们开始注意到这样处理的局限性, 并对直线偏振斑纹象乘法模型的误差进行了有意义的探讨^[1,2]. 本文宗旨在于将文献[2]的结果推广到部分偏振斑纹象和 N 个独立直线偏振斑纹象非相干叠加的两种情形. 这种推广的实际意义在于:

(1) 某些散射体对光的散射过程, 常常伴随一定程度的消偏振效应, 它的作用可以归结为产生部分偏振斑纹^[3].

(2) 多个独立直线偏振斑纹象的非相干叠加是常用的抑制斑纹噪声的方法之一.

本文将讨论具有粗糙表面的透明片成像情况. 显然, 这里得到的结论不难应用到反射型散射体的情形. 为了便于讨论, 我们将具有粗糙表面的透明片看作由透射型随机散射屏 D 和具有理想平面表面的透明片 T 叠放在一起构成的复合物体(见图1). 在单色直线偏振光均匀照明下, 该物体通过透镜 O 成象在平面 P 上, 为简便起见, 我们将照明强度和成象系统横向放大率都规范化为1; 并按图1所示方式在物面和象面上选取 x, y 坐标系.

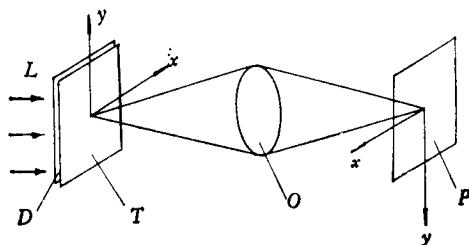


图 1

所谓象面斑纹是相乘噪声的具体意义可表为^[2]

$$I_{is}(\mathbf{r}) = \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} \cdot I_s(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中 $I_{is}(\mathbf{r})$ 为复合物体的斑纹象强度; $I_s(\mathbf{r})$ 为透明片的复振幅透射系数 $t(\mathbf{r}) = 1$ 时该复合物体对应的象面斑纹强度; $\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle$ 为 $I_s(\mathbf{r})$ 在随机散射屏系综内的平均值(我们用 $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均); $I_{inc}(\mathbf{r})$ 为透明片在强度为 1 的非相干均匀照明下所成非相干象的强度, 它可表示为

$$I_{inc}(\mathbf{r}) = |t(\mathbf{r})|^2 \otimes |h(\mathbf{r})|^2, \quad (2)$$

式中 $h(\mathbf{r})$ 表示成象系统的振幅点扩散函数, \otimes 表示卷积运算. 显然, $I_{is}(\mathbf{r})$ 与 $I_s(\mathbf{r})$ 以及同它们分别对应的复振幅都是随机过程, 而对给定点 \mathbf{r} 来说, 它们都是随机变量. 今后在只涉及随机过程一级统计的情况下, 为方便起见, 我们将有关随机过程看作随机变量, 而不再说明.

Lowenthal 和 Arsenault^[4] 在关于直线偏振斑纹象统计性质的工作中得到的重要结论

$$\langle I_{is}(\mathbf{r}) \rangle = I_{inc}(\mathbf{r}), \quad \langle I_{is}^2(\mathbf{r}) \rangle = 2I_{inc}^2(\mathbf{r}),$$

为(1)式给出的乘法模型提供了直线偏振条件下的统计学论据. 然而, 由于 $I_{is}(\mathbf{r})$ 并非高斯随机过程, 所以仅以其一阶矩和 C 阶矩为基础建立 $I_{is}(\mathbf{r})$ 的乘法模型是不够充分的. 本文将考察 $I_{is}(\mathbf{r})$ 的 n 阶矩, 进而将上述乘法模型以更充分的论据建立在斑纹象的一级统计性质的基础上.

随机散射屏在透明片表面形成的散射光场的任一直线偏振分量的复振幅可表示为

$$u_d(\mathbf{r}) = a_d(\mathbf{r})e^{i\phi_d(\mathbf{r})},$$

式中 $a_d(\mathbf{r})$ 与 $\phi_d(\mathbf{r})$ 是与随机散射屏系综对应的两个实随机过程. $u_d(\mathbf{r})$ 在任一给定点 \mathbf{r} 处都有相应的相关面元. 我们假定:

1) 不同相关面元上的 $a_d(\mathbf{r})$ 之间, $\phi_d(\mathbf{r})$ 之间, 以及 $a_d(\mathbf{r})$ 和 $\phi_d(\mathbf{r})$ 之间, 彼此统计独立; 同一相关面元上的 $a_d(\mathbf{r})$ 与 $\phi_d(\mathbf{r})$ 彼此统计独立.

2) 诸相关面元足够小(但还是大于所用相干光的波长), 成象系统点扩散函数的范围内覆盖大量相关面元, 以致可以将 $u_d(\mathbf{r})$ 的自相关函数表示为

$$\langle u_d(\mathbf{r})u_d^*(\mathbf{r}') \rangle = \lambda\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

其中 δ 表示狄拉克 δ 函数; λ 为与 \mathbf{r} 无关的非负实常数.

3) 随机变量 ϕ_d 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布.

从以上基本假设出发, 可以证明直线偏振斑纹场复振幅 u_s 和直线偏振斑纹象场复振幅 u_{is} , 不仅分别是圆对称复高斯随机变量, 而且是联合圆对称复高斯随机变量. 它们的统计性质为本文提供了讨论依据.

部分偏振斑纹象的偏振度

在图 1 所示光路中, 当随机散射屏 D 具有消偏振效应时, 根据 Goodman 的论证^[3], 相应的斑纹象应该具有在前述系综平均意义上的部分偏振态. 通常我们认为图 1 中的透明片 T 、透镜 O 和成象系统所处介质皆不改变光场的偏振态. 因此, 斑纹象的偏振态完全

由随机散射屏的散射光场决定。换言之,这个散射光场在系综平均的意义上也应该是部分偏振的,具体说来,随机散射屏在透明片入射表面形成的散射光场可分解成相互正交的两个直线偏振分量 $u_{d\perp}(\mathbf{r})$ 与 $u_{d\parallel}(\mathbf{r})$, 它们满足以下条件:

$$\langle u_{d\perp}(\mathbf{r})u_{d\parallel}^*(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_{d\perp}^*(\mathbf{r})u_{d\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3)$$

前述基本假设适用于这里的每一个直线偏振分量。根据基本假设 2), 我们进一步设

$$\langle u_{d\perp}(\mathbf{r}) \cdot u_{d\perp}^*(\mathbf{r}') \rangle = \lambda_1 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\langle u_{d\parallel}(\mathbf{r}) \cdot u_{d\parallel}^*(\mathbf{r}') \rangle = \lambda_2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (5)$$

其中 λ_1 和 λ_2 皆为非负实常数,并不失一般地假定 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 。根据基本假设 3), 可以证明

$$\langle u_{d\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_{d\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (6)$$

综合(3),(6)两式可知, $u_{d\perp}(\mathbf{r})$ 与 $u_{d\parallel}(\mathbf{r})$ 是统计不相关的两个正交直线偏振光场。另外,我们显然可以合理地认为

$$\langle u_{d\perp}(\mathbf{r})u_{d\parallel}^*(\mathbf{r}') \rangle = 0. \quad (7)$$

如果略去透明片复振幅透射系数 $t(\mathbf{r})$ 与成像系统点扩散函数 $h(\mathbf{r})$ 随入射光偏振方位的变化,则 $u_{d\perp}(\mathbf{r})$ 与 $u_{d\parallel}(\mathbf{r})$ 各自在 P 面上形成的斑纹象场复振幅分布可分别表示为

$$u_{is\perp}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{d\perp}(\mathbf{r}')t(\mathbf{r}')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (8)$$

$$u_{is\parallel}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{d\parallel}(\mathbf{r}'')t(\mathbf{r}'')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')d\mathbf{r}''. \quad (9)$$

由此得到

$$\langle u_{is\perp}(\mathbf{r})u_{is\parallel}^*(\mathbf{r}) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u_{d\perp}(\mathbf{r}')u_{d\parallel}^*(\mathbf{r}'') \rangle t(\mathbf{r}')t^*(\mathbf{r}'')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')h^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''.$$

由(7)式可知

$$\langle u_{is\perp}(\mathbf{r})u_{is\parallel}^*(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

根据(6)式还可推知

$$\langle u_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

所以,由 $u_{d\perp}$ 与 $u_{d\parallel}$ 分别形成的两个正交直线偏振斑纹象场 $u_{is\perp}$ 与 $u_{is\parallel}$ 也是统计不相关的,

若设与 $u_{is\perp}$ 和 $u_{is\parallel}$ 相应的强度分别为 $I_{is\perp}$ 与 $I_{is\parallel}$, 则部分偏振斑纹象的偏振度可定义为

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}) = \left| \frac{\langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle - \langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle}{\langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle} \right|. \quad (10)$$

因为

$$I_{is\perp}(\mathbf{r}) = u_{is\perp}(\mathbf{r}) \cdot u_{is\perp}^*(\mathbf{r}),$$

故由(8)式可得

$$\langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u_{d\perp}(\mathbf{r}')u_{d\perp}^*(\mathbf{r}'') \rangle t(\mathbf{r}')t^*(\mathbf{r}'')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')h^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''.$$

应用(4)式可将上式进一步写成

$$\langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \lambda_1 |t(\mathbf{r})|^2 \otimes |h(\mathbf{r})|^2 = \lambda_1 I_{inc}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

类似地,可以得到

$$\langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = \lambda_2 |t(\mathbf{r})|^2 \otimes |h(\mathbf{r})|^2 = \lambda_2 I_{inc}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

于是,部分偏振斑纹象的偏振度可写成

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

由于 λ_1 和 λ_2 都是与 \mathbf{r} 无关的非负实常数,故 \mathbf{r} 亦与 \mathcal{D} 无关,且有

$$0 \leq \mathcal{D} \leq 1. \quad (13)$$

另外,由于我们已将照明强度规范化为 1,故若略去能量损耗,则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad (14)$$

从而有

$$\mathcal{D} = \lambda_1 - \lambda_2. \quad (15)$$

部分偏振斑纹象强度 $I_{is}(\mathbf{r})$ 的 n 阶矩

这个 n 阶矩可表为

$$\langle I_{is}^n(\mathbf{r}) \rangle = \langle [I_{is\perp}(\mathbf{r}) + I_{is\parallel}(\mathbf{r})]^n \rangle. \quad (16)$$

这里我们指出 $I_{is\perp}(\mathbf{r})$ 与 $I_{is\parallel}(\mathbf{r})$ 是统计独立随机变量. 实际上,根据基本假设, $u_{is\perp}$ 与 $u_{is\parallel}$ 都可看作是大量独立随机变量之和. 由中心极限定理可推知 $u_{is\perp}$ 与 $u_{is\parallel}$ 都是高斯随机变量. 因此,它们之间统计不相关就意味着彼此统计独立. 从而,与 $u_{is\perp}$ 和 $u_{is\parallel}$ 分别对应的直线偏振散斑象强度 $I_{is\perp}$ 与 $I_{is\parallel}$ 也彼此统计独立. 于是,(16)式可写成

$$\begin{aligned} \langle I_{is}^n(\mathbf{r}) \rangle &= \langle I_{is\perp}^n(\mathbf{r}) \rangle + n \langle I_{is\perp}^{n-1}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!} \langle I_{is\perp}^{n-k}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{is\parallel}^k(\mathbf{r}) \rangle + \cdots + \langle I_{is\parallel}^n(\mathbf{r}) \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

应用(11),(12),(14)及(15)诸式可写出

$$\langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{D}) I_{inc}(\mathbf{r}),$$

$$\langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{D}) I_{inc}(\mathbf{r}).$$

另外,在前述基本假设前提下,利用圆对称复高斯随机变量的矩定理,可证明

$$\langle I_{is\perp}^m(\mathbf{r}) \rangle = m! \langle I_{is\perp}(\mathbf{r}) \rangle^m,$$

$$\langle I_{is\parallel}^l(\mathbf{r}) \rangle = l! \langle I_{is\parallel}(\mathbf{r}) \rangle^l,$$

式中 m 和 l 皆为正整数. 于是(17)式可进一步写成

$$\begin{aligned} \langle I_{is}^n(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{n!}{2^n} I_{inc}^n(\mathbf{r}) \{ (1 + \mathcal{D})^n + (1 + \mathcal{D})^{n-1} (1 - \mathcal{D}) + \cdots \\ &+ (1 + \mathcal{D})^{n-k} (1 - \mathcal{D})^k + \cdots + (1 - \mathcal{D})^n \}. \end{aligned}$$

最后得到部分偏振斑纹象强度 $I_{is}(\mathbf{r})$ 的 n 阶矩为

$$\langle I_{is}^n(\mathbf{r}) \rangle = n! \cdot K_n(\mathcal{D}) \cdot I_{inc}^n(\mathbf{r}), \quad (18)$$

式中

$$K_n(\mathcal{D}) = \begin{cases} \frac{(1 + \mathcal{D})^{n+1} - (1 - \mathcal{D})^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \mathcal{D}} & 0 < \mathcal{D} \leq 1; \\ \frac{n+1}{2^n} & \mathcal{D} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

由于 $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$, 故有

$$0 < K_n(\mathcal{D}) \leq 1. \quad (20)$$

$K_n(\mathcal{D})$ 曲线如图 2 所示.

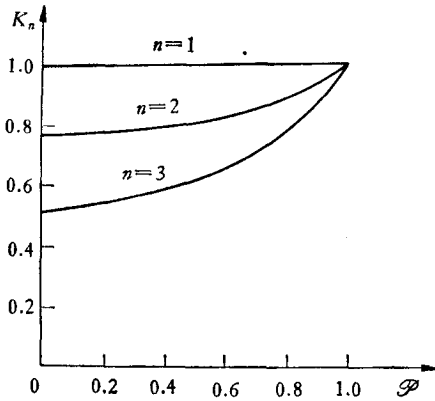


图 2

如果令 $i(\mathbf{r}) = 1$, 则上述斑纹象即成为相应的象面斑纹. 此时若将 (18) 式中的 $I_{is}(\mathbf{r})$ 与 $I_{inc}(\mathbf{r})$ 分别换为 $I_s(\mathbf{r})$ 与 $\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle$, 即可得到部分偏振斑纹强度 $I_s(\mathbf{r})$ 的 n 阶矩为

$$\langle I_s^n(\mathbf{r}) \rangle = n! K_n(\mathcal{D}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^n. \quad (21)$$

于是, (1) 式右端随机变量 $\frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r})$ 的 n 阶矩可写作

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r}) \right]^n \right\rangle &= \frac{I_{inc}^n(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^n} \langle I_s^n(\mathbf{r}) \rangle \\ &= n! K_n(\mathcal{D}) I_{inc}^n(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

可见两个随机过程 $I_{is}(\mathbf{r})$ 与 $\frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r})$ 具有相同的 n 阶矩, 亦即它们的一级统计性质相同. 这就是由 (1) 式定义的斑纹象乘法模型的统计学论据.

部分偏振斑纹象乘法模型的均方误差

我们知道, 两个随机过程的一级统计性质相同, 远不能说明它们完全等同. 实际上, 即令我们可以在一级统计的意义上将它们作为两个随机变量来处理, 除了它们各自的 n 阶矩外, 我们还应讨论它们的相关情况, 为此我们考察 (1) 式两端的两个随机变量之差的二阶矩, 亦即乘法模型的均方误差. 它可表示为

$$M_{pp}(\mathbf{r}) = \left\langle \left[I_{is}(\mathbf{r}) - \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r}) \right]^2 \right\rangle. \quad (22)$$

将上式右端展开得到

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[I_{is}(\mathbf{r}) - \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r}) \right]^2 \right\rangle \\ &= \langle I_{is}^2(\mathbf{r}) \rangle + \frac{I_{inc}^2(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^2} \langle I_s^2(\mathbf{r}) \rangle - 2 \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} \langle I_{is}(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned}$$

应用前节 n 阶矩的结果, 取 $n = 2$, 可得

$$\langle I_{is}^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{I_{inc}^2(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^2} \langle I_s^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{3 + \mathcal{D}^2}{2} I_{inc}^2(\mathbf{r}).$$

对 $\langle I_{is}(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r}) \rangle$ 我们可以写出

$$\begin{aligned} \langle I_{ts}(\mathbf{r})I_s(\mathbf{r}) \rangle &= \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r})I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned}$$

不难证明 $I_{ts\perp}(\mathbf{r})$ 与 $I_{s\parallel}(\mathbf{r})$ 统计独立, 且 $I_{ts\parallel}(\mathbf{r})$ 与 $I_{s\perp}(\mathbf{r})$ 统计独立. 从而上式可进一步写成

$$\begin{aligned} \langle I_{ts}(\mathbf{r})I_s(\mathbf{r}) \rangle &= \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r})I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle + \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

对上式中第三、四项可写出

$$\langle I_{ts\perp}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle = \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4} (1 - \mathcal{D}^2) I_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle.$$

对(23)式中第一项可写出

$$\langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_{ts\perp}(\mathbf{r})u_{s\perp}(\mathbf{r})u_{ts\perp}^*(\mathbf{r})u_{s\perp}^*(\mathbf{r}) \rangle. \quad (24)$$

前面已经指出, 在我们的基本假设前提下, $u_{ts\perp}(\mathbf{r})$ 与 $u_{s\perp}(\mathbf{r})$ 是联合圆对称复高斯随机变量. 从而可以应用高斯矩定理将(24)式写成

$$\langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle + |\langle u_{ts\perp}(\mathbf{r})u_{s\perp}^*(\mathbf{r}) \rangle|^2.$$

可以证明

$$\langle I_{ts\perp}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4} (1 + \mathcal{D}^2)^2 I_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle,$$

$$\langle u_{ts\perp}(\mathbf{r})u_{s\perp}^*(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{D}) \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}',$$

从而得到

$$\begin{aligned} \langle I_{ts\perp}(\mathbf{r})I_{s\perp}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{4} (1 + \mathcal{D}^2)^2 I_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 + \mathcal{D})^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2. \end{aligned}$$

类似地可写出

$$\begin{aligned} \langle I_{ts\parallel}(\mathbf{r})I_{s\parallel}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{4} (1 - \mathcal{D}^2)^2 I_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 - \mathcal{D})^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2. \end{aligned}$$

最后可求得部分偏振斑纹象乘法模型的均方误差为

$$M_{pp}(\mathbf{r}) = (1 + \mathcal{D}^2) I_{\text{inc}}^2(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2}{I_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'} \right]. \quad (25)$$

这里应用了一个不难证明的关系式

$$\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'.$$

N 个独立等强度照明直线偏振斑纹象非相干叠加时的情形

关于部分偏振斑纹象的讨论, 实际上涉及了两个独立直线偏振斑纹象的非相干叠加

的情况。现在考察 N 个独立直线偏振斑纹象非相干叠加时前述乘法模型的有效性。

为实现 N 个独立直线偏振斑纹象的非相干叠加,可以设想在图 1 所示光路中,用同一透明片 T 与 N 个不同的随机散射屏分别组合成象,在象面上放置照相底片,将这 N 个象依次重叠记录在同一底片上.记录过程中透明片与照相底片固定不动,只是依次独立更换随机散射屏.这样,在底片上最后得到的将是 N 个独立直线偏振斑纹象非相干叠加的结果.设第 j 个散射屏对应的斑纹象强度为 $I_{tsj}(\mathbf{r})$, $j = 1, 2, \dots, N$, 并设由非相干叠加得到的总强度为 $I_{ts}(\mathbf{r})$, 则有

$$I_{ts}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N I_{tsj}(\mathbf{r}),$$

式中诸 $I_{tsj}(\mathbf{r})$ 相互独立. 当透明片复振幅透射系数 $t(\mathbf{r}) = 1$ 时,各散射屏分别在象面 P 上产生各自的象面斑纹,设它们的强度分别为 $I_{sj}(\mathbf{r})$, $j = 1, 2, \dots, N$, 则这 N 个象面斑纹非相干叠加得到的总强度应为

$$I_s(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N I_{sj}(\mathbf{r}),$$

式中诸 $I_{sj}(\mathbf{r})$ 相互独立.

我们现在考察当 $I_{ts}(\mathbf{r})$ 与 $I_s(\mathbf{r})$ 分别由以上两式确定时,由(1)式定义的乘法模型的有效性.

为便于与前面所得结果比较,我们将单色直线偏振照明光的强度取为 $1/N$, 亦即将照明光场的振幅取为 $1/\sqrt{N}$.

我们首先指出,对于这里所考察的 $I_{ts}(\mathbf{r})$ 和 $I_s(\mathbf{r})$ 来说,同样可以分别导出它们的 n 阶矩;进而证明(1)式两端的随机过程这时仍具有相同的一级统计性质.这就构成在 N 个独立直线偏振斑纹象非相干叠加条件下合成斑纹象的乘法模型的统计学论据.对此我们不拟赘述,而直接考察该乘法模型的均方误差

$$\begin{aligned} M_{NLP}(\mathbf{r}) &= \left\langle \left[I_{ts}(\mathbf{r}) - \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} I_s(\mathbf{r}) \right]^2 \right\rangle \\ &= \langle I_{ts}^2(\mathbf{r}) \rangle + \frac{I_{inc}^2(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^2} \langle I_s^2(\mathbf{r}) \rangle - 2 \frac{I_{inc}(\mathbf{r})}{\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle} \langle I_{ts}(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned}$$

考虑到 N 个直线偏振斑纹象彼此独立,可推得

$$\langle I_{ts}^2(\mathbf{r}) \rangle = \left(1 + \frac{1}{N} \right) I_{inc}^2(\mathbf{r}),$$

$$\langle I_s^2(\mathbf{r}) \rangle = \left(1 + \frac{1}{N} \right) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle^2.$$

对于 $\langle I_{ts}(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r}) \rangle$ 我们可以写出

$$\langle I_{ts}(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \langle I_{tsj}(\mathbf{r}) I_{sj}(\mathbf{r}) \rangle + \sum_{j \neq l} \langle I_{tsj}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{sl}(\mathbf{r}) \rangle.$$

这里应用了 $I_{tsj}(\mathbf{r})$ 与 $I_{sl}(\mathbf{r})$ ($j \neq l$) 彼此独立的性质. 不难看出以下关系式是成立的:

$$\sum_{j \neq l} \langle I_{tsj}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{sl}(\mathbf{r}) \rangle = \left(1 - \frac{1}{N} \right) I_{inc}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle.$$

我们还可写出

$$\langle I_{ij}(\mathbf{r})I_{ij}(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_{ij}(\mathbf{r})u_{ij}(\mathbf{r})u_{ij}^*(\mathbf{r})u_{ij}^*(\mathbf{r}) \rangle, \quad (26)$$

式中 $u_{ij}(\mathbf{r})$ 与 $u_{ij}(\mathbf{r})$ 分别表示第 i 个随机散射屏对应的直线偏振斑纹象和纯斑纹的复振幅分布, 它们可分别表示为

$$u_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} u_d(\mathbf{r}')t(\mathbf{r}')h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}',$$

$$u_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} u_d(\mathbf{r}')h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}'.$$

考虑到 $u_{ij}(\mathbf{r})$ 与 $u_{ij}(\mathbf{r})$ 是联合圆对称复高斯随机变量, 我们可以用高斯矩定理将 (26) 式写成

$$\begin{aligned} \langle I_{ij}(\mathbf{r})I_{ij}(\mathbf{r}) \rangle &= \langle I_{ij}(\mathbf{r}) \rangle \langle I_{ij}(\mathbf{r}) \rangle + |\langle u_{ij}(\mathbf{r})u_{ij}^*(\mathbf{r}) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{N^2} I_{inc}(\mathbf{r}) \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle + \frac{1}{N^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2. \end{aligned}$$

最后可以求得

$$M_{NLP}(\mathbf{r}) = \frac{2}{N} I_{inc}^2(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2}{I_{inc}(\mathbf{r}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'} \right]. \quad (27)$$

结 论

本文导出了部分偏振斑纹象乘法模型均方误差((25)式)和 N 个等强度照明独立直线偏振斑纹象乘法模型均方误差 ((27) 式). 在 (25) 式中令 $\mathcal{D} = 1$, 或在 (27) 式中令 $N = 1$, 即可得到由文献[1,2]给出的直线偏振斑纹象乘法模型均方误差

$$M_{LP}(\mathbf{r}) = 2I_{inc}^2(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} t(\mathbf{r}') |h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' \right|^2}{I_{inc}(\mathbf{r}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'} \right]. \quad (28)$$

另外, 在(25)式中令 $\mathcal{D} = 0$, 即得到两个平均强度相同而相互独立的直线偏振斑纹象非相干叠加的情况. 这应与(27)式中 $N = 2$ 的情形相当, 结果显然是一致的.

应用 Schwarz 不等式对(25), (27), (28)三式方括弧中的分式进行讨论, 可以看到斑纹象乘法模型的局限性: 当透明片的复振幅透射系数与成象系统点扩散函数相比变化足够平缓时, 乘法模型才有相当的精度. 这个问题在文献[1,2]中已经指出, 这里无需赘述. 现在仅强调一点, 乘法模型的均方误差涉及的是透明片复振幅透射系数, 亦即透明片的位相透射因子的作用也必须考虑. 对强度透射率(即 $|t(\mathbf{r})|^2$) 变化平缓而位相透射因子变化较快的透明片来说, 斑纹象乘法模型同样会有较大误差.

对比(25), (27), (28)三式可知,

$$M_{PP}(\mathbf{r}) \leq M_{LP}(\mathbf{r}), \quad M_{NLP}(\mathbf{r}) \leq M_{LP}(\mathbf{r}).$$

这一结果显然符合直观物理概念. 实际上, 两个或多个独立直线偏振斑纹象非相干叠加

的结果,使合成斑纹象的颗粒状结构得到平滑,所成的象更接近非相干象。从而斑纹象乘法模型的误差相应减小。

参 考 文 献

- [1] M. Tur, K. C. Chin and J. W. Goodman, *Appl. Opt.* **21**(1982). 1157.
- [2] 秦克诚,物理学报, **32**(1983), 267.
- [3] J. W. Goodman, Statistical properties of laser speckle, patterns, in "Laser Speckle and Related Phenomena", ed. by J. C. Dainty, (1975), p. 9.
- [4] S. Lowenthal and H. Arsenault, *J. Opt. Soc. Amer.*, **60** (1970), 1478.

A FURTHER INVESTIGATION ON THE MULTIPLIC- ATIVITY OF IMAGE-PLANE SPECKLE NOISE

LIU PEI-SEN

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology)

QIN KE-CHENG

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, the multiplicativity of the partially polarized image-plane speckle noise is considered. After deriving the n -th order moment of the intensity of the speckled image, the multiplicative model of speckle noise is justified. The mean squared error of the model for partially polarized case is discussed. Finally, the validity of the multiplicative model for the incoherent superposition of n independent linearly polarized speckled images formed with identical illumination is treated.