第 33 卷 第 10 期
1984 年 10 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 33, No. 10
Oct., 1984

费密子与 Dirac 双子系统的耦合问题

李新洲　　汪克林　　张鉴祖
(复旦大学)　(中国科学技术大学)　(山西大学)

1983 年 12 月 16 日收到

提　　要

除了库仑耦合和 Kazama-杨振宁耦合——$\kappa q\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3$ 外，本文同时讨论了费密子 Dirac 双子应当存在的另一耦合 $i\kappa zz_d e^2\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3$. 结果表明，对所有角动量态，费密子径向波函数具有物理上合理的原点渐近行为. 定性地分析了束缚态的必要条件. 发现，对于双子情形，当额外磁矩 $\kappa\to 0$ 时，存在费密子束缚态是可能的；但对于磁单极情形，当 $\kappa\to 0$ 时，必不存在费密子束缚态.

一、引　　言

近年来，在 Dirac 磁单极[1] 外场中费密子束缚态的问题[2-4]，以及在 'tHooft-Polyakov 型磁单极[5] 外场中费密子的束缚态问题[6-9] 引起了人们的极大兴趣. 如所熟知，与 Dirac 磁单极的矢势相联系，存在 Lipkin-Weisberger-Peshkin 困难[10]，这表现在费密子径向波函数的原点行为上. 对于最低角动量态，径向波函数在原点并不为零. 因而系统的哈密顿量在原点并没有被很好地定义. Kazama 和杨振宁解决这个困难的方案[2,3]，是赋予费密子一个无限小的附加磁矩. 最近，吴大峻把文献[2]和[3]的讨论推广到在双子外场中的费密子情形[4]. 发现，当双子的电荷固定而额外磁矩趋于零时，径向波函数在原点附近的极限不存在；当额外磁矩和双子电荷同时趋于零时，则结果依赖于取极限的方式，可能的极限理论被一个实常数参数化. 吴大峻的结果表明，费密子与双子系统的哈密顿量需进一步修改.

荷电费密子与双子间除了库仑耦合和 Kazama-杨振宁额外磁矩耦合

$$-\kappa q\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3 \tag{1}$$

外，还应有下述形式的耦合

$$i\kappa\lambda\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3. \tag{2}$$

(1)式为有效相互作用拉氏密度

$$\mathscr{L}_i=\frac{1}{4M}\kappa zeF^{\mu\nu}\bar{\psi}\Sigma_{\mu\nu}\psi \tag{3}$$

的 (ij) 分量. 此处，$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 为双子的电磁场强张量，A^μ 为双子的电磁 4-矢势. $\mathscr{L}_i$ 的 $(0i)$ 和 $(i0)$ 分量即给出(2)式. 在低能下，虽然(2)式远小于(1)式，但是对于径向波函数在原点附近的渐近行为的影响而言，由于这两项都具有 $1/r^2$ 的行为，所以它们是同样重要的. 这样，对于一个完全相对论的理论，荷电费密子与双子系统的哈密顿

量应为

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla-ze\boldsymbol{A})+\beta M-\frac{\lambda}{r}$$

$$-\frac{\kappa q}{2Mr^3}\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}+i\frac{\kappa\lambda}{2Mr^3}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}. \tag{4}$$

上式中，M为费密子质量．$q=zeg$，ze 为费密子的电荷，g 为磁单极的强度．$\lambda=zz_\mathrm{d}e^2$，z_d 为双子电荷．z 应为整数，但是 z_d 则不限于整数．在 $z_\mathrm{d}\to 0$ 的极限下，双子即化为磁单极．κ 表述费密子的无限小附加磁矩．

二、基 本 方 程

为了看清结果如何依赖于极限过程 $\kappa\to 0$，$z_\mathrm{d}\to 0$，下面采用与文献[11]和[2]稍为不同的表述．没有引入文献[2]的变数 ρ

$$r=|\kappa q|\rho(2M)^{-2}.$$

因为哈密顿量(4)式是转动不变的，可利用磁单极球谐函数 $Y_{q,l,m}$[11,12] 完成分波分解．存在H和总角动量 $\boldsymbol{J}^2$，J_z 的两类本征截面：[11]

类型A　　$j\geqslant|q|+1/2$，

$$\psi_{jm}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}h_1(r)\xi^{(1)}_{jm}+h_2(r)\xi^{(2)}_{jm}\\-i(h_3(r)\xi^{(1)}_{jm}+h_4(r)\xi^{(2)}_{jm})\end{bmatrix}, \tag{5}$$

类型B　　$j=|q|-1/2\geqslant 0$；

$$\psi_m=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}F(r)\eta_m\\-iG(r)\eta_m\end{bmatrix}. \tag{6}$$

以上，$h_i(r)$ $(i=1,2,3,4)$ 和 $F(r)$，$G(r)$ 为径向变量 r 的标量函数．$\xi^{(1)}_{jm}$，$\xi^{(2)}_{jm}$ 和 η_m 为 $\boldsymbol{J}^2$ 和 J_z 的二分量本征截，它们可用磁单极球谐函数表示[11,12]，并具有如下性质[11]：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\xi^{(1)}_{jm}=-\xi^{(2)}_{jm}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\xi^{(2)}_{jm}=-\xi^{(1)}_{jm}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\eta_m=\frac{q}{|q|}\eta_m, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\nabla-ze\boldsymbol{A})f(r)\xi^{(1)}_{jm}=i\left(\partial_r+\frac{1-\mu}{r}\right)f(r)\xi^{(2)}_{jm}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\nabla-ze\boldsymbol{A})g(r)\xi^{(2)}_{jm}=i\left(\partial_r+\frac{1+\mu}{r}\right)g(r)\xi^{(1)}_{jm}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\nabla-ze\boldsymbol{A})F(r)\eta_m=-i\frac{q}{|q|}\left(\partial_r+\frac{1}{r}\right)F(r)\eta_m. \tag{12}$$

以上，$\mu=[(j+1/2)^2-q^2]^{1/2}$，$\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/r$．

利用(5)，(6)，(7)—(12)各式，由(4)式可导出如下径向方程：

类型A　　$j\geqslant|q|+1/2$，

$$\left(M-E-\frac{\lambda}{r}\right)h_1+\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_2+\left(\frac{d}{dr}+\frac{\mu}{r}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_4=0, \tag{13}$$

$$\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_1+\left(M-E-\frac{\lambda}{r}\right)h_2+\left(\frac{d}{dr}-\frac{\mu}{r}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_3=0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{\mu}{r}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_1+\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_3+\left(M+E+\frac{\lambda}{r}\right)h_4=0, \tag{15}$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\mu}{r}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_2+\left(M+E+\frac{\lambda}{r}\right)h_3+\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_4=0. \tag{16}$$

类型 B　　$j=|q|-1/2\geqslant 0$,

$$\left(M-E-\frac{\lambda}{r}-\frac{\kappa|q|}{2Mr^2}\right)F-\frac{q}{|q|}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)G=0, \tag{17}$$

$$\frac{q}{|q|}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)F-\left(M+E+\frac{\lambda}{r}-\frac{\kappa|q|}{2Mr^2}\right)G=0. \tag{18}$$

在(13)—(18)各式中,当 $\lambda\to 0$ (即 $z_d\to 0$),就由双子情形过渡到磁单极情形.

三、渐 近 行 为

1. 无穷远处的渐近行为

当 $r\to\infty$ 时,由(13)—(16)和(17),(18)式,导出径向波函数在无穷远处的渐近解为

$$h_i(r),\ F(r),\ G(r)\sim\exp[-(M^2-E^2)^{1/2}r]\quad (i=1,2,3,4). \tag{19}$$

径向波函数在无穷远处指数收敛的要求为

$$-M<E<M. \tag{20}$$

此式恰好是费密子束缚态所应满足的条件.

2. 原点附近的渐近行为

当 $r\to 0$ 时,略去 $M\pm E$ 和 $1/r$ 项,则类型 A 的方程(13)—(16)部分退耦

$$\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_2+\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_4=0, \tag{13a}$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_2+\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_4=0; \tag{16a}$$

$$\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_1+\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_3=0, \tag{14a}$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)h_1+\frac{\kappa q}{2Mr^2}h_3=0. \tag{15a}$$

类型 B 的方程(17)和(18)化为

$$\frac{\kappa|q|}{2Mr^2}F+\frac{q}{|q|}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)G=0, \tag{17a}$$

$$\frac{q}{|q|}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa\lambda}{2Mr^2}\right)F+\frac{\kappa|q|}{2Mr^2}G=0. \tag{18a}$$

由 (13a) 和 (16a), (14a) 和 (15a), (17a) 和 (18a) 式,解出径向波函数的零点渐近行为为

$$h_i(r),\ F(r),\ G(r)\sim\exp(-c/r)\quad (i=1,2,3,4), \tag{21}$$

式中

$$c = \frac{|\kappa|}{2M}(q^2 + \lambda^2)^{1/2}. \tag{22}$$

渐近解(21)式表明，对于全部角动量态，径向波函数在原点都指数收敛，因此系统的哈密顿量对全部角动量态在原点都很好地被定义。这就避免了 Lipkin-Weisberger-Peshkin 困难[10]。

四、束缚态必要条件的定性讨论

类型 A　由(13)—(16)式，可导出下述等式：

$$M\sum_{i=1}^{4}|h_i|^2 - E(|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 - |h_4|^2) + \frac{\kappa q}{Mr^2}\mathrm{Re}(h_1h_2^* + h_3h_4^*)$$
$$-\frac{\lambda}{r}(|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 - |h_4|^2) + \frac{d}{dr}(h_1^*h_4 + h_2^*h_3) = 0. \tag{23}$$

将上式从 0 至∞积分，并利用渐近解(19)和(21)式，得

$$\int_0^\infty d(h_1^*h_4 + h_2^*h_3) = 0,$$

且积分

$$\int_0^\infty dr\cdot\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}(h_1h_2^* + h_3h_4^*)$$

和

$$\int_0^\infty dr\cdot\frac{1}{r}(|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 - |h_4|^2)$$

在原点收敛。故(23)式化为

$$\frac{E}{M} = \frac{1}{\delta}(\alpha - \lambda\beta + \kappa\gamma), \tag{24}$$

式中

$$\alpha \equiv \int_0^\infty dr\sum_{i=1}^{4}|h_i|^2 > 0, \tag{25}$$

$$\beta \equiv \frac{1}{M}\int_0^\infty dr\cdot\frac{1}{r}(|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 - |h_4|^2), \tag{26}$$

$$\gamma \equiv \frac{q}{M^2}\int_0^\infty dr\cdot\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}(h_1h_2^* + h_3h_4^*), \tag{27}$$

$$\delta \equiv \int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2 - |h_3|^2 - |h_4|^2). \tag{28}$$

由(20)和(24)式可得

$$-1 < \frac{1}{\delta}(\alpha - \lambda\beta + \kappa\gamma) < 1. \tag{29}$$

下面分三种情形讨论。

1. κ 和 λ 同时趋于零　　这对应于附加磁矩趋于零的费密子-磁单极系统。因为

$$\alpha/|\delta| > 1, \tag{30}$$

故(24)式给出 $|E|/M > 1$，此时束缚态必要条件(20)式必不被满足．这意味着磁单极不能束缚费密子，此点，与非阿贝耳规范理论的情形完全相同，那里，'tHooft-Polyakov 磁单极也不能束缚费密子．

2. $\kappa \to 0$，但 λ 固定　这对应于附加磁矩趋于零的费密子-双子系统．此时(24)式化为

$$\frac{E}{M} = \frac{1}{\delta}(\alpha - \lambda\beta). \tag{31}$$

这里有四种可能情形．

1) $\beta > 0, \delta > 0$　(28)式给出

$$\int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2) > \int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2).$$

由(20)和(31)式得

$$0 < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2) < \lambda < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2). \tag{32}$$

2) $\beta > 0$，$\delta < 0$　(28)式给出

$$\int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2) > \int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2).$$

由(20)和(31)式得

$$0 < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2) < \lambda < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2). \tag{33}$$

3) $\beta < 0$，$\delta > 0$　由(20)和(31)式可得

$$\frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2) < \lambda < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2) < 0. \tag{34}$$

4) $\beta < 0$，$\delta < 0$　由(20)和(31)式得

$$\frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_3|^2 + |h_4|^2) < \lambda < \frac{2}{\beta}\int_0^\infty dr(|h_1|^2 + |h_2|^2) < 0. \tag{35}$$

上述四种情况都存在 λ 所满足的与束缚态条件(20)式相容的不等式．这意味着，虽然附加磁矩趋于零，但双子通过其电场束缚费密子是可能的．此点，与 Julia-Zee 双子[13] 可通过其"电场"束缚费密子的情形完全相同．

3. $\lambda \to 0$ 但 κ 固定　这对应于有附加磁矩的费密子-磁单极体系．与 2 类似的讨论表明，这种情形也存在费密子束缚态．这正是 Kazama 和杨振宁所讨论的情形[2,3]．

类型 B　与类型 A 的讨论完全类似．由(17)，(18)式和渐近解(19)，(21)式可得

$$\frac{E}{M} = \frac{\int_0^\infty dr(|F|^2 + |G|^2) - \frac{\lambda}{M}\int_0^\infty dr \cdot \frac{1}{r}(|F|^2 - |G|^2) - \frac{\kappa|q|}{2M^2}\int_0^\infty dr \cdot \frac{1}{r^2}(|F|^2 + |G|^2)}{\int_0^\infty dr(|F|^2 - |G|^2)} \tag{36}$$

由(20)和(36)式，可得与类型 A 完全相同的结论．

作者之一(张)对 H. M. Chan 教授，John. R. Clem 教授和 Bing-lin Young 教授，York-Peng Yao 教授在他访问 Rutherford Laboratory, Iowa State University 和 University of Michigan 期间所给予的热情款待和进行的有益讨论表示感谢.

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London,* Series A, **133**(1931), 60; *Phys. Rev.,* **74**(1948), 817.
[2] Y. Kazama and C. N. Yang, *Phys. Rev. D,* **15**(1977), 2300.
[3] C. N. Yang, Proc. of the Monopole Meeting, Trieste, Italy, Dec. (1981), 237.
[4] Tai Tsun Wu, DESY, 83-021, (1983).
[5] G. 'tHooft, *Nucl. Phys. B,* **79**(1974), 276; A. M. Polyakov, *Pis'ma ZETF,* **20**(1974), 430.
[6] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuovo Cim. A,* **75**(1983), 87.
[7] 李新洲、汪克林、张鉴祖，科学通报，**28**(1983)，1231.
[8] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, to be appeared in *Nuovo Cim. A.*
[9] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, to be apeared in *Phys. Lett. B.*
[10] H. J. Lipkin, W. I. Weisberger and M. Peshkin, *Ann. Phys.,* (N. Y.), **53**(1969), 203.
[11] Y. Kazama, C. N. Yang and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev. D,* **15**(1977), 2287.
[12] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev. D,* **12**(1975), 3845; *Nucl. Phys. B,* **107**(1976), 365.
[13] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev. D,* **11**(1975), 2227.

THE COUPLING OF THE SYSTEM OF A FERMION WITH A DIRAC DYON

LI XIN-ZHOU (*Fudan University*)
WANG KE-LIN (*University of Science and Technology of China*)
ZHANG JIAN-ZU (*Shanxi University*)

ABSTRACT

The Coulomb coupling, the Kazama-Yang coupling $-\kappa q\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3$ and the coupling $i\kappa zz_d e^2\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{r}/2Mr^3$ between a charged spin-1/2 fermion and a Dirac dyon are considered simultaneously. It is shown that for all the angular momentum states the fermion's radial wave functions have the physically reasonable asymptotic behavior at the origin. The bound state condition is qualitatively analysed. We show that, in the fixed dyon field when the extra magnetic moment $\kappa\to 0$, the bound states of fermion exist, but in the fixed monopole field when $\kappa\to 0$, the bound states of fermion do not exist.