

$$\frac{dp}{d\psi} = \lambda(\psi - \psi_s)^\alpha = f(\psi - \psi_s), \quad (4)$$

$$\frac{\mu_0}{2} \frac{dI^2}{d\psi} = \mu(\psi - \psi_s)^\alpha = g(\psi - \psi_s). \quad (5)$$

其中 ψ_s 为等离子体边界上的 ψ 值. 在边界面的外侧 f, g 都为零, μ/λ 表示逆磁电流的大小, 它与角向比压 β_p 的关系为

$$\frac{\mu}{\lambda} = R_p^2 \left(\frac{1}{\beta_{p_{\text{input}}}} - 1 \right). \quad (6)$$

R_p 为等离子体的大半径, $\beta_{p_{\text{input}}}$ 是计算时给定的角向比压值. α 表示等离子体电流的分布状态. α 越大, 电流分布越向等离子体中心集中.

等离子体迴路与外线圈迴路的耦合迴路方程组为

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + R_i I_i = E_i \quad (i = 2, 3, \dots, N). \quad (7)$$

其中 N 等于外迴路的总数加 1. 我们取第一个迴路为等离子体电流环的自身等效迴路. 并假定在某个时刻等离子体的总电流 I_p 在迭代过程中不变:

$$I_p = \iint_{\psi > \psi_s} j_\varphi dr dz = C, \quad (8)$$

等离子体与外迴路电流的互感为

$$M^{pc} = \frac{2\pi}{I_p} \int_{\psi > \psi_s} \Phi^c(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz. \quad (9)$$

这里 Φ^c 是外线圈单位电流在单位等离子体电流环内所产生的磁通.

三、计算方法

为了使求解磁流体平衡方程和迴路方程组的迭代过程更简单化, 本文采用积分法(在进行多次计算时, 将单位电流的源函数存盘, 则这种积分方法可以大大节省时间). 把方程(1)改写成如下形式:

$$L\psi + S(\psi)F(r', \psi) = 0. \quad (10)$$

其中

$$S(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi \geq 0 \\ 0 & \psi < 0. \end{cases}$$

如果将 $\psi \geq 0$ 区域的 $F(r', \psi)$ 对应于空间许多断续的电流环, 注意到满足方程

$$LG = \delta(R - R')\delta(z - z')$$

的格林函数 G 的形式为^[2]

$$G(r, z, r', z') = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{rr'} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\},$$

$$k^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2},$$

式中 $K(k)$, $E(k)$ 分别为第一、第二类完全椭圆积分; 则求解方程(1)可改为对下述方程进行迭代计算.

$$\phi_{n+1}^p = L^{-1}S(\phi_n - \phi_{in})F(r', \phi_n - \phi_{in}), \quad (11)$$

这里 L^{-1} 是积分算子, 它可以写成

$$L^{-1} = \int G(r, z; r', z') dr' dz'. \quad (12)$$

ϕ_{in} 是第 n 次迭代时所得到的等离子体边界上的 ϕ 值. 在迭代过程中, 我们要求等离子体的界面与虚界面(或限制器)内切, 即取

$$\phi_{in} = \text{MAX} \phi_{in}(I). \quad (13)$$

其中 $I = 1, 2, \dots, N_L$; N_L 是虚边界(或限制器)点数. 求解时取 ϕ 在对称轴上或无穷远处等于零为边界条件.

迴路方程的差分格式取以下的简单形式:

$$\frac{M'I' - M^o I^o}{\Delta t} + \frac{R'I' + R^o I^o}{2} = \frac{E' + E^o}{2}. \quad (14)$$

式中上标“ o ”表示 t 时刻, “ $'$ ”表示 $t + \Delta t$ 时刻; M, I, R, E 分别为电感矩阵、电流矢量、电阻矩阵及电压矢量.

计算的具体步骤如下.

1. 为了简化, 取半径为 a 、电流均匀分布的等离子体为迭代的初值. 根据给定的 I_p , 算出网格点上的 i_ϕ 及 ϕ^p, L^p (等离子体自感) 及 M^{pi} ($i = 2, 3, \dots, N$). 在假定 $M' = M^o$ 的条件下, 求解迴路方程(7), 算出各外线圈的电流 I_i ($i = 2, 3, \dots, N$).

2. 用所求的 I_i 值, 算出各网格点上的 ϕ^e , 并和 ϕ^p 一起确定各限制点 $\phi_{in}(I)$, ($I = 1, \dots, N_L$), 用(13)式定出 ϕ_{in} .

3. 由给定的 λ, μ, β_p 和 α , 利用(4), (5)式求出新的 i_ϕ .

4. 由 i_ϕ 求出 ϕ^p, L^p, M^{pe} , 再解迴路方程, 求出新的 I_i , 进而求出新的 ϕ^e 和 ϕ , 再定出新的 ϕ_{in} , 算出新的 i_ϕ .

5. 如此反复迭代, 直至空间各点的电流值及等离子体与外线圈的互感值收敛为止.

6. 把时间步长增加 Δt , 用已求的解为新的初解, 与 $t + \Delta t$ 时刻的电压, 电阻等值一起, 求解迴路方程(7), 按照上述过程, 可得到 $t + \Delta t$ 时刻的平衡等离子体位形, 其他时刻依此类推.

四、主要计算结果

由于 GBH-1T 是一个轴对称的快速放电装置, 我们以它为例进行了计算. 图 1 为该装置真空室剖面及周围线圈布局示意图. 中心螺管 3 组线圈串联; 垂直场线圈 10 圈并联; 成形场线圈 2 圈并联.

为了检验本计算方法的收敛情况, 我们对两种不同收敛精度(相对误差为 10^{-3} 以及 10^{-5}) 下的结果进行了比较, 两者符合很好. 图 2 是两种不同虚限制点的选择所得到的结果. 第一种选择是图上的 $\times$ 点与直径上的另外两点(未标出). 第二种选择是在第一种选择计算所得到的等离子体边界上(实线)取任意一点(图中带 $+$ 的点)为虚限制点中的一点, 其他点选在这个边界之外. 可以看出, 第二种选择计算所得到的等离子体边界(虚线)与第一种选择的边界也基本一致. 另外, 为了比较不同初始解选取的影响, 我们从两种不同

初始解出发(一种为圆截面,均匀电流分布;另一种为非圆截面,非均匀电流分布),计算所得的两个结果也符合较好。

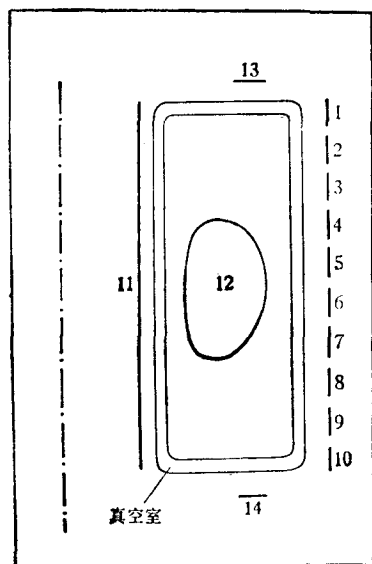


图1 真空室周围线圈布局

1—10 为垂直场线圈; 11 为内螺管线圈; 12 为等离子体; 13 和 14 为成形场线圈

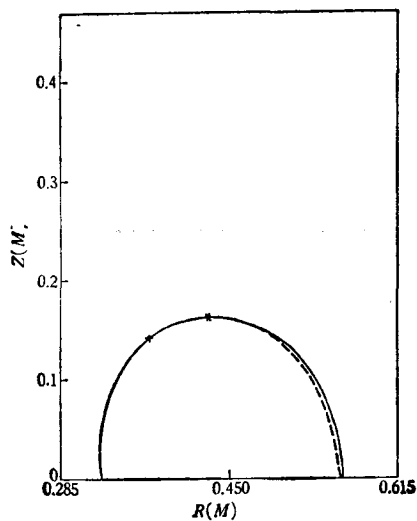


图2 在边界磁面上选择不同虚限制点时计算收敛情况比较
计算取表1中C组参数

在检验本程序可靠性的基础上,我们对 GBH-1T 放电参数可能得到的等离子体位形进行了计算,计算所选取的几组主要参数见表1(计算假定内螺管线圈与垂直场线圈并联)。

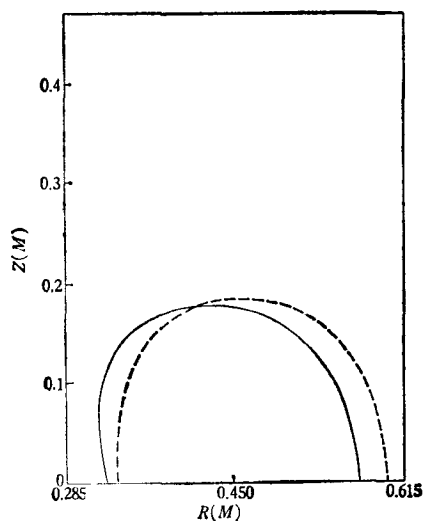


图3 外迴路有耦合与无耦合两种情况下的结果
 $\beta_p = 1.5$; $\alpha = 1$; A_z 组参数

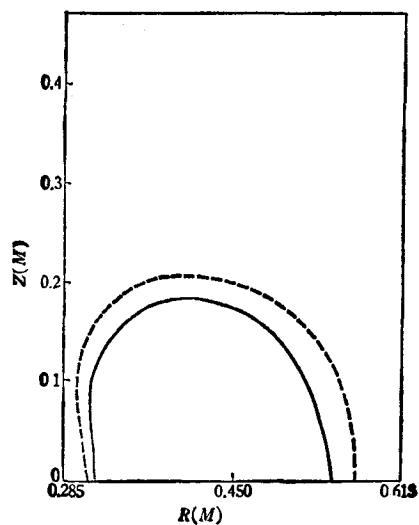


图4 等离子体磁面随时间演化
——为 $10\mu s$ ---为 $25\mu s$

表 1 各组放电参数的主要数值

	内 螺 管 线 圈		垂直场线圈		成 形 场 线 圈		等 离 子 体
	电压 (KV)	电流 (KA)	电流 (KA)		电压 (KV)	电流 (KA)	电 流 (KA)
A	10	36.6	a	55.1	10	2.2	62.4
			b	41.3			
B	20	72.5	92.9		10	1.87	114.2
C	20	73.2	110.1		20	7.5	124.5

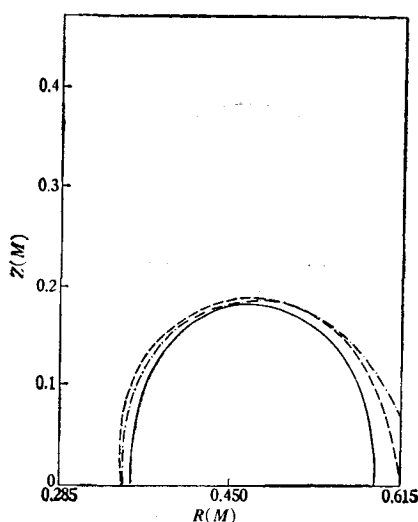


图 5

— 为 $\alpha = 0$;
 --- 为 $\alpha = 1$;
 - · - 为 $\alpha = 1.5$;
 A_b 组参数

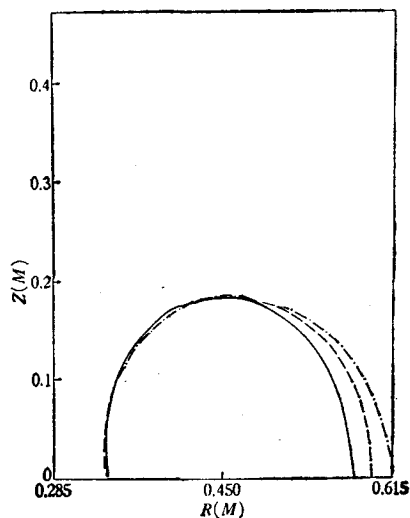


图 6

— 为 $\alpha = 0$;
 --- 为 $\alpha = 1$;
 - · - 为 $\alpha = 1.5$;
 A_b 组参数

图 3 是考虑与不考虑¹⁾外迴路影响两种情况下的结果。虚线表示不考虑外迴路计算时所得到的等离子体位形,实线表示有外迴路影响所得到的位形。显然,两者的结果是不同的。图 4 是采用 B 组参数,假定 $\beta_p = 1$, $\alpha = 0$, 短路时间为 $100\mu s$ 时,等离子体在 $10\mu s$ 时与 $25\mu s$ 时的截面。从图中可看出,随着外场的衰减,等离子体的截面膨胀。图 5 和图 6 分别是在 $\beta_p = 1$ 和 $\beta_p = 0.5$ 时, α 取 0, 1, 1.5 三种情况下的等离子体磁面变化情况。图 7 是 $\alpha = 1$, β_p 为不同值的等离子体磁面的位形。显然, β_p 越大,等离子体越向外侧移。

在现有的线圈结构及联接方式下,尽管我们对各种可能的放电参数进行了许多计算,等离子体的磁面形状虽然可以从近于圆形变化到近于 D 形,但其最大拉长比不超过 2。

1) 不考虑外迴路影响是指在确定等离子体的平衡形态时,外线圈电流保持常数。在计算托卡马克装置的平衡形态时属于这一种情况。而本文主要讨论有外迴路影响的情况,即外线圈电流在迭代中要随等离子体位形的变化而变化。

这个结论与文献[3]的结果是一致的。看来,只有在成形场线圈上加上与等离子体电流方向同向的电流,才有可能得到拉长度更大的等离子体。

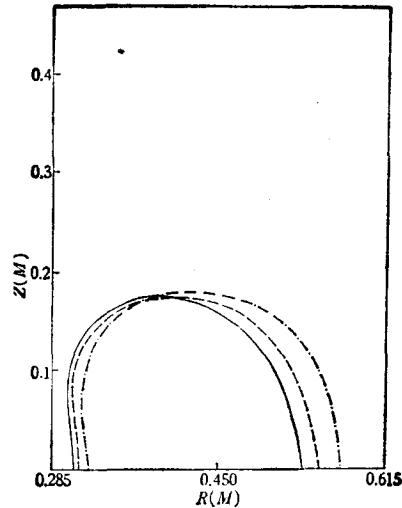


图7 同一种电流分布,不同 β_p 值的比较

$\alpha = 1$ — 为 $\beta_p = 0.5$; ---- 为 $\beta_p = 1$; -.-. 为 $\beta_p = 1.5$; A_s 组参数

参 考 文 献

- [1] Y. Suzuki, *et al.*, Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Research IAEA-CN-33/A11-2.
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Elektrodinamika splosh sred* (Electrodynamics of continuous media), Fizmatgiz, Moscow, (1959).
- [3] A. Kadish, *Nucl. Fusion*, 13(1973) 756.

COMPUTING OF FREE-BOUNDARY MHD-EQUILIBRIA FOR PLASMA COUPLING WITH EXTERNAL CIRCUIT

LIN RUI-YAN LIU MIN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Considering characteristics of fast discharge, the equilibrium equation of axisymmetric plasma with free boundary is solved by means of integration.

Combining with circuit equations, the equilibrium configurations of plasma and their variations with time are obtained in the case of plasma strongly coupling with the external circuit.