

切变流动液晶中的孤子传播

林 磊 舒 昌 清

(中国科学院物理研究所)

1982年6月7日收到; 1982年10月28日收到修改稿

提 要

本文首次给出了切变流动下(包括存在外电场或外磁场的情况)向列相液晶中与指向运动有关的孤子传播性质的详细计算. 在波速较大条件下方程有解析解. 本文还对孤子解的性质、孤子的能量以及偏振光(单色光和复色光)下孤子运动所引起的干涉条纹等做了计算和讨论. 对实验的分析表明: 文献[12]和[13] MBBA 液晶中观察到的黑线实际上就是本文所述的A型孤子.

一、引 言

孤子在物理学中的重要性,已为人们所普遍认识^[1,2]. 但是系统地讨论液晶中孤子传播问题,则还刚刚开始^[3].

早期讨论的液晶中孤子(被称之为“壁”)是用磁场激发的^[4-6]. 近年来,这方面工作已引起更多的注意. Prost^[7]讨论过有重入向列相的液晶材料中近晶A相的(静态)孤子. Pirdak 等人^[8]讨论了在静电场下近晶C相薄膜中的壁. Carr 和 Kozlowski^[9,10]处理了在静电场下向列相液晶中壁的行为. Yamashita 等人^[11]研究了在外磁场作用下胆甾相液晶转变成向列相时的静态孤子凝聚问题. 上述各文献^[4-11]虽然谈了孤子,但对孤子作为非线性波并没有进行系统的考察.

文献[3]首次从理论上提出了在切变流动下的向列相液晶中孤子传播问题. 这些孤子可以用肉眼直接观察. 该文还对最近的一些实验结果^[12]给出了解释. 本文就存在或不存在外场(磁或电)情况,对切变流动下的液晶中孤子传播问题,给出了与之有关的详细计算和一些新的结果,并做了深入的讨论,与实验^[13]做了对比.

值得指出:在其它凝聚态(包括超流氦-3)中,对孤子的观察都是比较间接的. 而液晶中的孤子却可较直接看到. 本文所讨论的这些孤子比较简单,这方面的工作除了可以加深人们对液晶性质的了解外,还可用来检验有关孤子的理论.

顺便提及, Ribotta^[14]用显微镜观察到的那些很象孤子的传播条纹,实际上是对流圈的衰减运动.

二、方程的孤子解

考虑均匀切变流动的向列相液晶(见图 1), 其速度为

$$\mathbf{v} = (v(y), 0, 0) \quad (1)$$

$$s = \frac{\partial v}{\partial y} = \text{常数}$$

此时不可压缩条件: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 已自动满足. 设指向为

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \theta = \theta(x, t). \quad (2)$$

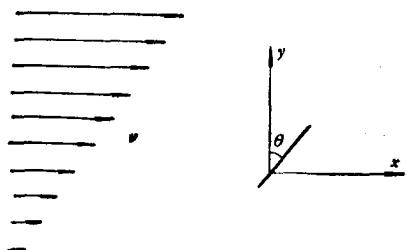


图 1 均匀切变流动的液晶

Frank 弹性常数近似取为

$$K_1 = K_2 = K_3 = K. \quad (3)$$

在存在外磁场 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$ 时, 由 Ericksen-Leslie 方程(参看文献[15])可得指向运动方程:

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \gamma_1 \frac{d\theta}{dt} + \frac{s}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \cos 2\theta) + \chi_a (H_x \sin \theta + H_y \cos \theta) (H_x \cos \theta - H_y \sin \theta) \quad (4)$$

其中 M 为转动惯量, γ_1, γ_2 为粘滞系数(见文献[15]), χ_a 为磁化率各向异性部分, 且(见第六节)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (5)$$

对只存在外电场 $\mathbf{E}$ 的情况, 只要把(4)式中的 $\mathbf{H}$ 换作 $\mathbf{E}$, χ_a 换作 ϵ_a . ϵ_a 为介电常数各向异性部分.

要完整地描述液晶的运动, 除(4)式外, 还有两条与质心运动有关的方程. 它们涉及压强 $p = p(x, y, t)$ 的空间微分 $\partial p / \partial x$ 和 $\partial p / \partial y$. 在均匀切变流动情况下, 在这三条方程中(4)式可以独立求解. 因此, 以下将只考虑(4)式. 不难看出, (4)式是有阻尼项、有外力矩的 Sine-Gordon 方程, 有孤子解(参阅文献[2]和[16]). 如不存在外场, (4)式将退化为文献[3]中(1)式. 记

$$\begin{aligned} \tau &= 2\gamma/s, \\ \lambda &= (2K/|\gamma_2|s)^{\frac{1}{2}}, \\ X &= x/\lambda, \\ T &= t/\tau, \\ r &= \gamma_1/|\gamma_2|. \end{aligned} \quad (6)$$

可将方程(4)中各量以相应的无量纲量取代. 为求以速度 c 运动的行波解, 设

$$\theta = \theta(Z). \quad (7)$$

其中 $Z = X - CT$, $C = c\tau/\lambda$. 于是(4)式变为

$$m\ddot{\theta} = -\eta\dot{\theta} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta}. \quad (8)$$

式中

$$m = 1 - MsC^2/(2r^2|\gamma_2|), \quad \eta = C - V, \\ V = v\tau/\lambda, \dot{\theta} \equiv d\theta/dZ, \bar{U} = U + U_1, \quad (9)$$

$$U = r\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta, \quad (9a)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{\chi_a(H_y^2 - H_x^2)}{s|\gamma_2|} \cos 2\theta + \frac{\chi_a H_x H_y}{s|\gamma_2|} \sin 2\theta. \quad (9b)$$

因向列相液晶材料一般有 $\gamma_2 < 0$, 上式中已用到 $\gamma_2 = -|\gamma_2|$, 并假定了 $s > 0$. 方程(4)在变换 $(s, H_x, H_y, \theta) \rightarrow (-s, H_x, -H_y, -\theta)$ 下不变. 因此以下结果容易移到 $s < 0$ 的情况.

方程(8)可以视为质量为 m 的粒子在势场 $\bar{U}$ 中的运动方程, 而运动阻尼系数为 η , Z 是“时间”.

如取外场 $H = 0$, 则有 $\bar{U} = U$, 而(8)式化为文献[3]中(2)式. 在(8)式中, 将变量重新标度, 可使 $m = 1$. 为了简便, 以下取 $m = 1$.

1. 外场 $H = 0$

对于 $0 \leq r \leq 1$, 势 U 与 θ 的关系如图 2 所示.

$$\text{其中 } \frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \theta_0 \equiv \frac{1}{2} \cos^{-1}(-r).$$

而

$$h_1 \equiv U(\theta_0) - U(-\theta_0) = r \cos^{-1}(-r) \\ + \sqrt{1 - r^2};$$

$$h_2 \equiv U(\theta_0) - U(\pi - \theta_0) = r \cos(-r) + \sqrt{1 - r^2} - \pi r;$$

$$\phi = \pi - 2\theta_0. \quad (10)$$

不难看出: 对于 $0 \leq r < 1$, 当 $\theta = \theta_0 + k\pi$ (k 为整数, 以下同) 时, U 取极大值, 当 $\theta = -\theta_0 + k\pi$ 时, U 取极小值.

根据(8)式初始条件及 η 大小可以确定存在孤子的三种基本情况(见第六节). 它们分别相应于初速为零的粒子从图 2b $\theta = \theta_0$ 的山头开始运动并终止于: (A) $\theta = -\theta_0$ 的山谷, (B) $\theta = \pi - \theta_0$ 的山谷, (C) $\theta = \theta_0 - \pi$ 的山谷. C 型仅当 $\eta = \eta_c$ 时才会出现. η_c 称为临界阻尼系数^[3,16]. 而 A(B) 型对所有 $\eta > \eta_c$ ($\eta > 0$) 可能出现. 初速为 0 从 θ_0 出发的粒子沿着 θ 减小的方向运动, 达到 $-\theta_0$ 时, 其速度恰为 0, 则此种情况下的 η_c 恰取值 η_c . η_c 随 r 从 0 ($r = 0$) 单调增加到 $0.84m^{\frac{1}{2}}$ ($r = 1$). 当 $\eta < \eta_c$ 时, 粒子达到 $-\theta_0$ 将有不为零的速度, 仍可沿着 θ 减小的方向继续运动下去. 由图 2 不难看出, 此后粒子将越来越快地翻越一个又一个山头, 这样的过程将永无止息. 其能量已不局限于一有限空间, 因而不是孤子. 在 A, B 型中如阻尼不足, 粒子将分别在 $-\theta_0$ 或 $\pi - \theta_0$ 处来回振荡, 最后停

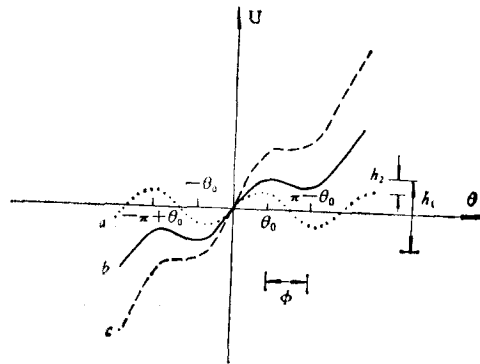
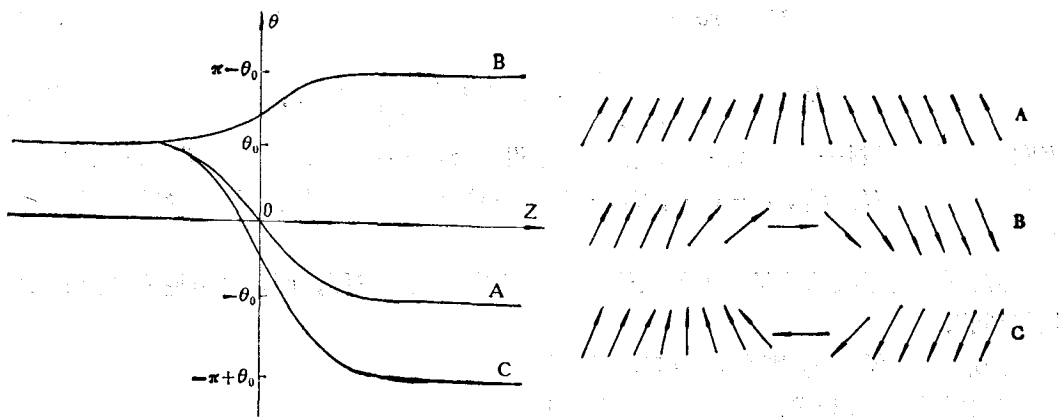


图 2 $U(\theta)$ 曲线

a 为 $r = 0$; b 为 $0 < r < 1$; c 为 $r = 1$;

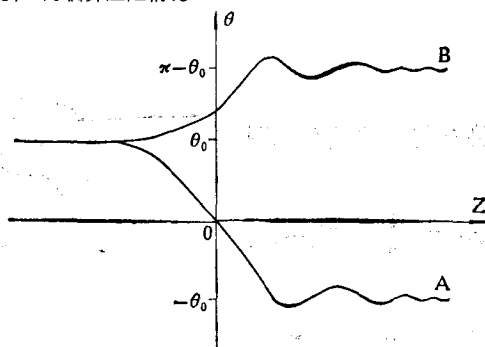
$\pm\theta_0, \pm(\pi - \theta_0)$ 是相对曲线 b 而言

止于 $-\theta_0$ 或 $\pi - \theta_0$; 在过阻尼时, 粒子将不经振荡而直接停止于 $-\theta_0$ 或 $\pi - \theta_0$. 以上三种类型孤子的 $\theta(Z)$ 曲线及 θ 在空间改变的示意图见图3. 当 $\gamma = 1$ 时, A, C型合而为一. 对 $\gamma > 1$, 没有孤子解.



(a) 三种类型孤子的 $\theta(Z)$ 曲线示意图
A, B 为过阻尼情况; C 为临界阻尼情况

(b) 三种类型孤子的 θ 在空间改变的示意图



(c) 阻尼不足时, A, B 型孤子的 $\theta(Z)$ 曲线示意图

图 3

对于阻尼很大 ($\eta \gg 1$) 的情形, (8)式可对 $1/\eta$ 展开到二阶, 得

$$\dot{\theta} = -(\gamma + \cos 2\theta)/\eta - 2(\sin 2\theta)\dot{\theta}/\eta^2. \quad (11)$$

以下就 A, B 这两种孤子进行讨论,

A. $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$

$$f = \tan \theta, W = \tan \theta_0 = [(1 + \gamma)/(1 - \gamma)]^{1/2}. \quad (12)$$

记

可由(11)式解得

$$h(1 + f^2)^{2/(1+W^2)} \frac{(W + f)^a}{(W - f)^b} = \exp[\eta(\gamma - 1)Z], \quad -W \leq f \leq W. \quad (13)$$

式中 h 为积分常数, 而

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{W} - \frac{4}{W^2 + 1} \right), \\ b &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{W} + \frac{4}{W^2 + 1} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

由(13)式, 显然有: 当 $Z \rightarrow \pm\infty$ 时, $\theta \rightarrow \pm\theta_0$. 如设 $Z = 0$ 时, $\theta = 0$, 可得

$$h = W \frac{4}{W^2 + 1}.$$

如 $\frac{\eta^2}{W} \gg \frac{4}{W^2 + 1}$, 且 $\eta \gg 1$, 则 $a \approx b \gg 1$, (13)式可近似写成

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ W \tanh \left[\frac{(\gamma - 1)WZ}{\eta} \right] \right\}. \quad (15)$$

容易证明: (15)式即是(11)式保留到 $1/\eta$ 阶的解. 在不同的 γ 下, (15)式给出的 $\theta(Z/\eta)$ 曲线见图 4.

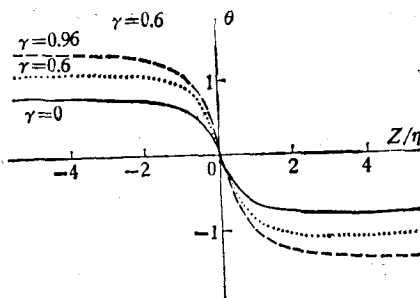


图 4 θ - Z/η 曲线

数值计算表明: 当 $10 \leq \eta \leq 2000$ 时, (15)式与 (13)式差别很小. 在图 4 的尺标下, 两式分别给出的曲线, 是重叠在一起分辨不出的. 值得指出的是: 对于 (13)式有 $\theta(Z) \approx -\theta(-Z)$, 而对于 (15)式却有 $\theta_Z = -\theta(-Z)$. (13)式的 $\theta = \theta(Z/\eta)$, 而 (15)式的 θ 与 Z 和 η 的关系比较复杂. 从图 4 还可看出: η 相同, γ 不同时, $|\dot{\theta}(\theta = 0)|$ 是不同的. 当 γ 较大(接近 1)时, $|\dot{\theta}(\theta = 0)|$ 较大; 当 γ 较小(接近 0)时, $|\dot{\theta}(\theta = 0)|$ 较小. 这是因为较大的 γ 对应于较大的 h_1 (参看图 2 和 (16)式).

B. $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$.

记 $f \equiv \cot \theta$, 可由(11)式解得

$$h'(1+f)^{\frac{2W^2}{1+W^2}} \frac{(1/W+f)^{a'}}{(1/W-f)^{b'}} = \exp[-\eta(1+\gamma)Z], \quad -\frac{1}{W} \leq f \leq \frac{1}{W}. \quad (16)$$

式中 $a' \equiv \frac{1}{2} \left(\eta^2 W - \frac{4W^2}{W^2+1} \right)$, $b' \equiv \frac{1}{2} \left(\eta^2 W + \frac{4W^2}{W^2+1} \right)$, h' 为积分常数. 当 $Z \rightarrow -\infty$ 时, $\theta \rightarrow \theta_0$; 当 $Z \rightarrow +\infty$ 时, $\theta \rightarrow \pi - \theta_0$. 如取 $Z = 0$ 时, $\theta = \pi/2$, 则有

$$h' = W^{-\frac{4W^2}{W^2+1}}. \quad (17)$$

在 $\eta^2 \gg \frac{4W}{W^2+1}$ 和 $\eta \gg 1$ 条件下, (16)式可近似写成

$$\theta = \cot^{-1} \left\{ \frac{1}{W} \tanh \left[-\frac{(1+\gamma)Z}{W\eta} \right] \right\}. \quad (18)$$

不难证明: (18)式也是(11)式保留到 $1/\eta$ 阶的解. 关于(16)式和(18)式及其与实验有关的详细讨论将另文发表.

2. 外场 $H \approx 0$

此时有

$$\bar{U} = r\theta + \Psi \frac{1}{2} \sin 2(\theta + \phi). \quad (19)$$

其中

$$\Psi = \left[\left(1 + \frac{2\chi_s H_x H_y}{s|\tau_2|} \right)^2 + \left(\chi_s \frac{H_y^2 - H_x^2}{s|\tau_2|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tan 2\phi = \chi_s \frac{H_y^2 - H_x^2}{s|\tau_2|} / \left(1 + \frac{2\chi_s H_x H_y}{s|\tau_2|} \right). \quad (20)$$

如外场不随时间改变,只要在(18)式中做变换 $(m, \eta, r, \theta) \rightarrow \left(\frac{m}{\Psi}, \frac{\eta}{\Psi}, \frac{r}{\Psi}, \theta - \phi \right)$, 就可以还原为 $H = 0$ 时的方程. 此时 $\bar{U}$ 的形式仍如图 2 所示, 但有效 r 为 r/Ψ . 对于外场随时间改变的情况, 即同时存在可变外场与切变流动的情况, 我们将另文专题讨论.

如取 $s \sim 10^2$ 秒⁻¹, $|\tau_2| \sim 10^{-1}$ 泊, $\chi_s \sim 10^{-7}$, 由(20)式不难看出: 只有当 $H \sim 10^4$ 高斯时, 外场的影响才可以与切变流动的作用相比.

三、孤子的能量耗散

使向列相液晶做切变流动, 并进而在其中激发起孤子, 需要外界供给能量. 这是因为指向运动方程的非线性项是由粘滞性引起的, 孤子传播过程中必伴有能量耗散. 外力对系统所做的功一部分用来增加系统的动能与弹性能, 另一部分经系统耗散. 本节及本文以下部分, 只讨论外场 $H = 0$ 情况. 设系统的能量耗散率为 P , 则有^[15,17]:

$$P = \int dx dy dz 2\bar{D},$$

$$2\bar{D} = \alpha_1(n_i n_j d_{ij})^2 + 2\tau_2 n_i d_{ij} N_j + \alpha_4 d_{ij} d_{ij}$$

$$+ (\alpha_5 + \alpha_6) d_{ij} d_{ik} n_j n_k + \tau_1 N_i N_i. \quad (21)$$

其中 $\bar{D}$ 为液晶的单位体积耗散函数.

对于以指向角 θ_0 均匀排列的切变流动定态, 有

$$P = P_{10} = \frac{LDBs^2}{2} [\alpha_1(1 - r^2) + \alpha - \tau_1]. \quad (22)$$

其中 $\alpha = \alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_4$. $2L, D, B$ 分别为液晶盒在 x, y, z 三个方向的尺度.

当液晶盒中有(15)式所示的 A 型孤子传播时, 假设孤子中心 ($Z = 0$) 位于液晶盒中心 ($x = 0$), 由(21)式计算得到系统的能量耗散率为

$$P = P_1 = P_{10} + P_{11}. \quad (23)$$

其中

$$P_{11} = BD \left[\left(-\frac{\alpha_1 s^2}{4} + \frac{\tau_2 s}{\tau} + \frac{\tau_1}{\tau^2} \right) \frac{4W^2 \beta_0}{\xi(W^2 + 1)(1 + W^2 \beta_0^2)} \right.$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1 - 2\tau_2}{4} s^2 - \frac{\tau_2 + 2\tau_1}{\tau} s + \frac{2\tau\tau_1 - \tau_1}{\tau^2} \right)$$

$$\times \left. \frac{4W}{\xi(W^2 + 1)} \tan^{-1}(\beta_0 W) \right]. \quad (24)$$

式中 $\beta_0 = \tanh(\xi L)$, $\xi = \frac{(\gamma - 1)W}{\eta\lambda}$. 由(22)和(23)式可知液晶盒中孤子所对应的能量耗散率为

$$P_1 - P_{10} = P_{11}. \quad (25)$$

在(25)式中令 $L \rightarrow +\infty$, 可得从 $x = -\infty$ 到 $x = +\infty$ 的系统中孤子能量耗散率为

$$P_s = P_{11}(L \rightarrow +\infty) = BD \left[\left(-\frac{\alpha_1 s^2}{4} + \frac{\gamma_2 s}{\tau} + \frac{\gamma_1}{\tau^2} \right) \frac{2W}{1+W^2} \lambda + 2\lambda\theta_0 \left(\frac{\alpha_1 - 2\gamma_2}{4} s^2 - \frac{\gamma_2 + 2\gamma_1}{\tau} s + \frac{2\gamma_1\gamma - \gamma_1}{\tau^2} \right) \right] \eta. \quad (26)$$

由(26)和(6)式可得: 当 $s = 0$ 时, $P_s = 0$. 由(26)和(15)式可以看出: $P_s \propto \eta$, 且有 $P_s > P_c \equiv P_s(\eta = \eta_c)$. 即外界向系统输入的功率大于孤子的最低功率时, 才可能有 A 型孤子产生. P_s 与 η 的关系见图 5. 其中 $\gamma = 0.96$, $s = 50 \text{ 秒}^{-1}$. 显然, (26)式已不依赖孤子中心位于液晶盒中心的假设.

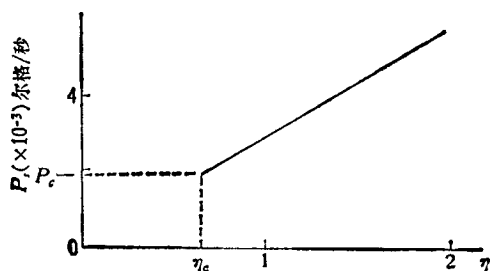


图 5 $\gamma = 0.96$; $s = 50 \text{ 秒}^{-1}$

四、透射光强

将液晶盒置于两个正交偏振片之间. 设入射到液晶盒上的偏振光强为 I_0 , 经检偏振片出射的光强为 I , 则有

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2\alpha, \quad (27)$$

其中 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$, $\delta = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy (n - n_0)$, λ_0 为光在真空中的波长, α 为偏振片极化偏振方向与液晶中寻常光振动方向的夹角^[18]. 当 $\alpha = 45^\circ$, 且两偏振片在 $x-z$ 平面时, 有

$$\delta = Dn_0 \{ [1 - (1 - n_0^2/n_c^2) \sin^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} - 1 \},$$

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda_0}. \quad (28)$$

下面以 MBBA 为例讨论

1. 入射光为单色光

取 $D = 2 \times 10^{-3}$ 厘米, $n_0 = 1.535$, $n_c = 1.745$ ^[19], 由(15)和(28)式可得给定的 γ 和 λ_0 下的 $I/I_0 - Z/\eta$ 曲线(图 6). 图 6 中的虚线为直线 $I/I_0 = 0.5$. 将曲线 $I/I_0 - Z/\eta$ 位

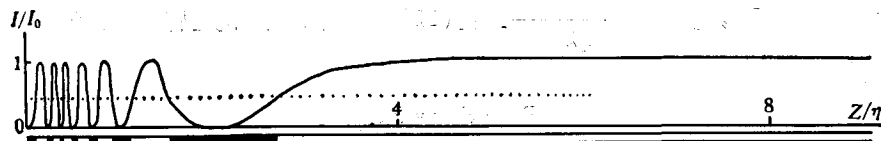
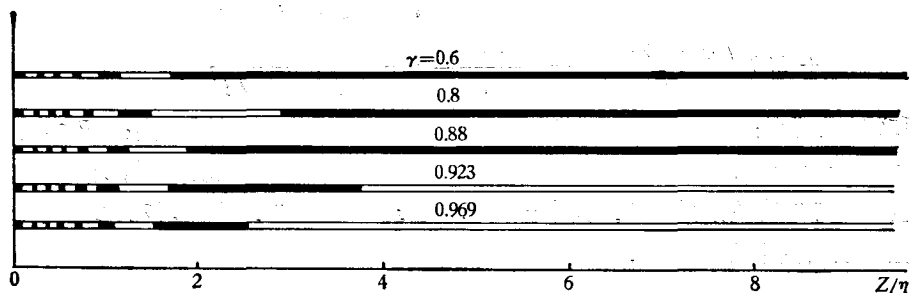
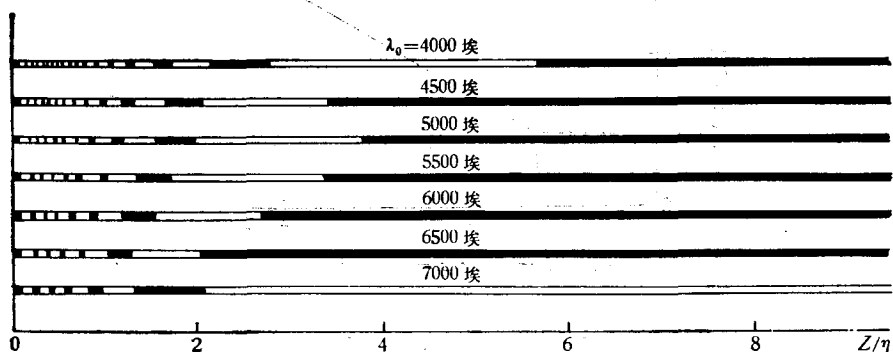


图6 单色透射光光强分布和干涉条纹图

 $\lambda_0 = 6328$ 埃; $r = 0.96$ 

(a)



(b)

图7 单色光下孤子传播的干涉条纹图

于虚线以下部分视为“黑”，虚线以上部分视为“白”，可得黑白相间的干涉条纹图（图6）。图7(a)为 $\lambda_0 = 6328$ 埃， $r = 0.6, 0.8, 0.88, 0.923, 0.969$ 的干涉条纹图。图7(b)中 $r = 0.96$ ， $\lambda_0 = 4000$ 埃，4500 埃，5000 埃，5500 埃，6000 埃，6500 埃，7000 埃。这些干涉条纹图的特点是：孤子中心（ $Z = 0$ ）为黑纹；各图都左右（ $Z \rightarrow -Z$ ）对称； λ_0 固定时 r 越小黑纹越少， r 越大孤子中心黑纹越窄且黑纹越密集； $|Z|$ 很大时必定为全黑或全白；相同的 r 下， λ_0 越大孤子中心黑纹越宽且黑纹越稀。由图6和7不难得到给定 η 下的 I/I_0-Z 曲线和干涉条纹随 Z 分布图。它们也可被看作是给定 η 值下某一初始时刻的 I/I_0-X 曲线和干涉条纹随 X 分布图。随着时间的推移它们将以速度 η 沿 x 轴正向做整体平移。

2. 入射光为复色光

当入射光为连续谱时，应有

$$I/I_0 = \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda_0 I(\lambda_0) \right\} \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda_0 I_0(\lambda_0) \right\}^{-1}. \quad (29)$$

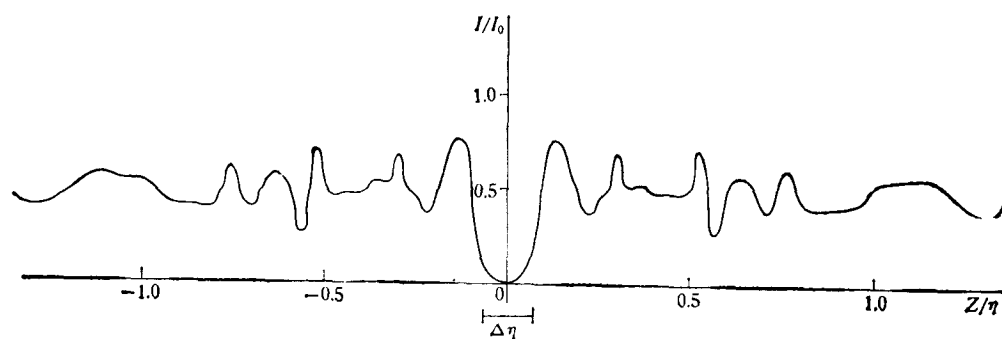


图 8

对于分立谱,并假定 $I_0(\lambda_0) = \text{常数}$,有

$$I/I_0 = \frac{1}{N} \sum_{\lambda_0} I(\lambda_0)/I_0(\lambda_0). \quad (30)$$

式中 N 为分立谱数. 图 8 是 $\gamma = 0.96$ 的 $I/I_0 - Z/\eta$ 曲线. 其中取 $\lambda_0 = 4000$ 埃, 4500 埃, 5000 埃, 5500 埃, 6000 埃, 6500 埃, 7000 埃. $N = 7$, $n_0 = 1.535$ (假设它不随 λ_0 而变^[20]), $n_e - n_0$ 取自文献[19]. 图 8 中 Δ (无量纲) 为孤子黑纹宽度 (曲线 $I/I_0 - Z/\eta$ 在最大值一半以下部分定义为“黑”). 由图 8 可以看出: 在 $Z = 0$ 处, $I/I_0 = 0$. 在这附近是一很深的谷. 深谷两侧各有一较宽的高峰. 上述特点给出两条亮线夹着黑纹的干涉花样. 除此之外, 曲线渐趋平缓, 相应于一片“灰白”. 图 8 的横坐标是 Z/η , 所以当 γ , n_0 和 n_e 与 λ_0 的关系确定后, 有 $\Delta \propto \eta$. 由此可知: 在同一温度下同一液晶材料中激发出的两个孤子, 较宽的黑纹有较大的速度 (即“胖子”跑得快, “瘦子”跑得慢). 将图 7(b) 与图 8 对比可以看出: 黑纹边缘是有颜色的: 靠近黑纹一侧为紫色, 渐变为黄色, 最后是红色.

对同一液晶材料, 当温度改变时, γ , n_0 和 n_e 与 λ_0 的关系都随之而变, 由此可得 Δ 与温度关系. 对不同的液晶材料, γ , n_0 和 n_e 与 λ_0 关系及它们随温度而变的特性也有所不同, 这些也影响 Δ 的改变.

五、实验分析

文献[12]和[13]是关于 MBBA 液晶中指向波传播的实验报告. 实验是在没有外场下进行的. 根据文献[3]: 实验中膜片的运动在液晶盒中建立了速度梯度, 在第一级近似下可以看成: 液晶盒中心层 (与膜片厚度相同) $s = 0$, 中心层以上及以下两层液晶分别有 $s > 0$ 和 $s < 0$. 本文前述结果可分别应用于这三层.

实验中在单色会聚偏振光下拍摄到液晶分子垂直排列的干涉花样, 且在膜片推动功率较小时不出现波, 这些表明: 实验可能对应于本文 A 型孤子.

对比理论与实验的单色光 (6328 埃) 和复色光干涉条纹图看出两者特征一致 (实验图取波传播速度均匀的那一段, 以下同). 实验上确实是“胖子”跑得快, “瘦子”跑得慢. 由实验, 有 $L = 15$ 厘米, $B = 5$ 厘米, $d = 10^{-3}$ 厘米, $c = 10$ 厘米/秒, 取 $K = 10^{-4}$

达因, $\gamma_2 = -0.8$ 泊, $\gamma = 0.96$, $v = 0.5$ 毫米/秒(得到 $\theta_0 = 81.9^\circ$, $\lambda = 2.2 \times 10^{-4}$ 厘米, $\tau = 3.8 \times 10^{-2}$ 秒, $\eta = 1.6 \times 10^3$), 代入(30)式, 可得复色光下的黑纹宽度 $\delta_{\text{理}} = \Delta\lambda = 0.8$ 毫米, 而实验给出 $\delta_{\text{实}} \sim 1$ 毫米. 实验测得系统能量耗散率数量级为 10^2 尔格/秒, 代入实验数据给出理论结果为 193.16 尔格/秒; 理论给出实验尺度下孤子能量耗散率与 P , 几乎没有差别(实验中 $2L$ 已约为孤子半宽度 $\frac{(1-\gamma)W}{\eta\lambda}$ 的 23 倍). 实验上只看到三条距离不等、速度不同、宽度有别的黑纹, 说明这不是普通的周期波. 上述各点说明: 在一定意义上(见第六节), 实验给出的正是本文 A 型孤子. 关于对实验的其它讨论见文献[3].

六、讨 论

1. 本文推求(4)式时用了近似(3)式. 实际上, K_1, K_2, K_3 并不严格相等. 计及这些差别, (4)式右端应补入: $\frac{K_3 - K_1}{2} \left[\cos 2\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \sin 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right]$ (在(4)式中取 $K = \frac{K_3 + K_1}{2}$), 可以作为微扰处理.

2. 在本文所讨论的情况, 有 $\theta = \theta(Z)$, $Z = x - ct$, $c \gg v$, 所以

$$\frac{d\theta}{dt} = (v - c) \frac{d\theta}{dZ} \approx -c \frac{d\theta}{dZ} = \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

此即(5)式的近似.

3. 当 $\eta = 0$ 时, 由图 2 可有一新的 D 型孤子, 它相应于初速为零的粒子从 $\theta = \theta_0$ 的山头开始沿 θ 增加方向运动, 最后回到 $\theta = \theta_0$ 并停留于此.

4. 从(10)式可以看出 γ 是一个重要的参数. 系统地改变 γ 可更仔细地将理论与实验对照(例如, $\gamma > 1$ 没有孤子). 改变 γ 的办法至少有三类: 一是改变实验温度, 但应注意此时 n_0 和 n_z 与 λ_0 的关系亦随之改变; 二是引入不随时间而变的外磁(电)场(详见本文第二节); 三是选用不同的液晶材料.

5. 严格说来, 实验^[12,13]中所看到的三条黑线, 应该是一个整体, 对应于(4)式偏微分方程的一个多孤子解, 象 sine-Gordon 方程的双孤子解一样, 并不是一个真正的行波. 然而当黑线比较分离时, 多孤子解的每一部分的性质与相应的单孤子行波解的性质基本一样. 本文第五节(和文献[3])中把实验的每一条黑线用单个 A 型孤子来解释, 正是在这个意义上说的.

本文所用的孤子定义是通用的^[1,2,21,22], 即不限于经碰撞后分开形状不变的“不可消灭的孤粒子”^[22]. 文中第二至第四节是关于均匀切变流动下的理论结果. 第五节是在假定一定的速度分布后, 对实验^[12,13]的分析. 两部分有相对独立性.

感谢诸国桢同志在文献[13]发表前向我们提供了有关的实验图片.

参 考 文 献

- [1] e. g. See, A. R. Bishop, J. A. Krumhansl and S. E. Turlinger, *Physica D*, **1**(1980), 1; A. R. Bishop and T. Schneider, eds., *Solitons and Condensed Matter Physics*, Springer-Verlag, Berlin (1978); H. Wilhelmsson, ed., *Physica Scripta*, **20**(1979), 289.
- [2] 林 磊, 凝聚态中的孤子, 见《第一届全国统计物理与凝聚态理论学术会议录》华中工学院出版社, (1983).
- [3] Lin Lei (林磊), Shu Changqing (舒昌清), Shen Juelian (沈觉莲), P. M. Lam (林沛文), Huang Yun (黄昀), *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1335.
- [4] W. Helfrich, *Phys. Rev. Lett.*, **21**(1968), 1518.
- [5] P. G. de Gennes, *J. Physique*, **32**(1971), 789; F. Brochard, *J. Physique*, **33**(1972), 607.
- [6] J. Leger, *Solid State Commun.*, **10**(1972), 697; **11**(1972), 1499.
- [7] J. Prost, in *Liquid Crystals of One- and Two-Dimensional Order*, edited by W. Helfrich and G. Heppke, Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [8] R. Pindak *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 1193.
- [9] E. Carr and R. Kozlowski, in *Liquid Crystals*, edited by S. Chandrasekhar, Hayden, London (1981).
- [10] R. Kozlowski and E. Carr, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, (Letters), **64**(1981), 299.
- [11] M. Yamashita *et al.*, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **68**(1981), 79.
- [12] Zhu Guozhen (诸国桢), *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1332.
- [13] 诸国桢, 倪 惠, 张文竹, 物理学报, **32**(1983), 845.
- [14] R. Ribotta, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1212.
- [15] L. Lam (林磊), *Z. Physik, B*, **27**(1977), 369.
- [16] M. Büttiker and R. Landauer, *Phys. Rev., A*, **23**(1981), 1397.
- [17] L. Lam (林磊) and M. Lax, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 9.
- [18] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergaman, Oxford (1964).
- [19] Y. Takahashi, T. Uchida and M. Wada, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **66**(1981), 171.
- [20] R. Chang, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **30**(1975), 155;
何雪华, 物理, **2**(1981), 107.
- [21] V. G. Makhankov, *Phys. Rep., C*, **35**(1978), 1.
- [22] 李政道, 场论与粒子物理学, 科学出版社, (1980), 87页.

SOLITON PROPAGATION IN LIQUID CRYSTALS UNDER SHEAR FLOW

LIN LEI SHU CHANG-QING

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Detailed calculations of the properties of soliton propagation related to director motion in nematic liquid crystals under shear flow (including the presence of external magnetic or electric field) are given for the first time. Analytic soliton solutions are obtained when wave velocity is large. The properties of soliton solution, the energy of soliton and the interference patterns of polarized (monochromatic or white) light caused by the movement of such solitons are calculated and discussed. Recent experiments of Refs. [12] and [13] are analysed and the dark lines observed in liquid crystal MBBA are shown to correspond to the type A soliton presented in this paper.