

de Sitter 时空中的真空能动张量

喻 乃 昌

(北京师范大学物理系)

1984 年 1 月 16 日收到

提 要

利用 Gilkey 的结果,本文求得了标量场、旋量场和矢量场的格林函数的 DeWitt-Schwinger 展开中的 a_3 系数,并由此求得了 de Sitter 时空中这些场的真空能量张量在大质量下的近似。

弯曲时空背景上的量子化物质场的重整化真空能动张量,在考虑物质场对背景时空的反作用时是必需的,同时也是分析量子过程本身所需要知道的。但其计算一般比较困难。本文利用 Gilkey 的结果,得到了标量场、旋量场和矢量场的格林函数的 DeWitt-Schwinger 展开中的 a_3 系数,并由此求得了 de Sitter 时空中大质量场的重整化真空能量动量张量。

一、Gilkey 的结果

Gilkey^[1] 曾讨论过紧致、光滑、无边界的黎曼流形 M 上的微分算符的谱。设 V 为 M 上的光滑矢量丛, $(x_1, \dots, x_d)$ 为 M 在 x_0 点附近的局部坐标系的基, $(e_1, \dots, e_r)$ 为 V 在 x_0 附近的基, D 为 V 上的微分算符,在局部系中表示为

$$D = - \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b \right), \quad (1)$$

其中 g^{ij} 为 M 的逆变度规张量的分量乘以 $r \times r$ 单位矩阵, a^i 和 b 都是 $r \times r$ 矩阵。令

$$\exp(-SD)u(x) = \int K(s, x, y, D)u(y)dv(y), \quad (2)$$

式中 $dv(y)$ 为 M 的体元。 $u(x)$ 为 V 的任意光滑截面。则可以证明:

$$K(s, x, y, D) \approx \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x, D) s^{(n-d)/2} (s \rightarrow 0^+). \quad (3)$$

引入 V 上的协变微分算符 D_{∇} , 其联络 w_i 由

$$a^i - 2g^{ij}w_j + g^{iR}\Gamma_{iR}^i = 0 \quad (4)$$

决定,定义 $W_{ij} = w_{i,j} - w_{j,i} + w_i w_j - w_j w_i$,

$$E = D_{\nabla} - D. \quad (5)$$

W_{ij} 即为矢量丛 V 上由联络 w_i 决定的曲率张量。 Gilkey 讨论了展开式(3), 求得了 E , 结果见表 1。

表 1

因 子	系数	因 子	系数	因 子	系数
$R_{ja}^a \beta^b$	-18/71	$W_{ab}^a W_{ab}^b$	1/148	$E_{ja}^a E_{ja}^b$	1/60
$R_{ja}^a R^{ia}$	17/71	$W_{ab}^a W_{ab}^b$	1/186	EE_{ja}^a	1/12
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-2/71	$W_{ab}^a W_{ab}^b$	1/60	$E_{ja}^a E$	1/12
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-4/71	$W_{ab}^a W_{ab}^b$	1/60	$E_{ja}^a E^{ia}$	1/12
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma \rho$	9/71	$W_{ab}^a W_{ab}^b$	-1/30	E^3	1/6
RR_{ja}^a	28/71	$R_{ab}^a R^{ab} W^{ab}$	-1/60	$EW_{ab}^a W^{ab}$	1/30
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-8/71	$R_{ab}^a R^{ab} W^{ab}$	1/90	$W_{ab}^a EW^{ab}$	1/60
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	24/71	$RW_{ab}^a W^{ab}$	-1/72	$W_{ab}^a W^{ab} E$	1/30
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma \rho$	12/71	$R_{ab}^a W^{ab} \gamma$	0	RE_{ja}^a	-1/36
R^3	-35/9 × 71	$R_{ja}^a W^{ab} \gamma$	0	$R_{ja}^a E^{ia} \beta$	-1/90
$RR_{ab}^a R^{ab}$	14/3 × 71	$R_{ab}^a W^{ab} \gamma$	0	$R_{ja}^a E^{ia}$	-1/30
$RR_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-14/3.71			$E_{ja}^a W^{ab} \gamma$	-1/60
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	208/9.71			$W_{ab}^a E^{ia} \beta$	1/60
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-64/3.71			EER	-1/12
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	16/3.71			ER_{ja}^a	-1/30
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-44/9.71			ER	1/72
$R_{ab}^a R^{ab} \gamma$	-80/9.71			$ER_{ab}^a R^{ab}$	-1/180
				$ER_{ab}^a R^{ab} \gamma$	1/180

(E₆ 系数为各项之和)

实际上, E_n 系数是局部几何量, 其推导方法对非紧致流形也成立, 在非紧致流形, 非正定度规下其结果和 Gilkey 的结果是一样的^[2].

二、 a_3 系 数

考虑标量场 φ , Dirac 旋量场 ψ 和矢量场 A_μ , 其场方程分别为

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - \xi R - m^2)\varphi = 0; \quad (6a)$$

$$(\gamma^\mu \nabla_\mu + m)\psi = 0; \quad (6b)$$

$$(\delta_a^\beta \nabla_\mu \nabla^\mu - \nabla_a \nabla^\beta - R_a^\beta - m^2 \delta_a^\beta)A_\beta = 0. \quad (6c)$$

现在分别求它们的格林函数及其 DeWitt-Schwinger 展开.

1. 标量场 格林函数 $G(x, x')$ 满足

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - \xi R - m^2)G(x, x') = -\delta(x, x'), \quad (7)$$

其中 $\delta(x, x') = g^{-1/2}(x)\delta(x, x')$, $g(x) = -\det(g_{\mu\nu})$. 利用 DeWitt-Schwinger 固有时表述^[4]:

$$G(x, x') = i \int_0^\infty ds \langle x, s | x', 0 \rangle, \quad (8)$$

则得 $\langle x, s | x', 0 \rangle$ 满足的方程

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x, s | x', 0 \rangle = -(\nabla_\mu \nabla^\mu - \xi R - m^2) \langle x, s | x', 0 \rangle \quad (9)$$

及初始条件

$$\langle x, s | x', 0 \rangle|_{s=0} = \delta(x, x').$$

令

$$\langle x, s | x', 0 \rangle = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{s^2} \exp \left[-i \left(m^2 s - \frac{\sigma(x, x')}{2s} \right) \right] \cdot Q(x, x', s), \quad (10)$$

式中 $\sigma(x, x')$ 为 x 和 x' 两点间的测地距离的平方的一半.

$$\Delta^{1/2}(x, x') = g^{-1/4}(x) D^{1/2}(x, x') g^{-1/4}(x'), \quad D(x, x') = -\det(-\sigma_{j\mu\nu}).$$

把 $Q(x, x', s)$ 作展开

$$Q(x, x', s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') (is)^n, \quad (11)$$

则有 $G(x, x')$ 的 DeWitt-Schwinger 展开:

$$G(x, x') = \frac{\Delta^{1/2}}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \exp \left[-i \left(m^2 s - \frac{\sigma}{2s} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(is)^n. \quad (12)$$

DeWitt 给出了 a_0, a_1 和 a_2 . 令

$$\langle x, s | x', 0 \rangle = e^{-im^2 s} \langle x, s | x', 0 \rangle^*,$$

则

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x, s | x', 0 \rangle^* = -(\nabla_\mu \nabla^\mu - \xi R) \langle x, s | x', 0 \rangle^*, \quad (13)$$

$$\langle x, 0 | x', 0 \rangle^* = \delta(x, x').$$

在(13)式中令 $u = is$, 和由(2)式得到的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial s} K(s, x, y, D) = -DK(s, x, y, D) \quad (14)$$

及初始条件

$$K(s, x, y, D)|_{s=0} = \delta(x, y)$$

比较, 可得

$$D = -(\nabla_\mu \nabla^\mu - \xi R). \quad (15)$$

把相应于 $\langle x, s | x', 0 \rangle^*$ 的固有时展开:

$$\langle x, s | x', 0 \rangle^* = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{s^2} \exp \left[\frac{i\sigma(x, x')}{2s} \right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, x') (is)^n, \quad (16)$$

作替换 $u = is$, 和(3)式比较, 得到

$$\frac{1}{(4\pi)^2} a_n = E_{2n}. \quad (17)$$

由(1), (15), (4)和(5)式可知: $W_{ij} = 0$, $E = -\xi R$. 由这些结果和附录的表 1 即可知 a_3 .

2. 旋量场 格林函数满足方程^[3]

$$i\gamma[\gamma^\mu G_{j\mu} + mG(x, x')] = -\delta(x, x'), \quad (18)$$

G 为双旋量, γ 矩阵的惯例见文献[3]. 引入 $\bar{G}(x, x')$ 使

$$G(x, x') = -i[\gamma^\mu \bar{G}_{j\mu}(x, x') - m\bar{G}(x, x')]\gamma^{-1},$$

则可得方程:

$$\bar{G}_{j\mu}^*(x, x') - \frac{1}{4} R \bar{G}(x, x') - m^2 \bar{G}(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (19)$$

对 $\bar{G}$ 仿上引入 DeWitt-Schwinger 展开, 经过一些计算, 可得

$$D = - \left(\nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{1}{4} R \right), \quad (20)$$

D 作用在双旋量上. 建立标架 $\{h_a^\mu\}$, 可以写出 D 在局部系中的形式

$$\begin{aligned} D = & -g^{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} \Gamma_{R\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} \Gamma_{ja\beta} \frac{\partial}{\partial x^i} \right. \\ & - \Gamma_{ij}^R \frac{\partial}{\partial x^R} - \Gamma_{ij}^R \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} \Gamma_{R\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} \Gamma_{ja\beta, i} \\ & \left. + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \Sigma^{[\alpha\beta]} \Sigma^{[\gamma\delta]} \Gamma_{ia\beta} \Gamma_{i\gamma\delta} \right\} + \frac{1}{4} R, \end{aligned}$$

其中 α, β 为标架指标, i, j 为坐标指标, $\Gamma_{ia\beta} = h_{a\mu} h_{\beta j}^\mu$,

$$\Sigma^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta].$$

和(4)式比较, 可得

$$w_i = \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} \Gamma_{ia\beta}, \quad E = D_\nabla - D = -\frac{1}{4} R, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W_{ij} &= w_{j,i} - w_{i,j} + w_i w_j - w_j w_i \\ &= \frac{1}{2} \Sigma^{[\alpha\beta]} R_{\alpha\beta i j}. \end{aligned} \quad (22)$$

由此即可得 $\bar{G}$ 的 DeWitt-Schwinger 展开中的 a_3 系数.

3. 矢量场 格林函数满足方程

$$(\delta_a^\beta \nabla_\mu \nabla^\mu - \nabla_a^\beta \nabla^\beta - R_a^\beta - m^2 \delta_a^\beta) G_{\beta\gamma} = -\delta_{a\gamma} \delta(x, x'). \quad (23)$$

为求有效作用量, 由后面的讨论得知只要求出下面的格林函数 $\bar{G}$ 的 DeWitt-Schwinger 展开的 a_3 系数,

$$(\delta_a^\beta \nabla_\mu \nabla^\mu - R_a^\beta - m^2 \delta_a^\beta) \bar{G}_{\beta\gamma} = -\delta_{a\gamma} \delta(x, x'), \quad (24)$$

仿标量场中的讨论, 对 $\bar{G}$ 作 DeWitt-Schwinger 展开, 有

$$(D)_a^\beta = -(\delta_a^\beta \nabla_\mu \nabla^\mu - R_a^\beta),$$

D 作用在矢量上, 相应地有

$$\begin{aligned} E_a^\beta &= -R_a^\beta, \quad (w_i)_a^\beta = -\Gamma_{ai}^\beta, \\ (W_{ij})_a^\beta &= R_{aij}^\beta. \end{aligned} \quad (25)$$

由此即可得到 a_3 系数.

三、能量动量张量

考虑标量场 φ , 旋量场 ψ 和矢量场 A_μ , DeWitt^[3] 导出单圈有效作用量为

$$W_{\text{eff}} = \int d^4x \left\{ -\lim_{x' \rightarrow x} \text{Tr} \frac{D^{1/2}}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp \left[-i \left(m^2 s - \frac{\sigma}{2s} \right) \right] \cdot Q(x, x', s) \right\}, \quad (26)$$

式中 Tr 表示对旋量指标及矢量指标求迹, 对矢量场, Frolov^[5] 曾指出, 有效作用量可如下得到, 即把由(24)式得到的 Q 代入(26)式中, 然后减去 $\xi = 0$ 的标量场的有效作用量. 对旋量场情形, 这里的 Q 是指由(19)式得到的 Q 乘一个因子 $(-1/2)$.

考虑 de Sitter 时空中的物质场的真空极化. 在这个时空中, 可以建立绝热真空态, 实际上绝热真空态就是 de Sitter 不变真空态^[6]. 格林函数的 DeWitt-Schwinger 展开正是其绝热展开, 可以证明, 用 DeWitt-Schwinger 展开方法得到的格林函数, 就是绝热真空态中的两点格林函数^[7]. 因此, 对 de Sitter 时空的绝热真空态的能动张量, 可以用 DeWitt-Schwinger 展开方法近似求解.

由(26)式计算发现有效作用量是发散的, 但是, 可以把与 Q 的固有时展开中 $n = 0, 1, 2$ 相应的发散项归入含曲率张量二次项的引力作用量中, 其效果是对引力常数 G , 宇宙因子常数 Λ , 及参量 a, b 进行重整化^[6]. 从而可得重整化后作用量

$$\begin{aligned} W_{\text{eff,ren}} &= - \int d^4x g^{1/2}(x) \text{Tr} \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2s} \sum_{n=3}^\infty a_n(x) (is)^n \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n=3}^\infty \frac{(n-3)!}{m^{2n-4}} \text{Tr} \int g^{1/2}(x) a_n(x) d^4x, \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $a_n(x) = a_n(x, x)$. 对旋量场情形这里的 a_n 是旋量场中的 a_n 乘一个因子 $(-1/2)$. 用量纲分析可知: $a_n \approx R^n$, R 为时空曲率标量. 若 $|R|/m^2 \ll 1$, 仅需保留 a_3 项,

$$W_{\text{eff,ren}} = \frac{1}{32\pi^2 m^2} \text{Tr} \int d^4x g^{1/2}(x) a_3(x). \quad (28)$$

而真空的能动张量可由 $T^{\mu\nu} = 2g^{-1/2} \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}}$ 得到.

考虑 deSitter 时空, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$, 其中高斯曲率 K 为常量. 用二节中的 a_3 , 仅保留在 deSitter 时空中对能动张量有贡献的项, 可以得到三种场的有效作用量分别为

$$\begin{aligned} W_{\text{eff,ren}}^{(s=0)} &= \frac{1}{32\pi^2 m^2} \int d^4x g^{1/2} \left\{ \frac{1}{7!} \left[\frac{35}{9} R^3 - \frac{14}{3} R R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{14}{3} R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right. \right. \\ &\quad - 4 R_{\alpha\beta} R^{\beta\gamma} R_{\gamma}^{\alpha} + \frac{20}{9} R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma\beta\delta} - \frac{8}{9} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\gamma\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\beta} \\ &\quad + \frac{8}{3} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta lm} R_{lm}^{\gamma\delta} \left. \right] + \left[-\frac{1}{6} \xi^3 R^3 + \frac{1}{12} \xi^2 R^3 + \frac{1}{180} \xi R R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{180} \xi R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{72} \xi R^3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{eff,ren}}^{(s=1/2)} &= -2W_{\text{eff,ren}}^{(s=0)(\xi=0)} - \frac{1}{64\pi^2 m^2} \int d^4x g^{1/2}(x) \left\{ \frac{1}{480} R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right. \\ &\quad - \frac{1}{180} R R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{180} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\gamma\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\beta} - \frac{1}{120} R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{lm}^{\gamma\delta} R_{\alpha\beta}^{lm} \\ &\quad \left. - \frac{1}{60} R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} R_{\gamma}^{\delta} R_{\delta}^{\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$W_{\text{eff,ren}}^{(s=1)} = 3W_{\text{eff,ren}}^{(s=0)(\xi=0)} + \frac{1}{32\pi^2 m^2} \int d^4x g^{1/2} \left\{ -\frac{1}{30} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{lm}^{\beta\delta} R^{\alpha\gamma lm} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{60} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta lm} R_{lm}^{\gamma\delta} + \frac{1}{180} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\mu\nu\sigma} R_{\mu\nu\sigma}^{\beta} \\
& -\frac{7}{360} R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{4}{45} R R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{3}{72} R^3 \}.
\end{aligned} \quad (31)$$

利用上面的三个公式及 $T^{\mu\nu} = 2g^{-1/2} \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}}$, 即可求得 deSitter 时空中大质量场的真空能量动量张量

$$T^{\mu\nu}(\xi=0) = -\frac{37K^3}{2016\pi^2 m^2} g^{\mu\nu} + \frac{K^3}{16\pi^2 m^2} \left[72\xi^3 - 36\xi^2 - 6\frac{1}{5}\xi \right] g^{\mu\nu}, \quad (32)$$

$$T^{\mu\nu}(\xi=1/2) = -2T^{\mu\nu}(\xi=0)(\xi=0) - \frac{11K^3 g^{\mu\nu}}{640\pi^2 m^2} \approx 0.02 \frac{K^3}{\pi^2 m^2} g^{\mu\nu}, \quad (33)$$

$$T^{\mu\nu}(\xi=1) = 3T^{\mu\nu}(\xi=0)(\xi=0) - \frac{79}{160} \frac{K^3 g^{\mu\nu}}{\pi^2 m^2} \approx -4 \frac{K^3 g^{\mu\nu}}{\pi^2 m^2}. \quad (34)$$

Bunch 等人曾用点分离方法讨论了有质量标量粒子在 de Sitter 时空中的真空能动张量, 本文的结果与他的结果在本文近似条件下一致。

本文是在刘辽先生指导下完成的。本文曾得到中国科学院系统科学研究所刘书麟先生和我校引力组的先生们的热情帮助, 谨向他们致以谢意。

参 考 文 献

- [1] P. B. Gilkey, *J. Diff. Geom.*, 10 (1975), 601.
- [2] R. M. Wald, *Commun. Math. Phys.*, 70(1979), 221.
- [3] B. S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields*, Gordon and Breach, New York, (1965).
- [4] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D*, 17 (1978), 946.
- [5] Y. P. Frolov, *et al.*, *Phys. Lett. B*, 123 (1983), 197.
- [6] Birrell and Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge. (1982).
- [7] T. S. Bunch and L. Parker, *Phys. Rev. D*, 20 (1979), 2499.
- [8] T. S. Bunch and P. C. W. Davils, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 360 (1978), 117.

THE RENORMALIZED VACUUM STRESS-ENERGY TENSOR OF de SITTER SPACE-TIME

YU NAI-CHANG

(Department of Physics, Beijing Normal University)

ABSTRACT

By applying Gilkey's result, we obtain the coefficient a_3 in DeWitt-Schwinger proper time expansion of the Green function for scalar, spinor and vector fields respectively. so finally we succeed in obtaining the renormalized vacuum stress-energy tensor for deSitter space-time in large mass approximation.