

# 手征模型的对偶性及其与 sine-Gordon 方程的几何关联

王 珮

(四川大学物理系)

侯 伯 元

(内蒙古大学物理系)

侯 伯 宇

(西北大学物理系)

郭 汉 英

(中国科学院理论物理研究所)

1982 年 3 月 2 日收到

## 提 要

本文指出,  $SO(3)$  手征场可作为伪球面的法向量场, 从而给出手征场与 sine-Gordon 系统间的对应及其几何解释. 利用手征场、伪球面的对偶性质, 将手征场与 s-G 系统联系起来, 并将 Bäcklund 变换、Riccati 方程等表为同一动力学系统的有关性质在不同标架中规范不变的表现.

## 一

近年来, 许多作者对  $1+1$  维手征模型进行了深入的研究. Pohlmeyer<sup>[1]</sup> 首先注意到  $SO(3)$  手征场方程与 sine-Gordon (s-G) 方程之间, 存在着对应关系. 随后, 还有不少人探讨过这一问题<sup>[2,3]</sup>.

我们知道, s-G 方程与负常曲率面 (广义伪球面) 之间存在着内在联系. s-G 方程的解作为负常曲率面渐近线夹角的几何解释已是熟知的经典结果<sup>[4]</sup>. 本文进而指出, 手征场可以作为伪球面的法向量场, 从而可以建立手征场的一些特性与 s-G 方程之间的对应, 并可赋予明确的几何解释. 本文揭示出运动方程与 Codazzi 方程之间的一种对偶关系, 并将 Bäcklund 变换、Riccati 方程等分别表示为同一动力学体系的有关性质在不同标架中的表现, 而且是规范不变的.

利用 AKNS 反散射方法<sup>[5]</sup> 可解的非线性方程都可以与负常曲率面建立联系<sup>[6]</sup>. 曲面的第一基本形式决定该曲面的内蕴几何, 相应的结构方程可以与各种可解的非线性方程建立确定的对应关系. 曲面的第二基本形式决定其在 3 维欧氏空间  $E^3$  中的嵌入, 因而

决定了曲面的法矢量场。相应的结构方程同样可以与各种非线性方程建立联系。本文将指出,对于负常曲率面,第一、二基本形式之间存在着确定的对偶关系,同时,其法矢量场又恰恰构成  $SO(3)$  手征场的陪集空间,这样,就可以从各种角度揭示非线性演化方程如 s-G 方程与  $SO(3)$  手征场之间的联系。

## 二

考虑 3 维欧氏空间中的曲面上任一点  $P$  的单位正交标架  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ .  $e_3$  为法矢量,其余为切矢量。按照曲面论,有运动方程

$$\begin{aligned} dP &= \omega^\alpha e_\alpha, \quad \omega^3 = 0, \\ de_\alpha &= \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\omega^\alpha$  与  $\omega_{\alpha\beta}$  分别为标架 1-形式和联络 1-形式。它们满足结构方程

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \\ d\omega_\beta^\alpha &= \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

曲面的第一基本型 I 以及相应的结构方程决定了曲面的内禀几何,

$$I \stackrel{d}{=} \langle dP \cdot dP \rangle = \omega^{12} = \omega^{21}, \quad (3a)$$

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j, \quad i, j = 1, 2, \quad (3b)$$

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (3c)$$

(3c) 式称为曲面的 Gauss 方程,  $K$  为 Gauss 曲率,对于负常曲率面总可以取  $K = -1$ . 曲面的第二基本型 II 以及相应的结构方程决定了曲面在  $E^3$  中的嵌入.

$$II \stackrel{d}{=} -\langle de_3 \cdot dP \rangle = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}, \quad (4a)$$

$$d\omega_{i3} = \omega_j^i \wedge \omega_{j3}, \quad (4b)$$

$$d\omega_{12} = \omega_1^3 \wedge \omega_{32}. \quad (4c)$$

(4b) 式为曲面的 Codazzi 方程. Gauss 方程与 Codazzi 方程反映了两个基本型之间的全部联系.

$2 \times 2$  线性散射反演问题与曲面论的结构方程之间存在着密切的联系. 以 Gauss 方程 (3c) 及方程 (3b) 为可积条件的  $2 \times 2$  散射反演问题为<sup>[6]</sup>

$$d\Psi = Q^I \Psi, \quad Q^I = \frac{1}{2} W^a \Sigma_a \quad a = 1, 2, 3, \quad (5)$$

其中上标 I 表示与伪球面第一基本型对应,且

$$\begin{aligned} W^a &= (\omega^1, \omega^2, \omega^{12}), \\ \Sigma_a &= (\sigma_1, \sigma_2, i\sigma_3). \end{aligned} \quad (6)$$

$\sigma_a$  为 Pauli 矩阵. 显然,方程 (5) 具有半单非紧致的代数结构  $SU(1, 1) \sim SO(2, 1) \sim SL(2R)$ . 另一方面,以 Codazzi 方程 (4b) 及方程 (4c) 为可积条件的线性方程组为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} d\chi &= Q^I \chi, \\ Q^I &= \frac{1}{2} {}^* W^a \Sigma_a = \frac{i}{2} \omega^a \sigma_a, \end{aligned}$$

$$\omega^a = (\omega^{23}, -\omega^{13}, \omega^{12}). \quad (7)$$

这里上标 II 表示与曲面的第二基本型对应, \* 表示对偶, 下面我们将给出其定义. 显然, 方程(7)具有半单紧致的代数结构  $SU(2) \sim SO(3)$ .

在伪球面上, 可沿主曲率线取坐标<sup>[4]</sup> 使得

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cos \frac{\alpha}{2} dt, & \omega^2 &= \sin \frac{\alpha}{2} dx, \\ \omega^{13} &= -\sin \frac{\alpha}{2} dt, & \omega^{23} &= \cos \frac{\alpha}{2} dx, \\ \omega^{12} &= \frac{1}{2} (\alpha_t dx + \alpha_x dt), \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\alpha = \alpha(x, t)$  为伪球面上渐近线的夹角, 下标表示求偏导数. 将(8)式代入 Gauss 方程(3c)或方程(4c), 都得到 s-G 方程

$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} = \sin \alpha. \quad (9)$$

仔细对比与第一基本型和与第二基本型相应的两组散射反演问题(5)与(7)式, 并注意到(8)式, 不难发现对于  $K = -1$  的曲面具有如下的对偶对称性:

$$\begin{aligned} \omega^1 &\Rightarrow -i^* \omega^{23} \quad \text{或} \quad \omega^{23} \Rightarrow -i^* \omega^1, \\ \omega^2 &\Rightarrow i^* \omega^{13} \quad \text{或} \quad \omega^{13} \Rightarrow i^* \omega^2. \end{aligned} \quad (10)$$

在这种对偶对称性下, 结构方程(3b)与 Codazzi 方程(4b)之间, 以及它们相应的散射反演问题之间互相对偶. 同时, Gauss 方程与方程(4c)互相对偶, 都相应于相同的非线性演化方程(如 s-G 方程). 而且, 对偶关系(10)式使非紧致结构与紧致结构互相对应.

对于主曲率系, 对偶关系(10)式等价于

$$\begin{aligned} {}^*x_\mu &= i e_{\mu\nu} x^\nu, \\ x^\mu &= (t, x), \quad e_{01} = -e_{10} = e^{10} = -e^{01} = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

下面, 我们将利用这些对偶关系来考察手征场与 s-G 方程之间的关系.

### 三

现在我们指出伪球面的法矢量场可以表征手征场. 而且, 上节给出的对偶关系恰恰反映手征场的运动方程与 Codazzi 方程之间的对偶.

在陪集空间  $SO(3)/SO(2) \sim S^2$  上选取一代表元  $V(x)$ , 与 Maurer-Cartan 形式相应的规范势可写为

$$a_\mu(x) \stackrel{d}{=} V^{-1}(x) \partial_\mu V(x) = h_\mu(x) + k_\mu(x), \quad (12)$$

其中  $h_\mu$  及  $k_\mu$  与对合算子  $n$  的对易性质为

$$\{k_\mu, n\} = 0, \quad [h_\mu, n] = 0, \quad n = \sigma_3. \quad (13)$$

此时,  $n$  相应于  $S^2$  上一点的法矢量, 称这个规范为内禀规范.

作规范变换到嵌入空间, 称后者为嵌入规范, 并用大写字母表示与内禀规范中的对应量

$$a_\mu \rightarrow A_\mu = V a_\mu V^{-1} - \partial_\mu V V^{-1} = H_\mu(x) + K_\mu(x), \quad (14)$$

其中

$$H_\mu = V h_\mu V^{-1} - \partial_\mu V V^{-1}, \quad K_\mu = V k_\mu V^{-1}. \quad (15)$$

此时, 对合算子变为

$$n \rightarrow N(x) = V n V^{-1}. \quad (16)$$

$H_\mu, K_\mu$  与对合算子的关系为

$$\{K_\mu, N\} = 0, \quad D_\mu N \stackrel{d}{=} \partial_\mu N + [H_\mu, N] = 0. \quad (17)$$

由此可以得出在嵌入规范中,

$$H_\mu = -K_\mu = \frac{1}{2} N \partial_\mu N. \quad (18)$$

我们知道, 从  $SO(3)$  手征场拉氏密度

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{8} \text{Tr}(\partial_\mu N \partial^\mu N), \quad N^2(x) = 1, \quad (19)$$

可以导出运动方程

$$[\partial_\mu \partial^\mu N(x), N(x)] = 0. \quad (20)$$

也可以用  $K_\mu$  表达为<sup>[8]</sup>

$$D_\mu K^\mu = \partial_\mu K^\mu = 0. \quad (21)$$

由于此式的协变性质, 在内禀规范中相应为

$$D_\mu k^\mu \stackrel{d}{=} \partial_\mu k^\mu + [h_\mu, k^\mu] = 0. \quad (22)$$

手征场量  $N(x)$  显然可按 Pauli 矩阵展开

$$N(x) = q^a(x) \sigma_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (23)$$

$q^a(x)$  为手征场矢量  $q(x)$  的分量.

为了探讨手征场与  $K = -1$  曲面的关系, 把  $q(x)$  与  $E^3$  中某一曲面的局部正交标架场  $(\{e_a(x)\}, \quad a = 1, 2, 3)$  联系起来, 若曲面的法矢量场为  $e_3(x)$ , 我们假定该曲面满足

$$q(x) = e_3(x). \quad (24)$$

对于曲面的嵌入规范, 利用(18)式与曲面的结构方程, 可以证明

$$K_\mu dx^\mu = -\frac{i}{2} (\omega^{23} \sigma_a e_1^a - \omega^{13} \sigma_a e_2^a). \quad (25)$$

为了表明这样的曲面恰恰是负常曲率面, 我们作变换至内禀规范, 即使得

$$g^{-1}(x)(\sigma_a e_a^a)g(x) = \sigma_a \delta_a^a = \sigma_a, \quad g(x) \in SO(3). \quad (26)$$

由于  $g(x)$  与陪集元素  $V(x) \in SO(3)/SO(2)$  可差一稳定子群  $SO(2)$  的因子, 因而上式包含

$$g^{-1}Ng = V^{-1}NV = n = \sigma_3. \quad (27)$$

由(26)式及曲面的结构方程可得

$$[g^{-1}dg, \sigma_a] = g^{-1}(\sigma_a d e_a^a)g = \omega_a^{\beta} \sigma_\beta. \quad (28)$$

令  $g^{-1}dg = A^a \sigma_a$ , 则

$$A^\alpha = -\frac{i}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega_{\beta\gamma}.$$

比较方程(7),此即

$$a_\mu dx^\mu = g^{-1} dg = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \omega^{12} & \omega^{23} + i\omega^{13} \\ \omega^{23} - i\omega^{13} & -\omega^{12} \end{pmatrix} = -Q^{\text{II}} \quad (29)$$

或者

$$h_\mu dx^\mu = -\frac{i}{2} \omega^{12} \sigma_3, \quad k_\mu dx^\mu = -\frac{i}{2} (\omega^{23} \sigma_1 - \omega^{13} \sigma_2). \quad (30)$$

其可积条件  $dQ^{\text{II}} - Q^{\text{II}} \wedge Q^{\text{II}} = 0$  即

$$f_{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu + [k_\mu, k_\nu] = -[k_\mu, k_\nu], \quad (31)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} D_\mu k_\nu = 0. \quad (32)$$

它们分别就是 Gauss 方程与 Codazzi 方程.

注意到 Codazzi 方程(32)与运动方程(22)之间在如下的对偶变换

$$*k_\mu = i\varepsilon_{\mu\nu} k^\nu \quad (33)$$

下是一致的;同时, Gauss 方程亦可写为

$$f_{\mu\nu} = -[k_\mu, k_\nu] = [\varepsilon_{\mu\lambda} k^\lambda, \varepsilon_{\nu\rho} k^\rho]. \quad (34)$$

重要的是,这种对偶关系与  $K = -1$  曲面的对偶关系(10)式是一致的,基于这个一致性,我们可以要求所考虑的曲面的  $\omega^i$  与  $\omega^{12}$  适合

$$Q^{\text{I}} = -*k_\mu dx^\mu - h_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\omega^{12} & \omega^1 - i\omega^2 \\ \omega^1 + i\omega^2 & -i\omega^{12} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

其可积条件  $dQ^{\text{I}} - Q^{\text{I}} \wedge Q^{\text{I}} = 0$  给出与 Codazzi 方程(32)相对应的手征场运动方程(22),以及  $K = -1$  曲面的 Gauss 方程,也就是说,对应于手征场的  $h_\mu dx^\mu$ ,  $k_\mu dx^\mu$ ,  $*k_\mu dx^\mu$ , 可定义曲面的  $\omega^i$ ,  $\omega^{12}$  与  $\omega^{3i}$  这样的曲面存在,且  $K = -1$ ,其法线象即手征场.

事实上,手征场矢量  $q(x)$  作为场方程的解,可不失一般性地要求它们满足<sup>[1]</sup>

$$q^2(x) = 1, \quad q_i^2 = 1, \quad q_i^3 = 1. \quad (36)$$

可称之为标准手征场,这里  $\xi, \eta$  为光锥坐标,

$$\xi = \frac{1}{2}(t+x), \quad \eta = \frac{1}{2}(t-x). \quad (37)$$

当  $t$  与  $x$  的选取使(8)式成立时,我们有

$$\begin{aligned} dq &= de_3 = \sin \frac{\alpha}{2} dt e_1 - \cos \frac{\alpha}{2} dx e_2 \\ &= q_t dt + q_x dx, \end{aligned} \quad (38)$$

因而

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(N_\xi N_\eta) = q_\xi \cdot q_\eta = -\cos \alpha. \quad (39)$$

这就是 Pohlmeyer 指出的手征场与 s-G 系统的对应关系. 这里由(38)式可明确地看出,当在负常曲率面上沿主曲线选标准坐标网(8)式时,曲面的法向量场作为  $t$  与  $x$  的函数

就是手征场矢量. 同时, 手征场的对偶对称性与负常曲率面的对偶对称性是一致的, 后者反映了前者的几何特征.

#### 四

我们知道, 手征场也具有 Bäcklund 变换. 由手征场方程的解  $N(x)$ , 可以找到新解

$$N'(x) = N(x)B(x), \quad N'^2 = N^2 = 1, \quad (40)$$

其中 Bäcklund 变换矩阵  $B(x)$  的方向垂直于  $N(x)$ . 当  $N'$  与  $N$  相互垂直时, 可将  $B(x)$  表为

$$\begin{aligned} B(x) &= i(\cos \beta \sigma_a e_1^a + \sin \beta \sigma_a e_2^a) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma (\sigma_a e_2^a + i \sigma_a e_1^a) - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} (\sigma_a e_2^a - i \sigma_a e_1^a), \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$\Gamma = \Gamma(x) \stackrel{d}{=} e^{i\beta(x)}. \quad (42)$$

可以证明,  $B(x)$  满足手征场的 Riccati 方程<sup>[8]</sup>

$$D_\mu B \stackrel{d}{=} \partial_\mu B + [H_\mu, B] = \epsilon^{\mu\nu} [K_\nu + BK_\nu, B] = -iB[*K_\mu, B]. \quad (43)$$

这是在嵌入规范中的表达式. 在内禀规范中,

$$D_\mu b \stackrel{d}{=} \partial_\mu b + [h_\mu, b] = -ib[*k_\mu, b], \quad (44)$$

其中  $b(x)$  是在内禀规范中的 Bäcklund 变换矩阵,

$$b = g^{-1}(x)B(x)g(x) = -i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^{-1} \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

利用  $*k_\mu$  等表达式, 由(44)式可得

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & id\Gamma^{-1} \\ id\Gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega^{12}\Gamma^{-1} \\ -\omega^{12}\Gamma & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\omega^1 + i\omega^2)\Gamma^{-2} - (\omega^1 - i\omega^2) \\ (\omega^1 - i\omega^2)\Gamma^2 - (\omega^1 + i\omega^2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

令

$$\Gamma^1 = \Gamma^{-1}, \quad (47)$$

则上式化为相应于负常曲率面的两个 Riccati 方程

$$\begin{aligned} d\Gamma - \frac{1}{2}(\omega^1 + i\omega^2) + i\omega^{12}\Gamma + \frac{1}{2}(\omega^1 - i\omega^2)\Gamma^2 &= 0, \\ d\Gamma' - \frac{1}{2}(\omega^1 - i\omega^2) - i\omega^{12}\Gamma' + \frac{1}{2}(\omega^1 + i\omega^2)\Gamma'^2 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

相应的  $2 \times 2$  反散射问题就是(5)式. 利用 s-G 方程在  $K = -1$  曲面上的实现, 就可以得到与 s-G 方程相应的 Riccati 方程,  $2 \times 2$  散射反演方程. 这样, 我们就把手征模型与 s-G 方程的对应性质, 表为同一动力学体系的有关性质在不同标架, 或不同规范中的表现.

从非线性演化方程的延拓结构理论<sup>[9-11]</sup>的观点来看,无论是 Riccati 方程(48),还是  $2 \times 2$  散射反演问题(5)式,都是不同延拓变量在方程的解流形上,由相应的  $SL(2R)$  平联络定义的广义平移不变的表达式。 $2 \times 2$  反散射问题(5)式和 Riccati 方程(48)的延拓空间分别是 2 维实向量空间和 1 维实投影空间。后者是前者的非线性实现。

最后应该说明,本文的讨论是在局部的意义下进行的。有关整体性质的研究将另外进行。

### 参 考 文 献

- [1] K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.*, **46**(1976), 207.
- [2] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74** (1978), 1953. (V. E. Zakharov A. V. Mikhailov, *Sov. Phys. JETP*, **47**, (1978)), 6.
- [3] A. T. Ogielski, M. K. Prasad, A. Sinha, L. L. Chau Wang, *Phys. Lett. B* **91**(1980), 387.
- [4] S.S. Chern & C. L. Terng, *Rocky Mountain Jour. of Math.*, **10**(1980), 105.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell & H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 125.
- [6] R. Sasaki, *Nucl. Phys. B*, **154**(1979), 343.
- [7] F. Lund & T. Regge, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 1524.
- [8] Hou Bo-yu, Preprint AS-ITP-81-016 (1981).
- [9] H. D. Waklquist & F. B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 1.
- [10] R. Hermann, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 835.
- [11] GUO Han-ying, HSIANG Yan-yu & WU Ke, Preprint, AS-ITP-81-023 (1981).

## DUAL SYMMETRY OF CHIRAL MODEL AND GEOMETRICAL CORRESPONDENCE BETWEEN CHIRAL FIELD AND SINE-GORDON EQUATION

WANG PEI

*(Physics Department, Sichuan University, Chengdu)*

HOU BO-YUAN

*(Physics Department, Nei Monggol University, Huhahaote)*

HOU BO-YU

*(Physics Department, Northwest University, Xian)*

GUO HAN-YING

*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

In this paper, we show that the  $SO(3)$  chiral field can be regard as the normal Vector field over the pseudo-spherical surface, and thus obtain the correspondence between chiral field and sine-Gordon system, as well as the geometrical interpretation of chiral field. By means of the dual symmetry between chiral field and the pseudo-spherical surface, we are able to connect chiral field with s-G system, and express Bäcklund transformation, Riccati equation in the gauge invariant representations of the related properties of the same dynamical system in different frames.