

非均匀等离子体湍流的重正化准线性理论

Misguich-Balescu 理论的推广

秦 运 文

(中国西南物理研究所)

1982年10月4日收到

提 要

本文把 Misguich 和 Balescu 建立的均匀等离子体湍流的重正化准线性理论推广到非均匀等离子体湍流。在弱耦合和弱非均匀性近似下,得到传播算符和平均湍性碰撞算符的明晰表达式。非均匀性除对算符中的扩散贡献、共振加宽或频移、Dupree 衰减和平均分布函数在速度空间的陡度效应等作出一定的修正之外,还引出新的指数微分算符:在传播算符中是涨落电场关联函数非均匀性导致的新的速度微分算符,在平均湍性碰撞算符中是平均分布函数非均匀性导致的新的空间微分算符。平均分布函数非均匀性还使得在平均湍性碰撞算符中出现的两个互为逆运算的自由流传播算符不能抵消,从而使包含在(直接作用于平均分布函数的)传播算符中的非马尔可夫效应显露出来。

一、引 言

在等离子体强湍流理论研究中,Weinstock^[1]引入统计系综平均算符 $A: A\phi = \langle \phi \rangle = \bar{\phi}$,把涨落 Власов 方程分离成相互耦合的平均方程和涨落方程,然后用与涨落方程相联系的齐次算符方程的解 $U_A(t, t')$ 表示涨落方程的形式解 $f'(t)$ ——分布函数的涨落分量 ($\langle f' \rangle = 0$)。把这个解代入平均方程,便得到描述平均分布函数 ($\bar{f} = \langle f \rangle$) 变化的动力学方程。

在弱耦合近似下,Weinstock 给出在理论中起实际作用的算符

$$A(t, t_0) = U_A(t, t_0)(1 - A)$$

按耦合级数展开的前几项

$$A(t, t_0) = \bar{U}(t, t_0) + \cdots \quad (1)$$

第一项是描述 $\bar{f}$ 演化的平均传播算符: $\bar{f}(t) = \bar{U}(t, t_0)\bar{f}(t_0)$,可惜未能给出它的明晰表达式,并且在把它作用于函数时,要进行复杂的粒子轨道计算。用时序算符 X 表示的 $A(t, t_0)$ 的微扰展开式¹⁾

$$A(t, t_0) = X \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' [\bar{L}(t') + (1 - A)L'(t')] \right\}$$

1) Bantford-Thomson 展开式(见文献[2])。

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [-U * (1-A)L']^n U. \quad (2)$$

虽然等价于 Weinstock 展开式(1),但其第一项 ($n=0$)

$$U(t, t_0) = X \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \bar{L}(t') dt' \right\} \quad (3)$$

未计及湍性碰撞. 在(2)和(3)式中

$$\bar{L}(t) = -(e/m)\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad L'(t) = -(e/m)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad (4)$$

m 和 e 分别为电子质量和电荷绝对值; $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t)$ 为电场系综平均值,而 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 为它的涨落分量 ($\langle \mathbf{E} \rangle = 0$).

为了使展开式第一项包含湍性场对粒子轨道的扰动, Misguich 和 Balescu^[3] 引入待定平均湍性碰撞算符 $G(t)$, 令算符 $\Lambda(t, t_0)$ 围绕描述在平均场中的演化和平均湍性碰撞的传播算符

$$\bar{U}(t, t_0) = X \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' [\bar{L}(t') - G(t')] \right\} \quad (5)$$

而展开;根据 $\Lambda(t, t_0)$ 的表示(2)式,这样的展开式为

$$\begin{aligned} \Lambda(t, t_0) &= X \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' [\bar{L}(t') - G(t') + (1-A)L'(t') + G(t')] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ -\bar{U} * [(1-A)L' + G] \}^n \bar{U}. \end{aligned} \quad (6)$$

比较(2)和(6)两式看到,后者是前者的重正化展开. 由于在(2)式中取第一项的近似是准线性近似,自然把在(6)式中取第一项的近似称为重正化准线性近似.

Misguich 和 Balescu^[3] 建立了均匀等离子体湍流的重正化准线性理论,在弱耦合近似下得到传播算符 $\bar{U}(t, t_0)$ 和湍性碰撞算符 $G(t)$ 的明晰表达式. 由于考虑到时序效应,大大改进了 Weinstock 湍流理论,诸如在传播算符中出现新的共振加宽项和与 Dupree 衰减同量级的附加空间导数项等等.

二、基本方程式

Misguich 和 Balescu^[3] 从自洽电子 Власов-Poisson 方程组

$$[\partial_t + \bar{L}(t) + L'(t)]f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (7)$$

$$e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' \partial_{\mathbf{x}} V(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \int d\mathbf{v}' f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \quad (8)$$

出发讨论均匀等离子体湍流. 不过方程(7)适用于非均匀等离子体,而平均方程的差别仅在于有无 $\bar{L}(t)f(t)$ 项. 直到归纳出整个基本方程组之前,文献[3]一直保留着这一项(见文献[3]的方程(3.7)和第4节开始的那一段话). 最重要的是, Misguich-Balescu 理论的核心是求出传播算符 $\bar{U}(t, t_0)$ 和湍性碰撞算符 $G(t)$, 而决定它们的方程组与平均方程无关.

诚然,(8)式表述的 Poisson 方程仅适用于均匀等离子体(如把 $f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$ 换为 $f'(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)$, 它也适用于非均匀等离子体). 但是,第一,该方程不包含在基本方程组之

内;第二,当用到这个方程求色散关系时,采用也适用于非均匀等离子体的 Fourier 表象(见文献[3]的(5.3.1)式).

因此,非均匀等离子体湍流重正化准线性理论的基本方程组仍然是文献[3]的(3.7)和(4.2)–(4.4)式

$$[\partial_t + \bar{L}(t)]\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = G(t)\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (9)$$

$$G(t) = (e^2/m^2)\partial_{\mathbf{v}} \cdot \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\bar{U}(t, t-\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t-\tau) \rangle \cdot \partial_{\mathbf{x}}\bar{U}(t-\tau, t), \quad (10)$$

$$\bar{U}(t, t') = X \exp \left\{ -\int_{t'}^t dt'' [\bar{L}(t'') - G(t'')] \right\}, \quad (11)$$

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (e/m) \int_0^\infty d\tau \bar{U}(t, t-\tau) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t-\tau) \cdot \partial_{\mathbf{v}} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t-\tau). \quad (12)$$

在(10)和(12)式中已令初始时刻趋于负无穷大.

在非均匀电子等离子体里,电子趋向于移动一个数量级为非均匀性线度 l_n 的距离,以消除非均匀性. 由于电子平均动能的数量级是电子温度 T_e , 在无外场的非均匀湍性等等离子体里必然存在数量级为 T_e/el_n 的平均电场. 在两次连续湍性碰撞之间,平均电场引起的电子动量变化为 $eE_0\nu \sim T_e\nu/l_n$ 的数量级(ν 为碰撞频率),它与电子平均动量 $\sqrt{mT_e}$ 之比等于 λ/l_n (λ 为碰撞自由程). 因此,在弱非均匀性近似下 ($\lambda \ll l_n$),可以忽略平均电场对粒子轨道的扰动,即在(11)式的 $\bar{L}(t)$ 中忽略平均电场 $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t)$. 下面将在这种近似下解方程组(10)和(11),求算符 $\bar{U}$ 和 G 的表达式.

三、算符 $\bar{U}$ 和 G 的迭代零级近似及涨落电场谱密度

在(11)式中忽略 G 便得到 $\bar{U}$ 的迭代零级近似

$$\bar{U}_0(t, t-\tau) = \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}). \quad (13)$$

它是一般准线性近似下的结果. 在把 $\bar{U} = \bar{U}_0$ 代入(10)式时,注意到对易关系

$$\exp(\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{x}})\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} + \mathbf{a})\exp(\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \quad (14)$$

($\mathbf{a} = \text{const}$) 和传播算符的群性质

$$\bar{U}(t, t')\bar{U}(t', t) = \bar{U}(t, t) = 1, \quad (15)$$

便得到 G 的迭代零级近似

$$G^0(t) = \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{D}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{v}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{F}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}}. \quad (16)$$

它在形式上与均匀等离子体湍流的结果相同^[3],只是对于非均匀等离子体湍流,扩散张量

$$\mathcal{D}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_0^\infty d\tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \tau \mathbf{v}, \tau) \quad (17)$$

和出现在重正化理论中的张量

$$\mathcal{F}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_0^\infty d\tau \tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \tau \mathbf{v}, \tau) \quad (18)$$

依赖于空间坐标,因为涨落电场关联函数

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, \tau) = (e^2/m^2) \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t - \tau) \rangle \quad (19)$$

是空间非均匀的.

将涨落电场的 Fourier 变换

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (20)$$

代入(19)式得到

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, \tau) = \int d\mathbf{k} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (21)$$

式中的 Fourier 表象

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau) = (e^2/m^2) \int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}(t) \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t - \tau) \rangle \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}], \quad (22)$$

其谱密度

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau) \exp(i\omega\tau), \quad (23)$$

而 Laplace 变换

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau) = \int_c \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega\tau) \quad (24)$$

的积分回路在收敛半平面 $\text{Im}\omega > \sigma_0$ 内, 且平行实轴:

$$\int_0^t d\tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau) \exp(-\sigma\tau) < \infty \quad \sigma > \sigma_0. \quad (25)$$

四、算符 $\bar{U}$ 和 G 的迭代一级近似及“扩散”方程

将 $G^0(t)$ (16) 式代入(11)式, 便得到 $\bar{U}$ 的一级近似

$$\bar{U}^0(t, t - \tau) = X \exp \left\{ \int_{t-\tau}^t dt' C(t') \right\}, \quad (26)$$

$$C(t) \equiv -\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{D}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{F}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \partial_{\mathbf{x}}. \quad (27)$$

(26) 式中的时序算符和算符 C 各项之间的不可对易性, 简单地反映了粒子湍性运动的复杂性. 为了得到 $\bar{U}$ 和 G 的明晰表达式, 除弱耦合近似(类似 Born 近似, 即指数上的算符取到关联函数的一级; (9)–(12) 就是这种近似下的方程组)之外, 还把弱非均匀性近似应用于关联函数. 具体说来, 将忽略关联函数二阶以上的空间导数(在第五节讨论这种近似的条件). 在一定程度上, 这相当于允许平均分布函数的梯度有小的变化.

利用 Magnus 展开式^[4,5]

$$X \exp \left[\int_{t_0}^t dt' C(t') \right] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t, t_0) \right], \quad (28)$$

可以完成(26)式中的时序算符运算. 在已有文献中一般给出了前三项的表达式, 它们是

$$\Delta_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt_1 C(t_1), \quad (29)$$

$$\Delta_2(t, t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [C(t_1), C(t_2)], \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(t, t_0) = & \frac{1}{6} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \{ [[C(t_1), C(t_2)], C(t_3)] \\ & + [[C(t_3), C(t_2)], C(t_1)] \}. \end{aligned} \quad (31)$$

上式中中括号表示换位算符. 利用展开式 (28) 的优点是在弱耦合与弱非均匀性近似下, 展开式自动在某项截断. 我们还需要 Δ_4 和 Δ_5 的表达式 (见附录一). 算符 $C(t)$ 与 Δ_5 中的被积式对易, 故 Δ_5 以后的项恒等于零. 在完成了时序算符运算之后, (26) 式具有如下形式:

$$\bar{U}^0(t, t - \tau) = \exp(A + B), \quad (32)$$

$$A \equiv -\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad B \equiv (\Delta_1 + \tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5. \quad (33)$$

从 Δ_i 表达式看到, 需要作直到五重的不同时刻的 $C(t)$ 算符换位运算. 在作了这样一些运算之后, 可以对 B 的表达式按微分算符合并同类项.

算符 B 的量级是关联函数的量级. 借助于 Zassenhaus 公式^[6]

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B \cdot \exp D_2 \cdot \exp D_3 \cdots \quad (34)$$

可以把 (32) 式写成一些指数算符的乘积. 已有文献一般只给出了 D_2 和 D_3 的表达式,

$$D_2 = -\frac{1}{2} [A, B], \quad D_3 = \frac{1}{3} [B, [A, B]] + \frac{1}{6} [A, [A, B]]. \quad (35)$$

在我们的近似之下还需要 D_4 和 D_5 , 其表达式见附录二. 对 (32) 式应用 (34) 式之后, 如果注意到 $A_1 \sim B_1 \sim S$ 时,

$$\exp(A_1 + B_1) = \exp A_1 \cdot \exp B_1 = \exp B_1 \cdot \exp A_1, \quad (36)$$

最终得到

$$\begin{aligned} \bar{U}^0(t, t - \tau) = & \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\boldsymbol{\gamma} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\boldsymbol{\delta} : \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}) \\ & \cdot \exp(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (37)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} = & -\frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 (\partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}^0) + \int_0^\tau d\theta_1 (\partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}^0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{12}) \\ & - \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}^0) + \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}^0) - \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \partial_{\mathbf{x}} \\ & \cdot \boldsymbol{\Delta}^{12}) + \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\phi}^{12}) \\ & - \frac{1}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L} \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\Delta}^{12} + \boldsymbol{\Delta}^{32})] - \frac{\tau^3}{8} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}^0) \\ & + \frac{\tau^2}{6} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}^0) - \frac{\tau^2}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{12}) \\ & + \frac{\tau}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\phi}^{12}) - \frac{\tau}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\Delta}^{12} + \boldsymbol{\Delta}^{32})] \\ & + \frac{1}{6} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\phi}^{12} + \boldsymbol{\phi}^{32})] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 (\mathcal{L}^2 \partial_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{32}), \quad (38) \\ \boldsymbol{\gamma} = & -\frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \boldsymbol{\mathcal{D}}^0 + \int_0^\tau d\theta_1 \boldsymbol{\mathcal{F}}^0 - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \boldsymbol{\Delta}^{12} \\ & - \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \boldsymbol{\mathcal{D}}^0) + \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \boldsymbol{\mathcal{F}}^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^+ \Delta^{12}) + \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \phi^{12}) \\
& -\frac{1}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}(\Delta^{12} + \Delta^{32})] - \frac{\tau^3}{8} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \mathcal{D}^0) \\
& + \frac{\tau^2}{6} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \mathcal{F}^0) - \frac{\tau^2}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \Delta^{12}) \\
& + \frac{\tau}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \phi^{12}) - \frac{\tau}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 (\Delta^{12} + \Delta^{32})] \\
& + \frac{1}{6} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 (\phi^{12} + \phi^{32})] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 (\mathcal{L}^2 \Delta^{32}), \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta = & \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \mathcal{D}^0 - \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \mathcal{F}^0 + \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \Delta^{12} - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \phi^{12} \\
& + \frac{1}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 (\Delta^{12} + \Delta^{32}) + \frac{\tau^3}{4} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \mathcal{D}^0) \\
& - \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \mathcal{F}^0) + \frac{\tau^2}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \Delta^{12}) - \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \phi^{12}) \\
& + \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}(\Delta^{12} + \Delta^{32})] - \frac{1}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}(\phi^{12} \\
& + \phi^{32})] + \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 (\mathcal{L} \Delta^{32}) + \frac{\tau^4}{10} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \mathcal{D}^0) \\
& - \frac{\tau^3}{8} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \mathcal{F}^0) + \frac{\tau^3}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \Delta^{12}) \\
& - \frac{\tau^2}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \phi^{12}) + \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 (\Delta^{12} + \Delta^{32})] \\
& - \frac{\tau}{4} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 (\phi^{12} + \phi^{32})] \\
& + \tau \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 (\mathcal{L}^2 \Delta^{32}) - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 (\mathcal{L}^2 \phi^{32}) \\
& + \frac{1}{60} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\tau - \theta_1)^3 (\mathcal{L}^2 \Delta^{12}) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 \int_0^{\tau_3} d\theta_4 \int_0^{\tau_4} d\theta_5 [\mathcal{L}^2 (\Delta^{32} + \Delta^{34} + \Delta^{35})], \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon = & -\frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 (\partial_x \cdot \mathcal{D}^0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\partial_x \cdot \Delta^{12}) \\
& - \frac{\tau^2}{3} \int_0^\tau d\theta_1 (\mathcal{L} \partial_x \cdot \mathcal{D}^0) - \frac{\tau}{2} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \partial_x \cdot \Delta^{12}) \\
& - \frac{1}{3} \int_0^\tau d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L} \partial_x \cdot (\Delta^{12} + \Delta^{32})], \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & \int_0^{\tau} d\theta_1 \mathcal{D} + \frac{\tau}{2} \int_0^{\tau} d\theta_1 (\mathcal{L} \mathcal{D}^0) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L} \Delta^{12}) \\
& + \frac{\tau^2}{6} \int_0^{\tau} d\theta_1 (\mathcal{L}^2 \mathcal{D}^0) + \frac{\tau}{4} \int_0^{\tau} d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 (\mathcal{L}^2 \Delta^{12}) \\
& + \frac{1}{6} \int_0^{\tau} d\theta_1 \int_0^{\tau_1} d\theta_2 \int_0^{\tau_2} d\theta_3 [\mathcal{L}^2 (\Delta^{12} + \Delta^{32})]. \quad (42)
\end{aligned}$$

在(38)–(42)式中,除进行了积分变量变换 $t_i = t - \sum_{n=1}^i \theta_n$ 之外,还引进了如下表示:

$$\begin{aligned}
\tau_i &= \tau - \sum_{n=1}^i \theta_n, & \mathcal{L} &= \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \\
\Delta^{mn} &= \mathcal{D}^0(t_m) - \mathcal{D}^0(t_n), & \phi^{mn} &= \mathcal{F}^0(t_m) - \mathcal{F}^0(t_n), \\
(\Delta^{mn})_{ij}^+ &= (\Delta^{mn})_{ij} + (\Delta^{mn})_{ji}, & (\mathcal{D}^0)_{ij}^+ &= (\mathcal{D}^0)_{ij} + (\mathcal{D}^0)_{ji}. \quad (43)
\end{aligned}$$

与均匀等离子体湍流比较起来, $\bar{U}^0$ 变得更为复杂,但除了出现新的速度微分指数算符(指与 ϵ 相联系的算符)之外,结构形式未变.

现在计算湍性碰撞算符的迭代一级近似表达式. 在把(37)式代入(10)式的时候,

$$G(t) = (e^2/m^2) \partial_{\mathbf{v}} \cdot \int_0^{\infty} d\tau \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \bar{U}^0(t, t-\tau) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t-\tau) \rangle \cdot \partial_{\mathbf{v}} \bar{U}^0(t-\tau, t). \quad (44)$$

对涨落电场作 Fourier 变换(见(20)式), $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 与 $\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t-\tau)$ 换位便归结为 $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 与 $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ 换位. 由于不求下一级迭代近似, $G(t)$ 只作用于平均分布函数 $\bar{f}$. 在均匀平均分布函数的情况下,可以在(44)式中作代换(见对易关系(14)式)

$$\bar{U}^0(t, t-\tau) \rightarrow \bar{U}^0(t, t-\tau)_{\partial_{\mathbf{x}} = -i\mathbf{k}}, \quad \bar{U}^0(t-\tau, t) \rightarrow \bar{U}^0(t-\tau, t)_{\partial_{\mathbf{x}} = 0}. \quad (45)$$

在非均匀平均分布函数的情况下,不能作这样的代换,必须认真处理算符之间的对易关系. 附录三给出所需对易关系公式的推导方法.

首先,即使 α 是 $\mathbf{x}$ 的函数,近似到 $|\alpha|$ 的一级¹⁾,对易关系(14)式对 $\phi(\mathbf{x}) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ 仍是正确的. 其次,在 $\mathbf{b} = \text{const}$ 的情况下,近似到 $|a_{ij}(\mathbf{x})|$ 的一级

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) &= \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \cdot \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b}) \\
&\cdot \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}), \quad (46)
\end{aligned}$$

式中 $(\mathbf{a})_{ij}^+ = (\mathbf{a})_{ij} + (\mathbf{a})_{ji}$. 利用(14)和(46)式得到

$$\begin{aligned}
\bar{U}^0(t, t-\tau) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) &= \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cdot \exp(i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \cdot \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \\
&\cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \partial_{\mathbf{v}}) \cdot \exp(\boldsymbol{\gamma} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{v}}) \\
&\cdot \exp(-\mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(\boldsymbol{\delta} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}) \\
&\cdot \exp(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \partial_{\mathbf{v}}) \cdot \exp(\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \partial_{\mathbf{v}}). \quad (47)
\end{aligned}$$

而根据群性质(15)式,从(37)式得到

$$\bar{U}^0(t-\tau, t) = \bar{U}^0(t, t-\tau)^{-1} = \exp(-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{v}}) \cdot \exp(-\boldsymbol{\epsilon} \cdot \partial_{\mathbf{v}})$$

1) Born 近似意义下的一级;下同.

$$\begin{aligned} & \cdot \exp(-\delta: \partial_x \partial_x) \cdot \exp(-\gamma: \partial_x \partial_v) \cdot \exp(-\beta \cdot \partial_x) \\ & \cdot \exp(\tau v \cdot \partial_x). \end{aligned} \quad (48)$$

在弱耦合近似下, (44)式中第二个速度微分算符 ∂_v 可以移到 $\bar{U}^0(t-\tau, t)$ 的最后一个指数算符之前, 因此从(47)和(48)两式得到

$$\begin{aligned} \bar{U}^0(t, t-\tau) \exp(-ik \cdot x) \partial_v \bar{U}^0(t-\tau, t) &= \exp(-ik \cdot x) \cdot \exp(i\tau k \cdot v) \\ &\cdot \exp(-\tau v \cdot \partial_x) \cdot \exp(-ik \cdot \beta) \cdot \exp(-kk: \delta) \\ &\cdot \exp(-ik \cdot \delta^+ \cdot \partial_x) \cdot \exp(-ik \cdot \tilde{\gamma} \cdot \partial_v) \partial_v \cdot \exp(\tau v \cdot \partial_x), \end{aligned} \quad (49)$$

式中的 $\tilde{\gamma}$ 为 γ 的转置矩阵.

进一步的简化是利用对易关系(14)式和对易关系 ($\alpha = \text{const}$, 近似到 $|b|$ 的一级和 b_i 的空间二阶导数)

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \cdot \partial_x) \cdot \exp(b \cdot \partial_x) &= \exp \left\{ \left[1 + (\alpha \cdot \nabla) + \frac{1}{2} (\alpha \cdot \nabla) \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot (\alpha \cdot \nabla) \right] b \cdot \partial_x \right\} \cdot \exp(\alpha \cdot \partial_x), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \exp(av \cdot \partial_x) \cdot \exp(b \cdot \partial_v) &= \exp \left\{ \left[1 + a(v \cdot \nabla) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{a^2}{2} (v \cdot \nabla)(v \cdot \nabla) \right] b \cdot \partial_v \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ -a \left[1 + a(v \cdot \nabla) + \frac{a^2}{2} (v \cdot \nabla)(v \cdot \nabla) \right] b \cdot \partial_x \right\} \cdot \exp(av \cdot \partial_x) \end{aligned} \quad (51)$$

把算符 $\exp(-\tau v \cdot \partial_x)$ 移到紧靠 ∂_v 的位置上:

$$\begin{aligned} \bar{U}^0(t, t-\tau) \exp(-ik \cdot x) \partial_v \bar{U}^0(t-\tau, t) &= \exp(-ik \cdot x) \cdot \exp(i\tau k \cdot v) \\ &\cdot \exp(-ik \cdot \beta_{x \rightarrow x-\tau v}) \cdot \exp(-kk: \delta_{x \rightarrow x-\tau v}) \\ &\cdot \exp(-ik \cdot \mu \cdot \partial_x) \cdot \exp(-ik \cdot v \cdot \partial_v) \\ &\cdot \exp(-\tau v \cdot \partial_x) \partial_v \cdot \exp(\tau v \cdot \partial_x). \end{aligned} \quad (52)$$

量 β 和 δ 等是 x, v, t 和 τ 的函数, 在上式中引入了表示

$$\beta_{x \rightarrow x-\tau v} = \beta(x - \tau v, v, t; \tau), \dots \quad (53)$$

并且

$$\mu = [\varrho(\delta^+ + \tau \tilde{\gamma})], \quad v = [\varrho \tilde{\gamma}], \quad \varrho = 1 - \tau(v \cdot \nabla) + \frac{\tau^2}{2} (v \cdot \nabla)(v \cdot \nabla). \quad (54)$$

现在把(52)式代入(44)式. 注意到(22)式便有

$$\begin{aligned} G(t) &= \partial_v \cdot \int_0^\infty d\tau \int dk S(x, t | k, \tau) \exp(i\tau k \cdot v) \\ &\cdot \exp(-ik \cdot \beta_{x \rightarrow x-\tau v}) \cdot \exp(-kk: \delta_{x \rightarrow x-\tau v}) \\ &\cdot \exp(-ik \cdot \mu \cdot \partial_x) \cdot \exp(-ik \cdot v \cdot \partial_v) \cdot (\partial_v + \tau \partial_x). \end{aligned} \quad (55)$$

或者

$$G(t) = \partial_v \cdot \mathcal{D}(x, v, t | \partial_x, \partial_v) \cdot \partial_v + \partial_v \cdot \mathcal{F}(x, v, t | \partial_x, \partial_v) \cdot \partial_x. \quad (56)$$

这里的“扩散”张量

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{v}}) = & \int d\mathbf{k} \int_c \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tau] \\ & \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \tau \mathbf{v}}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \tau \mathbf{v}}) \\ & \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \partial_{\mathbf{v}}), \end{aligned} \quad (57)$$

重正化理论引入的新张量

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{v}}) = & \int d\mathbf{k} \int_c \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \omega) \exp[-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tau] \\ & \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \tau \mathbf{v}}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \tau \mathbf{v}}) \\ & \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \partial_{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (58)$$

将(56)式代入(9)式便得到描述平均分布函数变化的“扩散”方程

$$\begin{aligned} [\partial_t + \bar{L}(t)]\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = & [\partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{v}}) \cdot \partial_{\mathbf{v}} \\ & + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t | \partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{v}}) \cdot \partial_{\mathbf{x}}]\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (59)$$

实际上这个方程在形式上也不是扩散型的,何况张量 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 都是空间和速度的微分算符。

五、讨 论

我们把 Misguich-Balescu 理论推广到了非均匀等离子体湍流。在弱耦合与弱非均匀性近似下,得到了 $\bar{U}$ 和 G 的重正化准线性表达式。非均匀性对 $\bar{U}^0(t, t - \tau)$ 和 $G(t)$ 中的扩散贡献(α 项),共振加宽或频移(β 项),Dupree 衰减(δ 项)和分布函数在速度空间的陡度效应(γ 项)等作出一定的修正之外,还引出新的指数微分算符:在 $\bar{U}^0(t, t - \tau)$ 是速度微分算符(ϵ 项),在 $G(t)$ 是空间微分算符(μ 项),并且使 $\bar{U}^0(t - \tau, t)$ 包含的非马尔可夫效应在算符 $G(t)$ 中显露出来。所有这些导致 $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ 满足“扩散”方程(59)。

在(55)式中 τ 积分号下的 $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t | \mathbf{k}, \tau)$ 把 τ 积分区间限制在零到量级为关联时间 τ_c 的范围之内,从而(38)–(40)式和(54)式表明,算符 $G(t)$ 中的量 $\beta, \gamma, \delta, \mu$ 和 ν 显得是按参数 $\nu\tau_c/l$ 展开的(l 为关联函数非均匀性特征线度)。因此,关联函数的弱非均匀性条件为: $\nu\tau_c/l < 1$ 。粒子在量级为 τ_c 的时间内移动的距离 $\nu\tau_c$ 小于 l ,“感受”到的关联函数的非均匀性就小,使得可以忽略关联函数高阶空间导数。

在 $\bar{U}^0(t, t - \tau)$ 中出现 $\exp(\epsilon \cdot \partial_{\mathbf{v}})$ 和在 $G(t)$ 中出现 $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_{\mathbf{x}})$ 的原因不一样。前者起因于关联函数非均匀性($l \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon = 0$),后者起因于平均分布函数非均匀性($l_n \rightarrow \infty$ 时 $\mu = 0$)。关于这后一结论,作点说明。在均匀等离子体情况下,(44)式中 $\bar{U}^0(t, t - \tau)$ 的算符 $\partial_{\mathbf{x}}$ 只作用于 $\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t - \tau)$ 。作了电场的 Fourier 变换之后,可做代换(45)式。在非均匀等离子体情况下,不能做这样的代换,其原因在于 $\partial_{\mathbf{x}}$ 不仅作用于 $\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t - \tau)$,还要作用于空间非均匀的 $\bar{U}^0(t - \tau, t)\bar{f}$ 。算符 $\exp(-i\mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}})$ 与在它后面的算符不对易。当把它移到紧靠 $\partial_{\mathbf{v}}$ 时(从(51)式到(52)式一步),就产生了 $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_{\mathbf{x}})$ 。这时还使 β 和 δ “平移一距离”($-\tau\mathbf{v}$),并对 $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \partial_{\mathbf{v}})$ 作出新的关联函数非均匀性修正,修正后的 $\tilde{\gamma}$ 是(52)式中的 ν 。

非均匀性使 $\bar{U}^0(t - \tau, t)$ 导致的非马尔可夫效应的贡献在 $G(t)$ 中显露出来。在

Misguich-Balescu 理论中, $\bar{f}$ 没有时间位移, 非马尔可夫效应不明显. 但是它表现在 $\partial_{\mathbf{v}}$ 作用于 $\bar{U}^0(t-\tau, t)$ 和 $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 作用于 $\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t)$ (见(44)式). 事实上, 即使在均匀等离子体湍流的零级近似 $G^0(t)$ 中就已显露出非马尔可夫效应的贡献, 这就是 $\mathcal{S}^0$ 项. 然而在均匀等离子体的情况下, 在求仅作用于 $\bar{f}$ 的迭代一级近似 $G(t)$ 时, 代换(45)式和弱耦合近似致使 $\bar{U}^0(t-\tau, t)$ 仅含的 $\exp(-\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}})$ 被 $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 含的扩散项 $\exp(\partial_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_{\mathbf{v}})$ 抵消, 非马尔可夫效应就消失了. 在非均匀等离子体情况下, 虽然这样的抵消作用仍然发生 (这还涉及 $\bar{U}^0(t-\tau, t)$ 中其它一些项), 但 $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 中的自由流传播算符 $\exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}})$ 不能抵消 $\bar{U}^0(t-\tau, t)$ 中的自由流传播算符 $\exp(\tau \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}})$, 由于其间有 $\partial_{\mathbf{v}}$. 这就在 $G(t)$ 中出现 $\tau \partial_{\mathbf{x}}$ 项, 非马尔可夫效应又显露出来了.

在非均匀等离子体情况下, 如果作均匀关联函数近似, $\bar{U}^0(t, t-\tau)$ 便过渡到文献[3]的结果, 而 $G(t)$ 变为

$$G(t) = \partial_{\mathbf{v}} \cdot \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} S(t|\mathbf{k}, \tau) \exp(i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}) \cdot \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\delta} + \tau \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \partial_{\mathbf{x}}] \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \partial_{\mathbf{v}}) \cdot (\partial_{\mathbf{v}} + \tau \partial_{\mathbf{x}}), \quad (60)$$

式中的 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 同于文献[3]的表达式. 在均匀等离子体情况下, (60) 式自然过渡到文献[3]的结果.

附 录 一

利用文献[5]的方法, 可以求得 $\Delta_i(t, t_0)$, 其中

$$\Delta_4(t, t_0) = \frac{1}{12} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \{ [[[C(t_1), C(t_2)], C(t_3)], C(t_4)] + [[[C(t_4), C(t_1)], C(t_3)], C(t_2)] + [[[C(t_3), C(t_2)], C(t_4)], C(t_1)] + [[[C(t_3), C(t_4)], C(t_2)], C(t_1)] \}, \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta_5(t, t_0) = & \frac{1}{24} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_5 \{ [[[[C(t_3), C(t_2)], C(t_4)], C(t_5)], C(t_1)] \\ & + [[[[C(t_2), C(t_3)], C(t_4)], C(t_5)], C(t_1)] \\ & + [[[[C(t_3), C(t_4)], C(t_2)], C(t_5)], C(t_1)] \\ & + [[[[C(t_3), C(t_4)], C(t_3)], C(t_2)], C(t_1)] \} \\ & + \frac{1}{72} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_5 \\ & \cdot \sum_{(a, b, c, d)} [[[[C(t_a), C(t_b)], C(t_c)], C(t_d)], C(t_1)] \\ & + \frac{1}{36} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_5 \\ & \cdot \sum_{(a, b, c, d)} [[[[C(t_a), C(t_b)], C(t_c)], C(t_1)], C(t_d)] \\ & + \frac{1}{48} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_5 \\ & \cdot \sum_{(a, b, c, d)} [[[[C(t_a), C(t_b)], C(t_1)], C(t_c)], C(t_d)] \\ & + \frac{1}{720} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_5 \\ & \cdot 1 [[[[C(t_1), C(t_2)], C(t_3)], C(t_4)], C(t_5)], \end{aligned} \quad (A.2)$$

式中 $\{a, b, c, d\}$ 为 2, 3, 4, 5 的如下排列: a, b, c 依次递增或递减, $[a, b, c, d]$ 为 2, 3, 4, 5 的如下排列: a 只取 3 和 4; a, b, c 中, b 最大或最小. (a, b, c, d) 为 2, 3, 4, 5 的如下排列: $a > b$ 时, $c < d$; $a < b$ 时, $c > d$.

附 录 二

利用文献[6]的方法, 可以求得 D_i 表达式, 其中

$$D_4 = -\frac{1}{24} [A, [A, [A, B]]] - \frac{1}{8} [B, [A, [A, B]]] - \frac{1}{8} [B, [B, [A, B]]], \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} D_5 = & \frac{1}{120} [A, [A, [A, [A, B]]]] - \frac{1}{60} [B, [A, [A, [A, B]]]] \\ & + \frac{1}{20} [A, [B, [A, [A, B]]]] - \frac{1}{10} [B, [A, [B, [A, B]]]] \\ & + \frac{1}{10} [A, [B, [B, [A, B]]]] + \frac{1}{20} [B, [B, [A, [A, B]]]] \\ & + \frac{1}{30} [B, [B, [B, [A, B]]]]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

附 录 三

用 Zassenhaus 公式可以把 $\exp(A+B)$ 展开成如下两种形式:

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} [A, B]\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{3} [B, [A, B]]\right) \\ + \frac{1}{6} [A, [A, B]] \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

和

$$\begin{aligned} \exp B \cdot \exp A \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} [B, A]\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{3} [A, [B, A]]\right) \\ + \frac{1}{6} [B, [B, A]] \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

因此, 若 B 含小量, 准到 B 的一级,

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B = & \exp B \cdot \exp A \cdot \exp([A, B]) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} [A, [A, B]]\right) \\ & \cdot \exp\left(\frac{1}{6} [A, [A, [A, B]]]\right) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{24} [A, [A, [A, [A, B]]]]\right) \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

反复用 (A.7) 式将其右边的 $\exp A$ 逐渐往后移得到

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B = & \exp B \cdot \exp([A, B]) \cdot \exp A \cdot \exp\left(\frac{1}{2} [A, [A, B]]\right) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} [A, [A, [A, B]]]\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{8} [A, [A, [A, [A, B]]]]\right) \cdots \\ = & \exp B \cdot \exp([A, B]) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} [A, [A, B]]\right) \cdot \exp A \\ & \cdot \exp\left(\frac{1}{6} [A, [A, [A, B]]]\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{8} [A, [A, [A, [A, B]]]]\right) \cdots \\ = & \exp B \cdot \exp([A, B]) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} [A, [A, B]]\right) \\ & \cdot \exp\left(\frac{1}{6} [A, [A, [A, B]]]\right) \\ & \cdot \exp A \cdot \exp\left(\frac{1}{24} [A, [A, [A, [A, B]]]]\right) \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp B \cdot \exp([A, B]) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[A, [A, B]]\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{6}[A, [A, [A, B]]]\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{24}[A, [A, [A, [A, B]]]]\right) \cdot \exp A \cdots,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

用这个公式不难得到对易关系(46), (50), (51)式和

$$\exp(\mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{x}) \cdot \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \cdot \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \exp(\mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{x}), \tag{A.9}$$

式中 $\mathbf{b} = \text{const}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ 含小量, 在 $\mathbf{a} = \text{const}$ 的情况下, (A.9) 式是严格准确的, 是对易关系(14)式的特例.

参 考 文 献

- [1] J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 1045.
- [2] G. Benford and J. J. Thomson, *Phys. Fluids*, **15**(1972), 1496.
- [3] J. H. Misguich and R. Balescu, *J. Plasma Phys.*, **13**(1975), 385.
- [4] W. Magnus, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7**(1954), 649.
- [5] G. H. Weiss and A. A. Maradudin, *J. Math. Phys.*, **3**(1962), 771.
- [6] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.*, **8**(1967), 962.

RENORMALIZED QUASI-LINEAR THEORY OF TURBULENCE IN NON-UNIFORM PLASMA

GENERALIZATION OF MISGUICH-BALESCU THEORY

QIN YUN-WEN

(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan China)

ABSTRACT

The re-normalized quasi-linear theory of turbulence in uniform plasma, given by Misguich and Balescu, is generalized to the case of non-uniform plasma. In the weak-coupling and the weak non-uniformity approximation, the explicit expressions for the propagator and the average turbulent collision operator are obtained. Non-uniformity not only modifies the diffusion contribution, resonance broadening or frequency shift, Dupree damping and velocity-space slope effect of the average distribution function in these operators, but also produces new differentio-exponential operators—the velocity differential operator in the propagator due to non-uniformity of the time-space correlation function, and the space differential operator in the average turbulent collision operator due to non-uniformity of the average distribution function.

Non-uniformity of the average distribution function prevents two free-stream propagators that are inverse to each other in the expression for the average turbulent collision operator in terms of the propagators from compensating for each other, and as a result the non-Markovian contribution in the propagator acted immediately on the average distribution function appears.