第33卷 第2期 物 理 学 报 Vol. 33, No. 2
1984 年 2 月 ACTA PHYSICA SINICA Feb., 1984

一个新的 T_c 公式

吴杭生 翁征宇
(中国科学技术大学物理系)

1983 年 9 月 29 日收到

提 要

从 Eliashberg 方程导出了一个适用于 λ 小的超导体的 T_c 公式.

1. 由 Eliashberg 方程解析地推导出适用于小 λ 区域的 T_c 公式问题,已有很多作者研究过(例见文献[1]和[2]),但仍没有很好地解决. 本文解析地导出了一个 T_c 公式. 它和 Eliashberg 方程的数值解在小 λ 区域,是符合很好的.

2. 线性 Eliashberg 方程为

$$\bar{\Delta}_n = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}\bar{\Delta}_m - \mu^*\theta(j_c - n)\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{j_c}\bar{\Delta}_m. \tag{1}$$

$\theta(j_c - n)$ 为阶梯函数, j_c 是通过切断频率 ω_c 定义的整数. C_{nm} 的表示式为

$$C_{nm} = C^0_{nm} - \delta_{nm}, \tag{2}$$

其中

$$C^0_{nm} = \frac{1}{2n+1}[\bar{\lambda}_{n-m} + \bar{\lambda}_{n+m+1}]\bar{\Delta}_m + \delta_{nm}\frac{2}{2n+1}\sum_{l=0}^{n}(1-\bar{\lambda}_l); \tag{3}$$

$$\bar{\lambda}_l = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega)\frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\pi l T_c)^2}. \tag{4}$$

把 T_c 和 μ^* 看成是给定的量,而 λ 和 $\bar{\Delta}_n$ 是从方程(1)解出的量. 采用替代法求解. 具体的做法是: 把方程(1)写成

$$\bar{\Delta}^{(j)}_n = \lambda_j \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}\bar{\Delta}^{(j-1)}_m - \mu^*\theta(j_c - n)\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{j_c}\bar{\Delta}^{(j-1)}_m. \tag{5}$$

先假设一个能隙函数 $\bar{\Delta}^{(0)}_n$. 把它代入(5)式的右端,算出新的能隙函数 $\bar{\Delta}^{(1)}_n$. 再把 $\bar{\Delta}^{(1)}_n$ 代入,算出 $\bar{\Delta}^{(2)}_n$,如此等等. 在每次替代时,均调节 λ_j,使得能隙函数 $\bar{\Delta}^{(j)}_n$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\Delta}^{(j)}_n = 1. \tag{6}$$

序列 $\{\bar{\Delta}^{(j)}_n\}$ 和 $\{\lambda_j\}$ 的极限值就是 $\bar{\Delta}_n$ 和 λ. 自然,这种替代方法并不是本文第一次提出的,它早已为一些作者用来数值解 Eliashberg 方程[3,4]. 但是和这些工作不同,我们不是用数值计算方法,而是通过解析计算来完成全部替代运算的.

数值计算表明: 如果把 $\bar{\Delta}^{(0)}_n$ 取为 δ_{n0},那末在小 λ 区域,只要对方程(5)做两次替代,便可以得到相当准确的结果. 这个发现对于我们的理论是十分重要的. 因为它不仅告诉

了我们应把 $\bar{\Delta}_n^{(0)}$ 取为 δ_{n0}，而且还告诉我们，要得到相当准确的结果，只需要做少数几次替代便够了．我们实际上只做了三次替代，把 λ_3 和 $\bar{\Delta}_n^{(3)}$ 就看成是 λ 和 $\bar{\Delta}_n$．

3.用上述方法，解析地得到一组定 T_c 的方程．在 Einstein 谱 $g(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$ 情形，取 $\omega_c=\omega_0$，这组方程为

$$T_c=\frac{2\gamma}{\pi}\omega_0 e^{-\frac{1+\lambda(1+\delta)}{\lambda-\mu^*}}; \tag{7}$$

$$\lambda_1=\frac{1+\mu^*\ln\left(\frac{2\gamma\omega_0}{\pi T_c}\right)}{\ln\left(\frac{2\gamma\omega_0}{\pi T_c}\right)-1}; \tag{8}$$

$$\lambda_2=\frac{1+\mu^*(1-0.3466\lambda_1)\dfrac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}}{(1-0.1534\mu^*)\dfrac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}-1.5+0.2618\lambda_1-0.5860\mu^*}, \tag{9}$$

其中 $\ln\gamma=C=0.5772$ 为 Euler 常数；δ 的表示式为

$$\begin{aligned}\delta=&\frac{1}{2}-0.3584\lambda_2+0.1059\lambda_1\lambda_2+\left[0.009311\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}-0.1991\right]\lambda_2\mu^*\\&+\left[0.1534\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}+0.5860\right][1-0.3466\lambda_1]\mu^*\\&-\mu^*\frac{\lambda_2}{\lambda}(0.3466-0.1034\lambda_1+0.07224\mu^*)\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1-\mu^*}.\end{aligned} \tag{10}$$

照理讲，应把(8)式代入(9)式，再把它们代入(10)式，消去 λ_1 和 λ_2，再从(7)和(10)式解出 $T_c=T_c(\lambda,\mu^*)$．但实际上，这是行不通的．因为这样做，将导致一个复杂的方程，很难从中把 T_c 解出来．简单的处理方法是把(7)—(10)式就看成是 T_c 公式．

给定 λ 和 μ^*，可按下步骤算出 T_c：1) 令 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$．从(7)和(10)式算出 T_c．2) 把它代入(8)式算出 λ_1．接着把 λ_1 代入(9)式算出 λ_2．3) 再把 λ，μ^*，λ_1 和 λ_2 代入(7)和(10)式，算出 T_c．4) 重复步骤 2) 和 3)，直到相邻两次算出的 T_c，λ_1 和 λ_2 相差小

表 1

λ	λ_1	λ_2	T_c/ω_0			
			本文的 T_c 公式	本文的 T_c 公式 (但 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$)	数 值 解	McMillan T_c 公 式
0.01	0.00995	0.01000	9.4×10^{-45}	9.4×10^{-45}	---	1.7×10^{-46}
0.05	0.04882	0.05001	5.0×10^{-10}	5.0×10^{-10}	---	2.0×10^{-10}
0.1	0.09556	0.1001	1.2×10^{-5}	1.2×10^{-4}	--	7.4×10^{-6}
0.2	0.1841	0.2007	1.82×10^{-3}	1.82×10^{-3}	---	1.34×10^{-3}
0.3268	0.2897	0.3303	0.01322	0.01319	0.01313	0.01011
0.3883	0.3392	0.3942	0.02187	0.02179	0.02165	0.01674
0.4790	0.4109	0.4899	0.03660	0.03606	0.036	0.02758
0.6175	0.5194	0.6406	0.06084	0.06003	0.05886	0.04524
0.6406	0.5375	0.6662	0.06492	0.06397	0.06262	0.04807
0.8682	0.7193	0.9273	0.1038	0.1008	0.09705	0.07358

于指定的精度．借助带有程序的计算器，可以很方便地完成这个计算．

取 $\mu^*=0$ 和一组 λ 值，从(7)—(10)式算出 λ_1，λ_2 和 T_c/ω_0．把它们分别列在表 1 的第二行，第三行和第四行．当 $\lambda<0.65$ 时，$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_2$ 是很小的．这证实了我们前面提及的事实：在小 λ 区域，以 $\bar{\Delta}_n^{(0)}=\delta_{n0}$ 为开始假设的能隙函数，把方程(5)进行替代，收敛是很快的．

表 1 的第六行列出的是 Eliashberg 方程数值解．把它们和第四行数据进行比较，可以看到，在 $\lambda<0.65$ 区域，两者符合是相当好的．在同表的最后一行，列出了根据 McMillan T_c 公式[4]算出的 T_c/ω_0 值，以资比较．

如果用 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 来代替(8)和(9)式，那末代替(7)—(10)式而有如下的 T_c 公式：

$$T_c=\frac{2\gamma}{\pi}\omega_0\exp\left[-\frac{1+\lambda(1+\delta')}{\lambda-\mu^*}\right], \tag{11}$$

其中 δ' 仅仅是 λ 和 μ^* 的函数，它的表示式为

$$\delta'=\frac{1}{2}-0.3584\lambda+0.1059\lambda^2+0.5860\mu^*-0.4022\lambda\mu^*$$
$$+(-0.1931-0.07224\mu^*+0.05954\lambda)\frac{1+\lambda}{\lambda-\mu^*}\mu^*. \tag{12}$$

由此 T_c 公式算出的 T_c/ω_0 值见表 1 的第五行．它和第四行列出的 T_c/ω_0 值相差是很小的．至少就表中列出的 λ 范围来说，(7)—(10)式是可以用较为简单的 T_c 公式 (11) 和 (12)式来替代的．但应指出，当 $\mu^*\fallingdotseq 0$，并且 λ 和 μ^* 十分接近时，λ_1，λ_2 和 λ 的差别不再能略去．此时，只能用 T_c 公式(7)—(10)．

注意到，当 $\mu^*=0$，λ 足够地小时，δ' 近似等于 1/2．此时，(11)式简化为

$$T_c=\frac{1}{1.45}\omega_0\exp\left[-\frac{1+\lambda}{\lambda}\right]. \tag{13}$$

这实际上就是 McMillan T_c 公式．

4.对于任意谱 $g(\omega)$，我们导出的 T_c 公式和 (7)—(10) 式相仿，但 δ 表示式中的常数均因谱而异．详细结果将另文发表．

参　考　文　献

[1] V. L. Ginzburg and D. A. Kirzhnitz, The Problem of High Temperature Superconductivity, Moscow, Nauka, (1977).

[2] H. Nowotny and O. Hittair, *Phys. Stat. Sol.*, **91**(1979), 647.

[3] W. L. McMillan, *Phys. Rev.*, **167**(1968), 331.

[4] 吴杭生、顾一鸣，物理学报，**30**(1981)，1693.

A NEW T_c FORMULA

WU HANG-SHENG WENG ZHENG-YU

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

A formula of the critical temperature for superconductors with small λ is derived from the Eliashberg equation.