

强交换场中无隙超导电性的 Eliashberg 方程研究

雷 啸 霖

(中国科学院上海冶金研究所)

1982年11月30日收到

提 要

本文研究强交换场中线性化的 Eliashberg 能隙方程。采用一个叠代方法考虑了能隙函数 $\phi(\omega)$ 对 $\pm\omega$ 的不对称性。在叠代的最低阶给出了近似的解。所得的结果表明：对中等耦合强度以上 ($\lambda \geq 0.5$) 的电声子系统, 能隙函数的不对称效应会显著影响临界交换场的数值。

一、引 言

在铁磁系统中, 由于自发磁化平均场的作用, 自旋向上能带与自旋向下能带要发生分裂。这样一个能带分裂对超导电性有重要影响。对尺寸小于穿透深度的超导小样品或第二类超导体在接近上临界场的区域, 外磁场几乎完全穿透, 泡利顺磁项也在哈密顿量中出现。当然, 同时还有其他效应: 如局域自旋系统中局域自旋对电子的散射; 小样品及二类超导体中的轨道反磁, 等等。这些效应随情况不同而异。但一个依赖于自旋的泡利顺磁项

$$\sigma I \equiv \sigma \mu_B H$$

(H 是平均交换场或者是穿透进去的外磁场, $\sigma = \pm 1$ 描述电子自旋的两个状态) 总是存在, 在某些问题中并起主要作用。单独研究它对超导电性的影响显然是有意义的。

Sarma^[1], Maki 和 Tsuneto^[2] 在 BCS 超导理论的框架内研究过交换场对超导电性的效应。他们发现这种情况下线性化的能隙方程决定的临界交换场 I_c 作为温度 T 的函数有奇异的特征: $I_c(T)$ 曲线在 $T = T_0 - 0.5T_0$ 处 (T_0 是超导转变温度) 达到极大值。这一特征与超导相变的级有密切的关系。 $T > T_0$ 的区域 $I_c(T)$ 曲线是单调下降的。固定温度, 随 I 增加超导能隙 Δ 将下降, 到 I_c 时 Δ 趋于零, 系统经历二级相变到正常态; 在 $0 < I < I_c$ 范围铁磁性与超导电性将共存。但在 $T < T_0$ 的区域, I_c 随 T 增加而上升。这时稳定的状态是没有磁化的超导态或单纯的铁磁态, 它们之间只能发生一级相变, 超导电性和铁磁性不能共存。

上述结论是在把声子媒介的相互作用用瞬间的电子直接耦合代替的 BCS 模型中得到的。考虑声子媒介的滞后效应以及它在定性上和定量上会有什么变化? 自然是有趣的问题。

Lee, Izyumov 和 Birman^[3] 对局域自旋的铁磁有序系统导出了包含交换平均场及其它效应在内的 Eliashberg 方程. 但由于方程的复杂性, 他们在寻找解析解的过程中略去了自旋向上带与自旋向下带的能隙函数的差别. 这样得到的临界交换场除了重整化因子的效应外与 BCS 理论的结果区别不大.

本文进一步研究强交换场情况下线性化的 Eliashberg 方程的解. 我们指出, 自旋向上带与自旋向下带能隙函数的差别(本文的描述中表现在能隙函数 $\phi(\omega)$ 对 $\pm\omega$ 的不对称性)对临界交换场 $I_c(T)$ 有相当的影响. 对中等以上耦合强度的电声子系统, $I_c(T)$ 的数值与不考虑这个效应所得的结果有明显的不同.

二、包含顺磁项的 Eliashberg 方程

考虑一个模型电声子系统, 哈密顿量中包含泡利顺磁项为

$$\mathcal{H} = \sum_{k,\sigma} (\varepsilon_k - \sigma I) c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{q,j} Q_{qj} b_{qj}^\dagger b_{qj} + \mathcal{H}_{el-ph}. \quad (1)$$

这里, 为了简明, 除了交换场可能包含的库仑相互作用的一部分效应外, 没有明显地包含电子间的库仑作用. 实际上, 引入库仑项, 用赝势办法处理, 并不引起任何本质的变化.

实轴上的 Eliashberg 方程是

$$\omega[1 - z(\omega)] = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \operatorname{Re} \left(\frac{\omega' z(\omega') + I}{[(\omega' z(\omega') + I)^2 + \phi(\omega')^2]^{1/2}} \right) \times \int_0^{\infty} dQ \alpha^2(Q) F(Q) f(\omega', Q, \omega), \quad (2)$$

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \operatorname{Re} \left(\frac{\phi(\omega')}{[(\omega' z(\omega') + I)^2 + \phi(\omega')^2]^{1/2}} \right) \times \int_0^{\infty} dQ \alpha^2(Q) F(Q) f(\omega', Q, \omega), \quad (3)$$

其中 $z(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 分别是重整化参数和能隙函数,

$$f(\omega', Q, \omega) = \frac{1}{2} \tanh \frac{\omega'}{2T} \left(\frac{1}{\omega' + Q - \omega - i\varepsilon} - \frac{1}{\omega' - Q - \omega - i\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \coth \frac{Q}{2T} \left(\frac{1}{\omega' + Q - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega' - Q - \omega - i\varepsilon} \right). \quad (4)$$

容易看出 $f(\omega', Q, \omega) = -f(-\omega', Q, -\omega)^*$. 注意(2)和(3)式中根号内的 ω' 实际上是 $\omega' + i\delta$ ($\delta > 0$), 根号是取虚部大于零的那个根.

当 $I = 0$ 时, 方程(2)和(3)化为通常的 Eliashberg 方程. 这时重整化参数及能隙函数可以取得对 $\pm\omega$ 都是对称的: $z(\omega) = z^*(-\omega)$, $\phi(\omega) = \phi^*(-\omega)$. 但 $I \neq 0$ 时这一对称性一般不再成立.

限于讨论能隙函数很小的区域, 我们着重研究线性化的方程. 方程(2)线性化后成为

$$\omega[1 - z(\omega)] = - \int_0^{\infty} d\omega' \int_0^{\infty} dQ \alpha^2(Q) F(Q) [f(\omega', Q, \omega) + f(-\omega', Q, \omega)]. \quad (5)$$

它与 $I = 0$ 的方程一样. 可见, 在无隙区域重整化函数不受 I 的影响. 低温小 ω 情况下它近似为实数:

$$z(\omega) \simeq 1 + \lambda. \quad (6)$$

这里

$$\lambda = 2 \int_0^\infty dQ \frac{\alpha^2(Q) F(Q)}{Q} \quad (7)$$

是电声子耦合强度参数. 实际上, 温度一直到 T_* 这个近似都是可用的.

线性化的方程(3)可写为

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \frac{1}{4} \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty dQ \alpha^2(Q) F(Q) \\ & \times \left\{ \tanh \frac{\omega'}{2T} [(R(\omega') - R(-\omega'))(k_+(\omega', Q, \omega) + k_+(-\omega', Q, \omega)) \right. \\ & + (R(\omega') + R(-\omega'))(k_-(\omega', Q, \omega) + k_-(-\omega', Q, \omega))] \\ & + \coth \frac{Q}{2T} [(R(\omega') - R(-\omega'))(k_+(\omega', Q, \omega) - k_+(-\omega', Q, \omega)) \\ & \left. + (R(\omega') + R(-\omega'))(k_-(\omega', Q, \omega) - k_-(-\omega', Q, \omega))] \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

其中

$$R(\omega) \equiv \text{Re} \left[\frac{\phi(\omega)}{\omega z(\omega) + I} \right], \quad (9)$$

$$k_+(\omega', Q, \omega) = \frac{1}{\omega' + Q - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega' + Q + \omega + i\varepsilon}, \quad (10)$$

$$k_-(\omega', Q, \omega) = \frac{1}{\omega' + Q - \omega - i\varepsilon} - \frac{1}{\omega' + Q + \omega + i\varepsilon}. \quad (11)$$

注意到对称关系 $k_+(\omega', Q, \omega) = k_+^*(\omega', Q, -\omega)$, $k_-(\omega', Q, \omega) = -k_-^*(\omega', Q, -\omega)$, 由方程(8)可得

$$\begin{aligned} \phi(\omega) + \phi^*(-\omega) = & \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty dQ \alpha^2(Q) F(Q) \\ & \times \left\{ \tanh \frac{\omega'}{2T} [R(\omega') - R(-\omega')] [k_+(\omega', Q, \omega) + k_+(-\omega', Q, \omega)] \right. \\ & \left. + \coth \frac{Q}{2T} [R(\omega') - R(-\omega')] [k_+(\omega', Q, \omega) - k_+(-\omega', Q, \omega)] \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) - \phi^*(-\omega) = & \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty dQ \alpha^2(Q) F(Q) \\ & \times \left\{ \tanh \frac{\omega'}{2T} [R(\omega') + R(-\omega')] [k_-(\omega', Q, \omega) - k_-(-\omega', Q, \omega)] \right. \\ & \left. + \coth \frac{Q}{2T} [R(\omega') + R(-\omega')] [k_-(\omega', Q, \omega) + k_-(-\omega', Q, \omega)] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

令

$$\Delta_+(\omega) \equiv \frac{1}{2} \text{Re} \{ [\phi(\omega) + \phi^*(-\omega)] / z(\omega) \}, \quad (14)$$

$$\Delta_-(\omega) \equiv \frac{1}{2} \text{Re} \{ [\phi(\omega) - \phi^*(-\omega)] / z(\omega) \}, \quad (15)$$

$$m \equiv I / z(\omega), \quad (16)$$

并对 $z(\omega)$ 用实函数近似, 则从方程(12)和(13)取实部可得

$$\Delta_+(\omega) = \frac{\lambda}{z(\omega)} \int_0^\infty d\omega' \langle Q_+(\omega', Q, \omega) \rangle \left[\frac{\omega'}{\omega'^2 - m^2} \Delta_+(\omega') - \frac{m}{\omega'^2 - m^2} \Delta_-(\omega') \right], \quad (17)$$

$$\Delta_-(\omega) = \frac{\lambda}{z(\omega)} \int_0^\infty d\omega' \langle Q_-(\omega', Q, \omega) \rangle \left[\frac{\omega'}{\omega'^2 - m^2} \Delta_-(\omega') - \frac{m}{\omega'^2 - m^2} \Delta_+(\omega') \right]. \quad (18)$$

其中

$$Q_+(\omega', Q, \omega) \equiv \frac{Q}{2} \left\{ \left[\frac{\omega' + Q}{(\omega' + Q)^2 - \omega^2} - \frac{\omega' - Q}{(\omega' - Q)^2 - \omega^2} \right] \tanh \frac{\omega'}{2T} + \left[\frac{\omega' + Q}{(\omega' + Q)^2 - \omega^2} + \frac{\omega' - Q}{(\omega' - Q)^2 - \omega^2} \right] \coth \frac{Q}{2T} \right\}, \quad (19)$$

$$Q_-(\omega', Q, \omega) \equiv \frac{Q}{2} \omega \left\{ \left[\frac{1}{(\omega' + Q)^2 - \omega^2} - \frac{1}{(\omega' - Q)^2 - \omega^2} \right] \tanh \frac{\omega'}{2T} + \left[\frac{1}{(\omega' + Q)^2 - \omega^2} + \frac{1}{(\omega' - Q)^2 - \omega^2} \right] \coth \frac{Q}{2T} \right\}, \quad (20)$$

尖括号表示对有效声子谱的平均为

$$\langle Q(Q) \rangle \equiv \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty dQ \frac{\omega^2(Q) F(Q)}{Q} Q(Q). \quad (21)$$

注意(17)和(18)式中的积分是主值意义上的积分。

三、近 似 解

按通常物理上的选取, $m = 0$ 时 $\Delta_-(\omega) = 0$. 因此, $m \approx 0$ 的 $\Delta_-(\omega)$ 可认为是小量. 由于 Q_- 比 Q_+ 要小一个 ω'/Q 的因子, 故方程(18)中右边第一项比第二项至少要小 $\sim \langle m/Q \rangle$ 的量级. 于是可采用叠代展开消去 $\Delta_-(\omega)$. 叠代的零级近似相当于忽略方程(18)右边第一项的贡献, 得到关于 $\Delta_+(\omega)$ 的线性积分方程为

$$\begin{aligned} \Delta_+(\omega) &= \frac{\lambda}{z(\omega)} \int_0^\infty d\omega' \langle Q_+(\omega', Q, \omega) \rangle \frac{\omega'}{\omega'^2 - m^2} \Delta_+(\omega') \\ &+ \frac{\lambda}{z(\omega)} \int_0^\infty d\omega' \langle Q_+(\omega', Q, \omega) \rangle \frac{m}{\omega'^2 - m^2} \frac{\lambda}{z(\omega')} \\ &\times \int_0^\infty d\omega'' \langle Q_-(\omega'', Q, \omega') \rangle \frac{m}{\omega''^2 - m^2} \Delta_+(\omega''). \end{aligned} \quad (22)$$

然后就可类似 McMillan^[4] 的做法求得近似的临界交换场 $I_c(T)$. 取 $z(\omega) = 1 + \lambda$, 设

$$\Delta_+(\omega) = \begin{cases} \Delta_0 & \text{当 } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{当 } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (23)$$

(ω_0 为最大声子频率.) 要求在 $\omega \approx 0$ 处方程(22)满足, 得到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_0^{\omega_0} d\omega' \frac{\omega'}{\omega'^2 - m^2} \langle Q_+(\omega', Q, 0) \rangle + \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^2 \int_0^{\omega_0} d\omega' \frac{m}{\omega'^2 - m^2} \\ &\times \langle Q_+(\omega', Q, 0) \rangle \int_0^{\omega_0} d\omega'' \frac{m}{\omega''^2 - m^2} \langle Q_-(\omega'', Q, \omega') \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Q_+ 的主要项是

$$\langle Q_+(\omega', Q, 0) \rangle \simeq \tanh \frac{\omega'}{2T} - \left\langle \frac{\omega'}{\omega' + Q} \right\rangle. \quad (25)$$

而对 Q_- , 表达式(20)中第一项可以略去, 第二项可近似为

$$\langle Q_-(\omega'', Q, \omega') \rangle \simeq \left\langle \frac{\omega'}{Q} \right\rangle + 2T \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (26)$$

于是我们得到确定临界交换场的近似方程为

$$1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \left\langle \frac{m}{Q} \right\rangle \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_0 - m}{\omega_0 + m} \right) \right] J_1(m, T) \\ + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^2 J_2(m, T) - \frac{\lambda}{1+\lambda} J_3, \quad (27)$$

$$\text{其中, } J_1(m, T) = \int_0^{\omega_0} d\omega \frac{\omega}{\omega^2 - m^2} \tanh \frac{\omega}{2T} \\ \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{|\omega_0^2 - m^2|}{(2\pi T)^2} - \operatorname{Re} \phi \left(\frac{1}{2} + i \frac{m}{2\pi T} \right), \quad (28)$$

$$J_2(m, T) = T m^2 \int_0^{\omega_0} d\omega \tanh \frac{\omega}{2T} \frac{\omega}{(\omega^2 - m^2)^2} \\ \times \left[\frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \right) - \frac{1}{m} \ln \left(\frac{\omega_0 - m}{\omega_0 + m} \right) \right], \quad (29)$$

$$J_3 = \left\langle \int_0^{\omega_0} d\omega \frac{\omega^2}{\omega^2 - m^2} \frac{1}{Q + \omega} \right\rangle \simeq \left\langle \ln \frac{\omega_0 + Q}{Q} \right\rangle + o \left\langle \frac{m}{Q} \right\rangle. \quad (30)$$

当 $m/T \gg 1$ 时,

$$J_1 \simeq \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\omega_0^2 - m^2}{m^2} \right| + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{m} \right)^2. \quad (31)$$

另外, 注意到在 J_2 的表达式(29)中对积分的主要贡献是来自 $\omega \ll \omega_0$ 的区域, 可以将对数函数展开, 保留到最低不为零项,

$$J_2(m, T) \simeq -\frac{2}{3} \frac{T m^2}{\omega_0^3} J_1(m, T). \quad (32)$$

J_3 中不包含 T , 它的最低阶只依赖于有效声子谱, 相当于改变方程(27)左边的常数。固然它会影响 T_∞ 的表达式, 但对按 T_∞ 归一化的曲线的效应只相当于对所有曲线的等效 λ 变化。本文着重研究能隙函数 $\phi(\omega)$ 对 $\pm\omega$ 不对称的效应, 为简洁起见, 把 J_3 略去。在这样一些近似下方程(27)可表为

$$1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{m}{\omega_0} \right)^2 \left(\left\langle \frac{\omega_0}{Q} \right\rangle + \frac{2}{3} \frac{T}{\omega_0} \right) \right] J_1(m, T). \quad (33)$$

四、与 BCS 模型的比较

如果不考虑能隙函数 $\phi(\omega)$ 对 $\pm\omega$ 的不对称性, 决定 I_c 的方程将是

$$1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} J_1(m, T). \quad (34)$$

这里 Lee 等人^[3]已给出的结果。由它决定的 $m_c = I_c/(1+\lambda)$ 作为 T 的函数随 λ 只有微小的变化(见图 1)。所以, 从方程(34)确定的 $I_c(T)$ 与 BCS 理论的差别几乎全部反映在重整化因子上。

若 $\lambda \sim 0$, 则方程(27) (略去 J_3) 和(33)也化为方程(34). 所以 $\lambda = 0$ 极限都是 BCS 理论结果.

从方程(27)(略去 J_3)或(33), 令 $m = 0$, 我们得到无交换场情况下超导转变温度为:

$$T_{c0} = 1.134 \omega_0 e^{-(1+\lambda)}. \quad (35)$$

利用 J_1 在大 m/T 的表达式(31), 容易得到 $T = 0$ 的解为

$$\frac{m_c(0)}{T_{c0}} = 0.882 \exp\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) \times \left\{ 1 + \exp\left[\frac{2(1+\lambda)}{\lambda \left(1 - \langle \frac{\omega_0}{\Omega} \rangle \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(1 + \exp \frac{2(1+\lambda)}{\lambda}\right)^{-1}\right)} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (36)$$

对中等强度以上的电声子耦合, 如 $\lambda \geq 0.5$, 由方程(33)决定的 $m_c(T)$ 值与 BCS 理论的结果以及方程(34)得到的结果有显著区别. 随 λ 增大 $m_c(T)$ 曲线下移, m_c 作为 T 的函数的极大值的位置略向低温端移动, 但定性特征基本上不变. 见图 2.

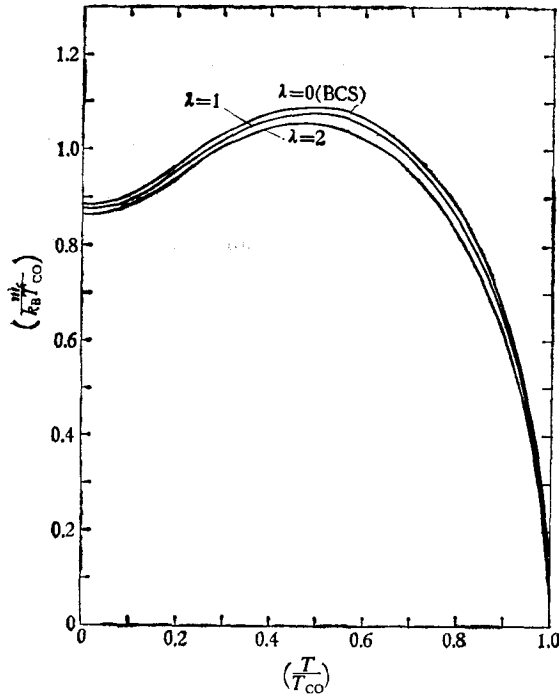


图1 按方程(34)确定的重整化临界交换场 $m_c = I_c/(1+\lambda)$ 作为温度 T 的函数, T_{c0} 是零场超导转变温度

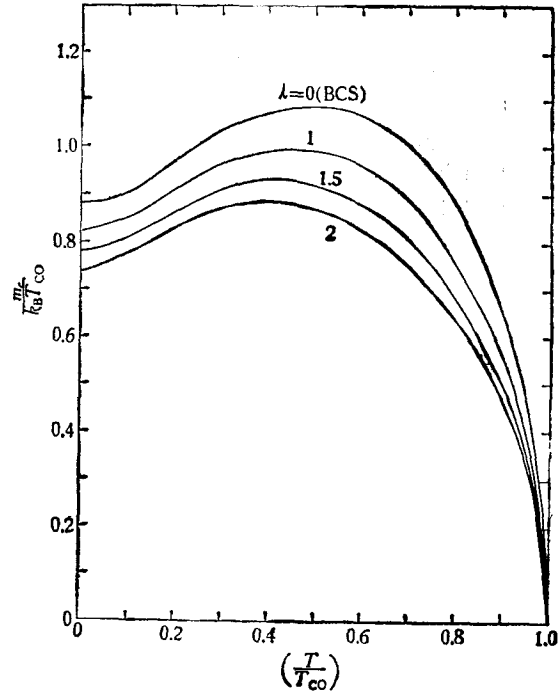


图2 取 $\langle \omega_0/\Omega \rangle = 3$, 按方程(27)(略去 J_3)确定的重整化临界交换场 $m_c = I_c/(1+\lambda)$ 作为温度 T 的函数, T_{c0} 是零场超导转变温度

作者对 C. S. Ting 教授宝贵的建议和有益的讨论表示感谢.

参 考 文 献

- [1] G. Sarma, *J. Phys. Chem. Solids*, **24**(1963), 1029.
- [2] K. Maki and T. Tsuneto, *Prog. Theor. Phys.*, **31**(1964), 945.
- [3] T. K. Lee, Y. A. Izyumov and J. L. Birman, *Phys. Rev. B*, **20**(1979), 4494.
- [4] W. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 331.

AN INVESTIGATION ON THE GAPLESS SUPERCONDUCTIVITY IN STRONG EXCHANGE FIELDS USING ELIASHBERG THEORY

LEI XIAO-LIN

(Shanghai Institute of Metallurgy, Academia Sinica)

ABSTRACT

The linearized Eliashberg equations for a superconductive system in strong exchange fields have been investigated. An iteration procedure has been used for including the asymmetry of the gap function $\phi(\omega)$ with respect to $\pm\omega$ and an approximate solution has been obtained in the lowest order of the iteration equation. The results show that the asymmetry in the gap function can considerably change the critical exchange field as a function of temperature in moderate or stronger electron-phonon coupling ($\lambda \gtrsim 0.5$) systems.