

Lax 表示的 Kac-Moody 代数结构

吴 可 郭汉英
(中国科学院理论物理研究所)

王 世 坤
(中国科学院应用数学研究所)
1983年4月23日收到

提 要

本文指出,非线性(演化)系统的广义 Lax 表示所取值的代数,即延拓代数 $\mathcal{G} \times D(\lambda)$, 实质上是 Kac-Moody 代数. 这里, $\mathcal{G}$ 是一有限维李代数, $D(\lambda)$ 是谱参数 λ 的值域. 本文并利用 Dolan 关于主手征模型 Kac-Moody 代数的实现, 给出了一类 $1+1$ 维非线性(演化)系统的 Kac-Moody 代数的实现.

近年来,陆续发现许多非线性(演化)系统^[1-4]具有 Kac-Moody (以下简称 KM) 代数结构. 这个问题的探讨对于非线性系统的解生成技术、对称性和守恒律等问题的研究,是有意义的.

我们曾提及^[5],非线性(演化)系统的广义 Lax 表示所取值的代数,即无限维延拓代数 $\mathcal{G} \times D(\lambda)$, 实质上就是 KM 代数;而且,与主伪势的 Bäcklund 变换相联系的正规 Riemann-Hilbert 问题,也具有 KM 代数结构^[6]. 这里,我们将对第一个问题进行具体的分析. 并将利用 Dolan 对于主手征模型 KM 代数的分析,统一给出一类 $1+1$ 维非线性演化系统 Lax 表示的 KM 代数构造.

非线性(演化)系统的广义 Lax 表示,是指这样一组线性化方程:

$$\mathcal{D}_\mu Y = \Gamma_\mu Y, [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = 0. \quad (1)$$

其相容性条件为

$$\mathcal{D}_\nu \Gamma_\mu - \mathcal{D}_\mu \Gamma_\nu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = 0, \quad (2)$$

给出描述原系统的微分方程. 这里, $\mathcal{D}_\mu$ 与 Γ_μ 依赖于谱参数,比如说 λ , 其值域为 $D(\lambda)$. $\mathcal{D}_\mu$ 满足某布尼兹法则.

我们知道,相容性条件就是 Γ_μ 作为规范势的平联络条件,而 Γ_μ 总取值在一代数上,比如说 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 上. 由于 Γ_μ 又依赖于谱参数. 因此 Γ_μ 应取值在 $\mathcal{G} \times D(\lambda)$ 上. 事实上,这就是非线性系统延拓结构的代数. 如果 $D(\lambda)$ 包含连续域,比如实数域 $R(\lambda)$, 或复数域 $C(\lambda)$, 或 Riemann 球 $\bar{C}(\lambda) = C(\lambda) \cup \{\infty\}$, 那么, $\mathcal{G} \times D(\lambda)$ 就是一具有连续势的无限维代数. 显然,如果将 λ 在 $\Gamma(\lambda)$ 的解析区内展成幂级数,那么, $\Gamma(\lambda)$ 就取值在这样的生成元为

$$M_a^{(n)} = T_a \times t^n \quad T_a \in \mathcal{G} \quad n \geq 0 \quad (3)$$

所构成的代数上. 而这些生成元所形成的代数

$$[M_a^{(n)}, M_b^{(m)}] = C_{ab}^c M_c^{(m+n)} \quad (4)$$

正是 KM 代数只含正幂次的子代数, 其中 C_{ab}^c 是 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的结构常数. 如果 λ 可在某一区域上展为罗朗级数, $\Gamma(\lambda)$ 就在 λ 的这个区域上取值在既有正幂次, 又有负幂次的 KM 代数上.

下面我们分析几个例子.

Sine-Gordou 方程

广义 Lax 表示的联络为

$$\Gamma_x = T_2 \frac{1}{2} u_x + T_3 \eta, \quad \Gamma_t = \frac{1}{4\eta} T_1 \sin u + \frac{1}{4\eta} T_3 \cos u. \quad (5)$$

其中 $\{T_1, T_2, T_3\}$ 构成 $sl(2, R)$ 代数, η 为任意参数. 显然, 除 $\eta = 0, \infty$ 两点外, Γ 对于 η 是解析的. 于是我们可引入

$$t = 1 - \eta, \quad (6)$$

并在 $\eta = 1$ 的邻域内展开

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= T_2 \frac{1}{2} u_x + (1-t)T_3; \\ \Gamma_t &= \left(\frac{1}{4} \sin u T_1 + \frac{1}{4} \cos u T_3 \right) \sum_{n=0}^{\infty} t^n. \end{aligned} \quad (7)$$

这表示 Γ 取值在

$$M_a^{(n)} = T_a \times t^n \quad a = 1, 2, 3, \quad n \geq 0 \quad (8)$$

这组基生成的代数上

主手征模型^[2,3]

以任一李群 G 构成的主手征模型的 Lax 表示为

$$\partial_\xi U = -\frac{l}{1+l} A_\xi U, \quad \partial_\eta U = \frac{l}{1-l} A_\eta U, \quad l \in \bar{C}(l). \quad (9)$$

ξ, η 是光锥坐标, l 是色散参数, $A_\xi = g^{-1} \partial_\xi g = A_\xi^a T_a$, $A_\eta = g^{-1} \partial_\eta g = A_\eta^a T_a$, $g \in G$, $T_a \in \mathscr{G}$, $\mathscr{G}$ 是 G 的 Lie 代数. 显然, Γ 在 $l = \pm 1$ 奇异. 但我们可在 l 的解析域展开, 例如在 $l = 0$ 点的邻域展开得

$$\begin{aligned} \partial_\xi U &= A_\xi^a T_a U \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n l^n; \\ \partial_\eta U &= A_\eta^a T_a U \sum_{n=1}^{\infty} l^n. \end{aligned} \quad (10)$$

于是 Γ 也取值在只有正幂次的 KM 代数上. 而如果在 $l = \infty$ 点的邻域展开, Γ 就取值在只有负幂次的 KM 代数上. 如果令

$$\lambda = 2l + 1, \quad (11)$$

则 Lax 对(9)式变为

$$\partial_\xi U = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1} A_\xi^a T_a U, \quad \partial_\eta U = \frac{\lambda-1}{3-\lambda} A_\eta^a T_a U. \quad (12)$$

而在 $\lambda = 2$ 的邻域展开, 则得

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} U &= -\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)(1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2} - \cdots)A_{\xi}^{\alpha}T_{\alpha}U; \\ \partial_{\eta} U &= -\frac{1}{\xi}(1 - \lambda)\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{9} + \cdots\right)A_{\eta}^{\alpha}T_{\alpha}U.\end{aligned}\quad (13)$$

这样 Γ_{ξ} 与 Γ_{η} 就分别取值在只有负幂与正幂的 KM 代数上, 而 Lax 表示的代数就同时包含正、负幂次.

静态轴对称自对偶规范场

对于这种情形, 广义 Lax 表示为^[7]

$$\begin{aligned}\partial_y R &= i(A_y + i\gamma^{1/2}\phi_y)R; \\ \partial_{\bar{y}} R &= i(A_{\bar{y}} + i\gamma^{1/2}\phi_{\bar{y}})R.\end{aligned}\quad (14)$$

其中 $A_y, A_{\bar{y}}, \phi_y, \phi_{\bar{y}}$ 是规范势. γ 为

$$\gamma = [k - i(V - iz)][k + i(V + iz)]^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(V + iz) = 0. \quad (15)$$

k 是复谱参数, $k \in \bar{C}(k)$.

显然, 广义 Lax 表示中的 Γ_y 与 $\Gamma_{\bar{y}}$ 关于 k 的奇异点为 $-i(V + iz), i(V + iz)$. 于是, 我们可以在 $k = 0$ 的邻域将 $\gamma^{1/2}$ 及 $\gamma^{-1/2}$ 展为 k 的正幂级数, 或者在 $k = \infty$ 的邻域将它们展为 k 的负幂级数. 从而得到相应的 KM 代数的基.

总之, 非线性(演化)系统的延拓结构只要依赖于一个连续的谱参数, 它的延拓代数 $\mathcal{D} \times D(\lambda)$ 就是 KM 型的代数. 后者是否具有负幂次是由延拓结构的广义 Lax 表示的平联络 Γ 对于谱参数的解析行为决定的.

最后, 我们讨论这样一类 Lax 表示的 KM 代数的实现.

$$\begin{aligned}\partial_x W &= \lambda PW, \quad \lambda \in \bar{C}, \\ \partial_t W &= QW, \quad Q = \sum_{i=1}^n \lambda^i Q_{n-i}, \\ W(\lambda = 0) &= 1, \quad \det W = 1.\end{aligned}\quad (16)$$

λ 为复谱参数, P, Q 为 $n \times n$ 复矩阵, P 不依赖于 λ . 可以证明, 一大类 $1+1$ 一维非线性(演化)方程的 Lax 表示可以化为上述形式^[8]. 当然, 我们可以按照前面的方法写出这类 Lax 表示的 KM 代数结构. 但是, 为了进一步分析这类系统的性质, 我们指出它们具有的 KM 代数, 可以采取和主手征模型的 KM 代数的同样方式来实现. 显然, 这对于分析有关守恒律, 解空间的性质等问题是有意义的.

由于 P 不含 λ , 我们可将其表为

$$P = g^{-1}\partial_x g, \quad g := W^{-1}(\lambda = -1). \quad (17)$$

于是, 方程(16)可改写为

$$\partial_x W = \frac{l}{1-l}A_x W, \quad l := \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad A_x := g^{-1}\partial_x g. \quad (18)$$

这就是主手征模型 Lax 表示的一个方程.

引入新的延拓变量

$$\Lambda(l) = W(l)TW(l)^{-1}$$

T 是 $\mathscr{D}$ 的生成元, 不依赖于谱参数. 不难证明

$$\Lambda_x = \frac{l}{1-l} [A_x, \Lambda]. \quad (19)$$

如果我们令

$$\Lambda(x, l) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n \Lambda^{(n)}(x), \quad (20)$$

就得到 $\Lambda^{(n)}(x)$ 满足的方程为

$$\partial_x \Lambda^{(n+1)} = \partial_x \Lambda^{(n)} + [A_x, \Lambda^{(n)}], \quad \partial_x \Lambda^{(0)} = 0. \quad (21)$$

取 $\Lambda^{(0)} = T$, 于是可定义变换

$$\begin{aligned} \delta g &= -g \Lambda = -g W T W^{-1}, \\ \delta^{(n)} g &= -g \Lambda^{(n)} = -g \alpha^n \Lambda_a^{(n)}. \end{aligned} \quad (22)$$

类似 Dolan 对主手征模型的分析^[2], 我们可定义

$$M_a^{(n)} = - \int d^2 x \delta_a^{(n)} g \frac{\delta}{\delta g}, \quad (23)$$

并利用归纳法证明 $M_a^{(n)}$ 满足如下的对易关系:

$$[M_a^{(n)}, M_b^{(m)}] = C_{ab}^c M_c^{(m+n)}. \quad (24)$$

参 考 文 献

- [1] W. Kinnersley & D. W. Chitre, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 1538.
- [2] L. Dolan, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1371.
- [3] B. Y. Hou, M. L. Ge & Y. S. Wu, *Phys. Rev. D*, **24**(1981), 2238.
- [4] L. L. Chou, M. L. Ge & Y. S. Wu, *ibid. D*, **25**(1982), 1086.
- [5] 郭汉英、吴可、王世坤, 非线性系统的延拓结构和规范不变性, «规范场及有关物理问题会议集»(将发表).
- [6] K. Ueno & Y. Nakamura, *Phys. Lett. B*, **117**(1982), 208.
- [7] F. A. Bais & R. Sasaki, *Phys. Lett. B*, **113**(1982), 35.
- [8] J. M. Alberty, T. Koikawa & R. Sasaki, *Physica D*, **5**(1982), 43.

KAC-MOODY ALGEBRA STRUCTURE IN LAX REPRESENTATION

WU KE GUO HAN-YING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

WANG SHI-KUN

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is shown that the algebra valued by the generalized Lax representation of nonlinear (evolution) system, i.e. the prolongation algebra $\mathscr{D} \times D(\lambda)$, is in fact Kac-Moody type algebra where $\mathscr{D}$ is a finite dimensional Lie algebra and $D(\lambda)$ the domain of value of the spectral parameter λ . The realization of the Kac-Moody algebra in a kind of 2 dimensional nonlinear (evolution) systems has been given by means of the realization of the Kac-Moody algebra in the principal chiral model due to Dolan.