第33卷 第10期　　物 理 学 报　　Vol. 33, No. 10
1984年10月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Oct., 1984

无费密子格点规范理论几种新作用量的探讨

李文铸　　董绍静
（浙江大学物理系）

1983年12月8日收到

提　　要

我们提出了几种无费密子格点规范理论的新作用量形式，证明了它们符合 Wilson 对格点作用量提出的条件，讨论了它们与几种常用的作用量间的关系。并推导了在使用新作用量时 Wilson 圈满足的 Schwinger-Dyson 方程，证实了当 $N \to \infty$ 时，E-K 模型中的 Schwinger-Dyson 方程和标准格点模型相同。

格点规范理论的发展已使普适性问题尖锐地摆在我们面前[7]。我们至少希望，在临界区域当相关长度比格点间隔大得多时，格点系统能表现出连续极限时的行为[8]，从而使可观察量对不同的作用量形式有相同的值[9]。

格点规范理论的作用量可以有很多形式。通常研究的几种形式分别为 Wilson[1]，Villain[2]，Manton[3]，Anthony[4]，Bhanot 和 Creutz[5] 提出。还有人提出修改方案[6]。我们进一步提出几种新形式，先举十个例子。

$$S_P = 2\sin\left[\left(1-\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\Big/2\right]\cdot\sin\left[\left(1+\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\Big/2\right], \tag{1}$$

$$S_P = 2\sin\left[\left(1-\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\Big/2\right]\cdot\cos\left[\left(1+\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\Big/2\right], \tag{2}$$

$$S_P = \mathrm{tg}\,1 - \mathrm{tg}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right), \tag{3}$$

$$S_P = \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right), \tag{4}$$

$$S_P = \mathrm{ch}1 - \mathrm{ch}\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right), \tag{5}$$

$$S_P = 1 - \exp\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P - 1\right), \tag{6}$$

$$S_P = \exp\left(1-\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right) - 1, \tag{7}$$

$$S_P = J_0\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right) - J_0(1), \tag{8}$$

$$S_P = \left|P_n(1) - P_n\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\right|, \tag{9}$$

$$S_P = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)^n\right|, \tag{10}$$

其中 $U_P = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4$ 为一个元格的四链有序积，求迹只取实部．J_0 为贝塞耳函数，P_n 为球函数，c_i 为不全为零的实数．欧氏空间路径积分为

$$Z = \int \Pi dU \exp\left\{-\beta \sum_P S_P\right\}. \tag{11}$$

求迹运算使局域规范不变性是显而易见的．从规范场理论出发，时空离散化后有

$$U(x, \mu) = \exp\{-igaA^a_\mu\lambda_a\}. \tag{12}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式，舍去高阶项有[1]

$$U_P = \exp\{-iga^2F^a_{\mu\nu}\lambda_a\}, \tag{13}$$

式中 a 为格点间距，λ_a 为规范群生成元，g 为耦合常数，

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - ig[A^a_\mu, A^a_\nu]. \tag{14}$$

由(13)式易得

$$\frac{1}{N}\operatorname{Tr} U_P = 1 - \frac{g^2}{4N}a^4F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + O(a^8). \tag{15}$$

令

$$D^2 = \frac{g^2}{4N}a^4F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{16}$$

则

$$\partial N/g^2 \sum_P D^2 \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{4}\int d^4xF^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{N}\operatorname{Tr} U_P = 1 - D^2 + O(D^4). \tag{18}$$

在 a 的足够高阶上，(18)式总可看成是多项式．于是

$$[1 - D^2 + O(D^4)]^n = [1 - nD^2 + O(D^4)]. \tag{19}$$

举(6)式为例，

$$\begin{aligned} S_P &= 1 - \exp\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr} U_P - 1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e}\left\{1 + [1 - D^2 + O(D^4)] + \frac{1}{2!}[1 - 2D^2 + O(D^4)] + \cdots\right\} \\ &= 1 - \frac{1}{e}\left\{\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\right] - \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\right]D^2 + \cdots\right\} \\ &= D^2 + O(D^4). \end{aligned} \tag{20}$$

令 $\beta = 2N/g^2$，由(17)式知，

$$\beta\sum_P S_P \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{4}\int d^4xF^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}. \tag{21}$$

再举(8)式为例，

$$\begin{aligned} S_P &= J_0\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr} U_P\right) - J_0(1) \\ &= -J_0(1) + \left\{\left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right]\right. \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4^2\cdot 6}-\cdots\right]D^2+O(D^4)\Big\}$$

$$=J_1(1)D^2+O(D^4). \tag{22}$$

令 $\beta=2N/(g^2J_1(1))$，由(17)式知，

$$\beta\sum_P S_P \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{4}\int d^4x F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{23}$$

从以上推演中不难看出，$\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)^n$ 中 D^2 项的系数恰与 x^n 的导数当 $x=1$ 时的值相等．于是我们可以从以上十个例子中推出一个普遍形式．

若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 区间内存在，并有任意阶有限的导数，其泰勒级数一致收敛并且 $f'(1)\neq 0$，则

$$S_P=\left|f(1)-f\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\right)\right|. \tag{24}$$

当取

$$\beta=2N/(g^2|f'(1)|) \tag{25}$$

时，可作为无费密子格点规范理论的作用量．

当 $f(x)=x$ 时，(24)式即是常用的 Wilson 作用量．$f(x)=x^{\alpha}$，$\alpha>0$ 时，(24)式即是 Anthony 用的作用量[4]．$f(x)=b_1-b_1x+b_2x^2$ 时，(24)式即是 F-A 作用量[5]，也可作为 Drouffe 等人[6] 提出的按特征标展开的二阶近似．

我们在研究 $SU(5)$ 群 Manton 作用量时已证明[10]

$$\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(\arg Z_i)^2=\frac{g^2}{4N}a^4F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\alpha}_{\mu\nu}, \tag{26}$$

其中 Z_i 为 U_P 的本征值．于是很自然可提出第二种新作用量的普遍表达式．

若 $f(x)$ 在 $[0,\pi/2]$ 区间内存在，并有任意阶有限导数，泰勒级数一致收敛并且

$$f'(0)\neq 0,$$

则

$$S_P=\left|f\left(\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(\arg Z_i)^2\right)-f(0)\right|. \tag{27}$$

当取

$$\beta=2N/(g^2|f'(0)|) \tag{28}$$

时，可作为无费密子格点规范理论的作用量．

当 $f(x)=x$ 时，(27)式即是 Manton 作用量．用(27)式讨论普适性问题时，a^8 阶上的差别就是 $f''(0)$ 的差别，特别简单明瞭．．但(27)式的计算比(24)式困难．

最近 Eguchi 和 Kawai[11] 提出了一个简化格点模型，对 Wilson 作用量证明了，当N时，若保持 $U(1)$ 局域规范不变性，则 Wilson 圈在该模型和标准模型中满足相同的 Schwinger-Dyson 方程．路径积分简化为

$$Z=\prod_{\mu}\int dU_{\mu}\exp\left\{1-\beta\sum_{\mu\neq\nu=1}^{4}\mathrm{Tr}\,U_{\mu}\cdot U_{\nu}\cdot U^{+}_{\mu}\cdot U^{+}_{\nu}\right\}. \tag{29}$$

但进一步的研究表明，Wilson 作用量不满足 $U(1)$ 局域规范不变．许多人正在试图解

决[12]. 我们提出的作用量是否也适用于 E-K 模型呢?

首先我们来推导标准格点下用 (24) 式作用量时 Wilson 圈的 Schwinger-Dyson 方程[13].

(11)式中群测度是规范不变的,当 $U \to e^{\theta\lambda}U$ 时

$$dU = d(e^{\theta\lambda}U), \tag{30}$$

其中 $\theta\lambda = \theta^{\alpha}\lambda_{\alpha}$, λ_{α} 为规范群生成元. 考虑一个 Wilson 圈 $W(c)$, 其中包含有某一给定链 U,为清楚起见写为

$$W(c) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots U \cdots \omega_M \right\rangle. \tag{31}$$

作局域规范变换 $U \to e^{\theta\lambda}U$, 由不变性有

$$\begin{aligned} W(c) = \int \Pi\, d\omega dU & \left\{ \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots (1 + \theta\lambda + (\theta\lambda)^2/2 + \cdots) U \cdots \omega_M \right\} \\ & \cdot \exp\left\{ \beta \left[\sum_P{}' f\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, U_P \right) + \sum_{\pi} \right.\right. \\ & \left.\left. \cdot f\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}(1 + \theta\lambda + (\theta\lambda)^2/2 + \cdots) UV_{\pi} + \mathrm{c.\ c.} \right]\right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\sum_P{}'$ 对不包含 U 的所有元格求和, $\sum_{\pi}$ 对与 U 相联的元格求和, UV_{π} 构成其中一个. 考虑 $(\theta\lambda)$ 的二次项可得

$$\begin{aligned} 0 = & \left\langle \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots (\theta\lambda)^2 U \cdots \omega_M \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots (\theta\lambda) U \cdots \omega_M \beta \sum_{\pi} \right. \\ & \left. \cdot f'\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, UV_{\pi} \right) \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, (\theta\lambda) UV_{\pi} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots U \cdots \omega_M \beta \sum_{\pi} \right. \\ & \left. \cdot f'\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, UV_{\pi} \right) \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \frac{1}{2} (\theta\lambda)^2 UV_{\pi} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots U \cdots \omega_M \frac{1}{2} \beta \sum_{\pi} \right. \\ & \left. \cdot f''\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, UV_{\pi} \right) \left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, (\theta\lambda) UV_{\pi} \right)^2 \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, \omega_1 \cdots U \cdots \omega_M \frac{1}{2} \beta^2 \sum_{\pi} \right. \\ & \cdot f'\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, UV_{\pi} \right) \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, (\theta\lambda) UV_{\pi} \\ & \left. \cdot \sum_{\pi} f'\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, UV_{\pi} \right) \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, (\theta\lambda) UV_{\pi} \right\rangle + \mathrm{c.\ c.} \end{aligned} \tag{33}$$

在 $U \to e^{\theta\lambda}U$ 变换下,下式也成立:

$$\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots U\cdots\omega_M\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)UV_\pi\right\rangle$$
$$=\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)U\cdots\omega_M\sum_\pi\right.$$
$$\cdot f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)UV_\pi\right)$$
$$\left.\cdot\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)UV_\pi\right\rangle. \tag{34}$$

不难得到二阶项符合的方程为

$$0=\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots(\theta\lambda)U\cdots\omega_M\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)UV_\pi\right\rangle$$
$$+\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots U\cdots\omega_M\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)^2UV_\pi\right\rangle$$
$$+\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots U\cdots\omega_M\sum_\pi f''\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)UV_\pi\right)^2\right\rangle$$
$$+\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots U\cdots\omega_M\beta\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)UV_\pi\right.$$
$$\left.\cdot\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\theta\lambda)UV_\pi\right\rangle+\text{c. c.}. \tag{35}$$

将(35)式代入(33)式并令 $\theta=\delta_{\alpha\mu}$ 即得

$$\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots\lambda^\alpha\lambda^\alpha U\cdots\omega_M\right\rangle+\beta\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots\lambda^\alpha U\cdots\omega_M\right.$$
$$\left.\sum_\pi f'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}UV_\pi\right)\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\lambda^\alpha UV_\pi+\text{c. c.}\right\rangle=0. \tag{36}$$

利用生成元特性即可得到类似 Eguchi 的结果[11].

$$\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\prod_{i\in c}U_i\right\rangle+\frac{\beta}{2N^2}\sum_{\rho\neq\alpha}\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\prod_{i\in c'}U_if'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}U_{y,\alpha}V_\pi\right)\right\rangle$$
$$-\frac{\beta}{2N^2}\sum_{\rho\neq\alpha}\left\langle\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\prod_{l\in c''}U_if'\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}U_{y,\alpha}V_\pi\right)\right\rangle=0. \tag{37}$$

这里路径 c, c', c'' 分别为

$$c=(x,x+\mu,\cdots,y-\nu,y,y+\alpha,y+\alpha+\beta,\cdots,x-\sigma,x),$$
$$c'=(x,x+\mu,\cdots,y-\nu,y,y+\alpha,y+\alpha+\rho,y+\rho,y,y$$
$$+\alpha,y+\alpha+\beta,\cdots,x),$$
$$c''=(x,x+\mu,\cdots,y-\nu,y,y+\rho,y+\rho+\alpha,y+\alpha,y$$
$$+\alpha+\beta,\cdots,x), \tag{38}$$

其中 V_π 仍是与 $U_{y,\alpha}$ 相联元格的其余三链有序积，对 $\rho\neq\alpha$ 求和也就是对 π 求和.

在 E-K 模型中进行类似的推导时，(31) 式的 $W(c)$ 中通常含有相同方向的链变量．于是(32)式变为

$$W(c)=\int\Pi d\omega dU\left\{\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\omega_1\cdots\omega_l(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)U\cdots\omega_k\right.$$

$$(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)\,U\cdots\omega_M\Big\}\cdot\exp\Big\{\beta\Big[\sum_P{}'f\Big(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,U_P\Big)$$

$$+\sum_\pi f\Big(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(1+\theta\lambda+(\theta\lambda)^2/2+\cdots)UV_\pi\Big)+\mathrm{c.\,c.}\Big]\Big\}. \tag{39}$$

在(37)式中就多出如下二阶项:

$$\frac{1}{N}\Big\langle\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\omega_1\cdots\omega_l(\theta\lambda)U\cdots\omega_k(\theta\lambda)U\cdots\omega_M\Big\rangle. \tag{40}$$

利用生成元特性,(40)式可写为

$$W(c_1,c_2)=\Big\langle\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,U\cdots\omega_k\cdot\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,U\cdots\omega_M\omega_1\cdots\omega_l\Big\rangle. \tag{41}$$

在 $1/(Ng^2)$ 不变而 $N\to\infty$ 时,我们有

$$W(c_1,c_2)=\Big\langle\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,U\cdots\omega_k\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,U\cdots\omega_M\omega_1\cdots\omega_l\Big\rangle+O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

$$=W(c_1)\cdot W(c_2)+O\Big(\frac{1}{N^2}\Big). \tag{42}$$

如果作用量保持 $U(1)$ 局域规范不变,那么开放的 Wilson 圈有[7]

$$W(c_1)=W(c_2)=0. \tag{43}$$

于是在 $O(1/N^2)$ 精度上,E-K 模型中的 Schwinger-Dyson 方程与标准格点中一样. 这就是说(24)式的作用量在大N极限下可用于 E-K 模型. 这对探讨 $U(1)$ 破缺及大N极限下普适性问题都是有意义的.

感谢汪容教授和我们作的有益的讨论.

参 考 文 献

[1] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D*, **10**(1974), 2445.
[2] J. Villain, *J. de Phys.*, **36**(1975), 581.
[3] N. S. Manton, *Phys. Lett. B*, **96**(1980), 328.
[4] S. J. Anthony, *Phys. Lett. B*, **110**(1982), 271.
[5] G. Bhanot, M. Creutz, *Phys. Rev. D*, **24**(1981), 3212.
[6] J. M. Drouffe, *Phys. Rev. D*, **18**(1978), 1174.
P. Menotti, E. Onofri, *Nucl. Phys. B*, **190**[FS3] (1981), 288.
C. B. Lang, P. Salomonson and B. S. Skagerstam, *Nucl. Phys. B*, **190**[FS3] (1981), 337
S. B. Khokhlachev, Yu. M. Makeenko, Phys. Lett. B, 101 (1981), 403.
[7] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 659.
[8] B. Grossman, S. Samuel, *Phys. Lett. B*, **120**(1983), 383.
[9] T. V. Shahbazyan, *Phys. Lett. B*, **128**(1983), 79.
[10] Dong Shaojing, Li Wenzhu, ZUP-304(1983), Zhejiang University preprint.
[11] T. Eguchi and H. Kawai, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1063.
[12] M. Okawa, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 353.
[13] T. Eguchi, *Phys. Lett. B*, **87**(1979), 91.

SOME ALTERNATIVE ACTIONS IN PURE LATTICE GAUGE THEORY

Li Wen-zhu　Dong Shao-jing
(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In lattice gauge theory some alternative actions without fermions were proposed, which obey Wilson's conditions for lattice action and were related with usually adopted actions. The Schwinger-Dyson equation obeyed by Wilson loop amplitude with the alternative actions was derivated. We verified that, in large N limit in E-K reduced model, the same Schwinger-Dyson equation exists as in the standard model.