

横 向 塞 曼 激 光 器 理 论

巴恩旭 杨性愉 沈寿春

(南开大学物理系)

1982年10月7日收到

提 要

根据 Lamb 理论,对横向磁场下任意 J 值(能级的总角动量)的激光场的振幅和频率方程进行了具体的计算,给出任意 J 值以及 $J = 1 \rightarrow 2$ 的一阶、三阶系数的解析式. 作为结果的一个具体应用实例,成功地解释了 6328 \AA 的 He-Ne²⁰ 横向塞曼激光器的拍频调谐曲线.

一、引 言

横向塞曼激光器能够同时产生两个垂直偏振、频差为几十至几百千赫的线偏振光,并且具有其它独特性质,存在多种潜在用途,因而近年来受到人们的重视^[1-5]. 但这种激光器的一些基本理论问题,如激光场的振幅和频率特性,尚待解决.

Sargent 等人^[6,7]提出塞曼激光理论,给出了纵向磁场下单模振荡的任意 J 值的一阶、三阶系数. Culshaw 和 Kannelaud^[8]虽然给出了横向磁场下单模振荡的一阶、三阶系数,但采用的是标量场模型,并仅限于 $J = 1 \rightarrow 0$ 的简单情况. 因此,已有的理论结果不能解决横向塞曼激光器中的问题. 为此,本文根据 Lamb 理论^[9],采用矢量场模型,研究了横向磁场下任意 J 值跃迁这样一种更复杂、更普遍的情况. 对横向磁场下单模振荡的任意 J 值的振幅和频率方程进行了具体的计算,给出横向磁场下任意 J 值的一阶、三阶系数的解析式,然后把所得结果应用于 $J = 1 \rightarrow 2$ 的特殊情况,对 6328 \AA 的 He-Ne²⁰ 横向塞曼激光器的拍频调谐曲线进行了理论分析. 当然,本文给出的一阶、三阶系数,对于研究气体激光器在横向磁场下单模振荡的强度和频率特性有普遍的意义.

二、自洽方程

我们注意到同样处于横向磁场中的激光器与普通光源不同: 对于普通光源,每条谱线分裂成频率不同的三条谱线;对于激光器,由于腔的作用,输出模式的 σ_+ 和 σ_- 事实上同频率、同相位、同偏振,为同一个 σ 成份,因此激光器输出的只有相互垂直的 π 和 σ 两个成份. 为此,我们采用 $\{x, y\}$ 表象描述激光场.

假设电场为 $\{x, y\}$ 平面内具有两个正交自由度的向量. 由选择定则, $\Delta m = \pm 1$ 对应于 E_x , 为 σ 成份; $\Delta m = 0$ 对应于 E_y , 为 π 成份.

考虑单模振荡的情形, 电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) = & \frac{1}{2} \{ \hat{x} E_x(t) \exp[-i(\nu_x t + \varphi_x)] \\ & + \hat{y} E_y(t) \exp[-i(\nu_y t + \varphi_y)] \} U(z) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中振幅 $E_{x(y)}(t)$ 和位相 $\varphi_{x(y)}(t)$ 为实函数, 而且是时间 t 的缓变函数, $U(z) = \sin(kz)$, $k = 2\pi/\lambda$ 为振荡模的波数. 宏观极化强度 $\mathbf{P}(z, t)$ 可以相应地表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) = & \frac{1}{2} \{ \hat{x} \mathcal{P}_x(t) \exp[-i(\nu_x t + \phi_x)] \\ & + \hat{y} \mathcal{P}_y(t) \exp[-i(\nu_y t + \phi_y)] \} U(z) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中复极化强度 $\mathcal{P}_{x(y)}(t)$ 是时间 t 的缓变函数.

将(1), (2)式(不带复共轭)代入电磁场的矢量波动方程, 略去二阶小量, 并假定腔内场的衰减矩阵 σ 是对角化的(对于气体激光器, 这个假定是近似合理的). 于是得出自治方程为

$$\dot{E}_{x(y)} + \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_{x(y)}} E_{x(y)} = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0} \text{Im}[\mathcal{P}_{x(y)}], \quad (3)$$

$$\nu_{x(y)} + \dot{\phi}_{x(y)} = Q - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0} E_{x(y)} \text{Re}[\mathcal{P}_{x(y)}], \quad (4)$$

式中 Re 和 Im 分别表示取实部和虚部, $\nu \approx \nu_x \approx \nu_y$ 为场的共振频率, $1/Q_{x(y)} = (\epsilon_0 \nu)^{-1} \cdot \sigma_{xx(y)}$ 为腔的 Q 值. 在下面的计算中, 将下标 x, y 分别用 σ, π 来代表.

三、复极化强度的解析解

为了从(3), (4)式解出 $E_{x(y)}$ 和 $\nu_{x(y)}$, 首先求解复极化强度 $\mathcal{P}_{x(y)}$.

1. 微扰能和极化强度

考虑单一同位素的激活介质由上、下能级 a, b 组成, 在横向磁场下, 上、下能级分别分裂为 $2J_a + 1$ 和 $2J_b + 1$ 个次能级. J_a, J_b 为上、下能级的总角动量, a', b' 为相应次能级的磁量子数. 次能级的能量为:

$$w_{a'} = w_a + a' \frac{g_a \mu_B H}{\hbar}, \quad w_{b'} = w_b + b' \frac{g_b \mu_B H}{\hbar}, \quad (5)$$

式中 w_a 和 w_b 分别为零磁场时 a, b 能级的能量. μ_B 为玻尔磁子, H 为磁场强度, g_a, g_b 为上、下能级的朗德因子, \hbar 为普朗克常数. 零磁场时能级 a, b 之间原子跃迁的光频为 w_0 , 由选择定则所决定的次能级 a', b' 之间原子跃迁的光频为 $w_{a'b'}$.

由电偶极矩矩阵元 $(e\mathbf{r})_{a'b'}$ 的表达式^[6], 可求出微扰能矩阵元为

$$\begin{aligned} V_{a'b'} = & -\frac{1}{2} \rho_{a'b'} \{ E_0 \exp[-i(\nu_0 t + \varphi_0)] (\delta_{a', b'+1} + \delta_{a', b'-1}) \\ & + E_\pi \exp[-i(\nu_\pi t + \varphi_\pi)] \delta_{a'b'} \} U(z). \end{aligned} \quad (6)$$

为了运算方便, 对下标作如下规定: E, ν, φ 三个量用 $a'b'$ 作下标, 当 $a' = b' \pm 1$ 时, $a'b' = \sigma$; 当 $a' = b'$ 时, $a'b' = \pi$. 并且定义: $\nu_{b'a'} = -\nu_{a'b'}$, $\varphi_{b'a'} = -\varphi_{a'b'}$,

$E_{b'a'} = E_{a'b'}$. 于是微扰能 (6) 式可表示为

$$V_{a'b'} = -\frac{1}{2} p_{a'b'} E_{a'b'} \exp[-i(\nu_{a'b'} t + \varphi_{a'b'})] U(z), \quad (7)$$

$$V_{b'a'} = V_{a'b'}^* = -\frac{1}{2} p_{b'a'} E_{b'a'} \exp[-i(\nu_{b'a'} t + \varphi_{b'a'})] U(z). \quad (8)$$

宏观极化强度 $\mathbf{P}(z, \nu, t)$ 由粒子数矩阵 $\rho(z, \nu, t)$ 和电偶极矩 $e\mathbf{r}$ 相乘的阵迹给出^[9], 进一步可求出复极化强度为

$$\mathcal{P}_\pi(z) = 4 \exp[i(\nu_\pi t + \varphi_\pi)] \frac{1}{L} \int_0^L dz U(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \sum_{a'} \sum_{b'} p_{b'a'} \rho_{a'b'} \delta_{a'b'}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\sigma(z) &= 4 \exp[i(\nu_\sigma t + \varphi_\sigma)] \frac{1}{L} \int_0^L dz U(z) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \sum_{a'} \sum_{b'} p_{b'a'} \rho_{a'b'} (\delta_{a',b'+1} + \delta_{a',b'-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 L 为腔长.

2. 粒子数矩阵的运动方程和迭代法求解

粒子数矩阵的运动方程为^[9]

$$\dot{\rho}(z, \nu, t) = \lambda - \frac{i}{\hbar} [H, \rho] - \frac{1}{2} (\gamma\rho + \rho\gamma), \quad (11)$$

式中 λ 为激发矩阵, γ 为衰减矩阵, 它们均是对角矩阵. $H = H_0 + H_1$ 为不考虑衰减但考虑扰动的系统的哈密顿量, H_0 为无衰减无扰动的系统的哈密顿量, H_1 为微扰哈密顿量.

令 $w_{\alpha\beta} = w_\alpha - w_\beta$, $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma_\alpha + \gamma_\beta)$, $\alpha, \beta = a', b', a'', b''$. 近似取 $\lambda_{a'} = \lambda_a$, $\lambda_{b'} = \lambda_b$, $\gamma_{a'} = \gamma_a$, $\gamma_{b'} = \gamma_b$, 于是 $\gamma_{a'a''} = \gamma_a$, $\gamma_{b'b''} = \gamma_b$, 并将 $\gamma_{a'b'}$ 用 $\gamma = \gamma_{a'b'} + \gamma_\nu$ 来代替以考虑气体中原子间的弹性碰撞. 于是粒子数矩阵的运动方程可具体表述为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{a'b'}(z, \nu, t) &= -(i w_{a'b'} + \gamma) \rho_{a'b'} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{a''} V_{a''b'} \rho_{a''a'} - \frac{i}{\hbar} \sum_{b''} V_{a'b''} \rho_{b''b'}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{a'a''}(z, \nu, t) &= -(i w_{a'a''} + \gamma_a) \rho_{a'a''} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{b''} (V_{b''a''} \rho_{a'b''} - V_{a'b''} \rho_{b''a''}) + \lambda_a \delta_{a'a''}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{b''b'}(z, \nu, t) &= -(i w_{b''b'} + \gamma_b) \rho_{b''b'} \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{a''} (V_{a''b''} \rho_{b''a''} - V_{b''a''} \rho_{a''b''}) + \lambda_b \delta_{b''b'}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\rho_{b'a'} = \rho_{a'b'}^*.$$

采用迭代法求解, 一阶解为 (15)

$$\rho_{a'b'}^{(1)}(z, \nu, t) = \frac{i}{\hbar} W(\nu) N(z, t) \int_0^\infty d\tau' \exp[-(i w_{a'b'} + \gamma)\tau'] V_{a'b'}(\tau'), \quad (16)$$

式中 $N(z, t)$ 为单位体积内反转原子数的分布函数, 是 t 的缓变函数,

$$W(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u} \exp[-(v/u)^2]$$

为麦克斯韦速度分布, u 为原子的最可几速度, $\tau' = t - t'$. 三阶解为

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(z, v, t) = & -\frac{i}{\hbar^3} W(v) N(z, t) \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int_0^\infty d\tau''' \exp[-(i\omega_{a'b'} + \gamma)\tau'] \\ & \times \sum_{a''} \sum_{b''} \{ V_{a''b'}(t') \exp[-(i\omega_{a''b''} + \gamma_a)\tau''] \{ V_{b''a''}(t'') \\ & \times \exp(-i\omega_{a''b''} + \gamma)\tau''') V_{a''b''}(t''') \\ & + V_{a''b''}(t'') \exp(-i\omega_{b''a''} + \gamma)\tau''') V_{b''a''}(t''') \} \\ & + V_{a''b''}(t') \exp[-(i\omega_{a''b''} + \gamma_b)\tau''] \{ V_{a''b''}(t'') \\ & \times \exp(-i\omega_{b''a''} + \gamma)\tau''') V_{b''a''}(t''') \\ & + V_{b''a''}(t'') \exp(-i\omega_{a''b''} + \gamma)\tau''') V_{a''b''}(t''') \}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\tau'' = t' - t''$, $\tau''' = t'' - t'''$.

3. 复极化强度的一阶和三阶解

将(15)式代入(9), (10)式, 考虑到(7)式, 完成对 τ' 的积分, 可得出复极化强度的一阶解为

$$\mathcal{P}_\pi^{(1)}(t) = -\frac{\bar{N}}{\hbar k u} \sum_{a'} \sum_{b'} \delta_{a'b'} |p_{a'b'}|^2 E_\pi z [\gamma + i(\omega_{a'b'} - \nu_\pi)], \quad (18)$$

$$\mathcal{P}_s^{(1)}(t) = -\frac{\bar{N}}{\hbar k u} \sum_{a'} \sum_{b'} (\delta_{a', b'+1} + \delta_{a', b'-1}) |p_{a'b'}|^2 E_\sigma z [\gamma + i(\omega_{a'b'} - \nu_\sigma)], \quad (19)$$

式中 $\bar{N} = \frac{1}{L} \int_0^L dz N(z, t)$ 为平均粒子数反转密度, $z(\nu)$ 为等离子体色散函数.

将(17)式代入(9), (10)式, 考虑到(7), (8)式, 在 $\delta(\tau''' - \tau')$ 函数近似下, 完成对 τ''' 的积分, 然后完成对 τ' , τ'' 的积分, 可得出复极化强度的三阶解为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\pi^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}\bar{N}}{16\hbar^3 k u} \sum_{a'} \sum_{b'} \delta_{a'b'} \sum_{a''} \sum_{b''} p_{b'a'} p_{a''b''} p_{b''a''} p_{a'b'} E_{a''b''} E_{b''a''} E_{a'b'} \\ & \times \exp[i(\nu_\pi - \nu_{a''b''} + \nu_{a'b'} - \nu_{a'b''})t + i(\varphi_\pi - \varphi_{a''b''} + \varphi_{a'b'} - \varphi_{a'b''})] \\ & \times \left\{ \mathcal{D}_s(w_{a''a''} + \nu_{a''a''} - \nu_{a'b''}) \right. \\ & \times \left[\mathcal{D}_s \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{b''a''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b''} + \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_s \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b''} + \frac{1}{2} \nu_{a''b''} - \nu_{a'b''} \right) \right] \\ & + \mathcal{D}_s(w_{b''b''} - \nu_{a''b''} + \nu_{a''b''}) \\ & \times \left[\mathcal{D}_s \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{b''a''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b''} + \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_s \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{a''b''} - \nu_{a''b''} + \frac{1}{2} \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\sigma^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi N}}{16\hbar^3 k_{tt}} \sum_{a'} \sum_{b'} (\delta_{a',b'+1} + \delta_{a',b'-1}) \\
& \times \sum_{a''} \sum_{b''} p_{b'a'} p_{a''b'} p_{b''a''} p_{a''b''} E_{a''b'} E_{b''a''} E_{a'b''} \\
& \times \exp[i(\nu_\sigma - \nu_{a''b'} + \nu_{a''b''} - \nu_{a'b''})t + i(\varphi_\sigma - \varphi_{a''b'} + \varphi_{a''b''} - \varphi_{a'b''})] \\
& \times \left\{ \mathcal{D}_a(w_{a'a''} + \nu_{a''b''} - \nu_{a'b''}) \right. \\
& \times \left[\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{b''a''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b'} + \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right. \\
& \left. + \mathcal{D} \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{a'b''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b'} + \frac{1}{2} \nu_{a''b''} - \nu_{a'b''} \right) \right] \\
& + \mathcal{D}_b(w_{b''b'} - \nu_{a''b'} + \nu_{a''b''}) \\
& \times \left[\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{b''a''} - \frac{1}{2} \nu_{a''b'} + \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right. \\
& \left. + \mathcal{D} \left(\frac{1}{2} w_{a'b'} + \frac{1}{2} w_{a'b''} - \nu_{a''b'} + \frac{1}{2} \nu_{a''b''} - \frac{1}{2} \nu_{a'b''} \right) \right] \left. \right\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

式中 $\mathcal{D}_x(\Delta w) = \frac{1}{\gamma_x + i\Delta w}$.

四、振幅和频率方程以及一阶、三阶系数

将复极化强度的一阶解(18),(19)式和三阶解(20),(21)式代入自洽方程(3),(4)式,可得出振幅和频率方程分别为

$$\dot{E}_{\pi(\sigma)} = \alpha_{\pi(\sigma)} E_{\pi(\sigma)} - \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\tau} E_{\mu} E_{\rho} E_{\tau} \text{Im} [\mathfrak{D}_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau} \exp(i\psi_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau})], \quad (22)$$

$$\nu_{\pi(\sigma)} + \dot{\psi}_{\pi(\sigma)} = \Omega + \sigma_{\pi(\sigma)} - \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\tau} E_{\mu} E_{\rho} E_{\tau} E_{\pi(\sigma)}^{-1} \text{Re} [\mathfrak{D}_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau} \exp(i\psi_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau})], \quad (23)$$

式中 μ, ρ, τ 代表偏振指数(对于 $a' - b' = 1, 0, -1$, 分别记为 $+, 0, -$), $\psi_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau} = (\nu_{\pi(\sigma)} - \nu_{\mu} + \nu_{\rho} - \nu_{\tau})t + \varphi_{\pi(\sigma)} - \varphi_{\mu} + \varphi_{\rho} - \varphi_{\tau}$ 为三阶相对位相角, $\mathfrak{D}_{\pi(\sigma)\mu\rho\tau}$ 为复三阶总饱和系数. 进一步可将振幅和频率方程分别化为

$$\dot{E}_{\pi(\sigma)} = E_{\pi(\sigma)} (\alpha_{\pi(\sigma)} - \beta_{\pi(\sigma)} I_{\pi(\sigma)} - \mathfrak{D}_{\pi(\sigma)\pi\pi} I_{\pi(\sigma)}), \quad (24)$$

$$\nu_{\pi(\sigma)} + \dot{\psi}_{\pi(\sigma)} = \Omega + \sigma_{\pi(\sigma)} - \rho_{\pi(\sigma)} I_{\pi(\sigma)} - \tau_{\pi(\sigma)\pi\pi} I_{\pi(\sigma)}, \quad (25)$$

式中 $I_{\pi(\sigma)} = \frac{p^2 E_{\pi(\sigma)}^2}{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}$, 其余各个系数的具体表达式由下面的计算给出.

一阶系数 比较(3),(4)式和(24),(25)式,考虑到(18),(19)式,可得

$$\begin{aligned}
\sigma_{\pi} + i\alpha_{\pi} = & - \left(\frac{1}{2} \frac{\nu}{\varepsilon_0} \right) \frac{1}{E_{\pi}} \mathcal{D}_{\pi}^{(1)} - i \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_{\pi}} \\
= & \frac{F_1}{\sqrt{\pi}} \sum_{a'} \sum_{b'} \delta_{a'b'} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 z [\gamma + i(w_{a'b'} - \nu_{\pi})] - i \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_{\pi}}, \quad (26)
\end{aligned}$$

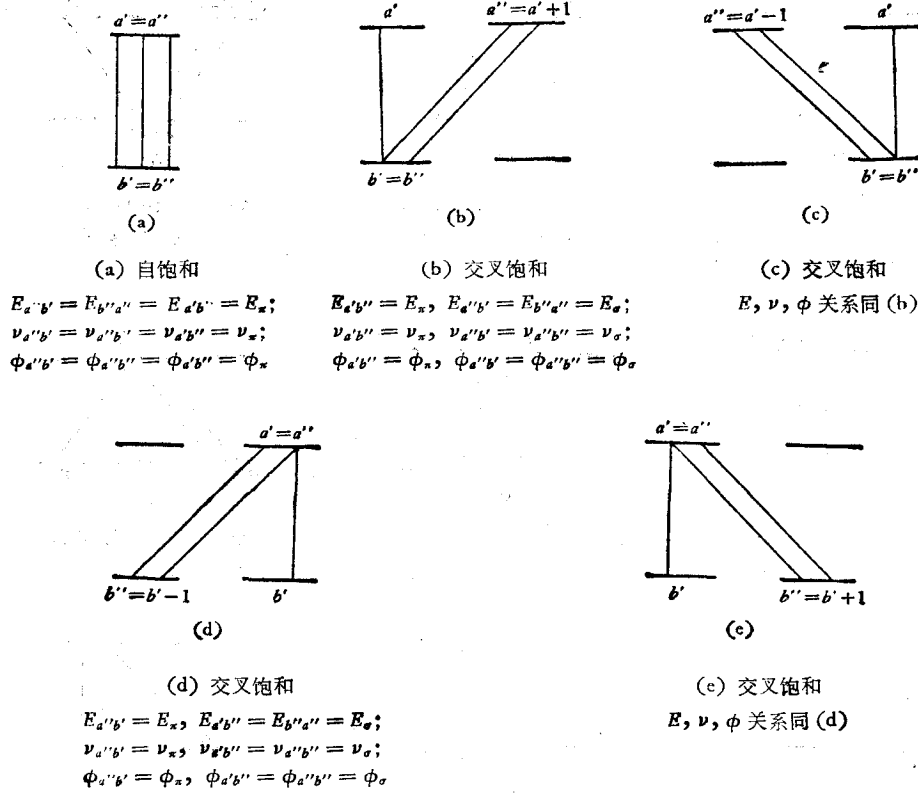


图 1

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\sigma} + i\alpha_{\sigma} &= -\left(\frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0}\right) \frac{1}{E_{\sigma}} \mathcal{D}_{\sigma}^{(1)} - i \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_{\sigma}} \\
 &= \frac{F_1}{\sqrt{\pi}} \sum_{a'} \sum_{b'} (\delta_{a',b'+1} + \delta_{a',b'-1}) \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \\
 &\quad \times z[\gamma + i(w_{a'b'} - \nu_{\sigma})] - i \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_{\sigma}}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

式中 $F_1 = \frac{\sqrt{\pi} \nu p^2 \bar{N}}{2\hbar k u \epsilon_0}$ 为一阶因子。

三阶系数 根据选择定则所允许的跃迁,对 $\mathcal{D}_{\pi}^{(3)}$ 或 $\rho_{a'b'}^{(3)} \delta_{a'b'}$ 有贡献的场的组合情况如图 1 所示。在图 1(a) 中,只有 E_{π} , 导致自饱和项;在图 1(b), (c) 中, π 和 σ 有共同的下能级,在图 1(d), (e) 中, π 和 σ 有共同的上能级,导致交叉饱和项。三阶相对位相角 $\phi_{\pi\mu\rho\sigma} = 0$, 比较 (3), (4) 式和 (22), (23) 式, 考虑到 (20), (21) 式, 可求出图 1(a) — (e) 的复三阶总饱和系数。进一步可求得

$$\begin{aligned}
 \rho_{\pi} + i\beta_{\pi} &= \frac{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}{p^2} \vartheta_{\pi 000} \\
 &= F_3 \sum_{a'} \sum_{b'} \delta_{a'b'} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^4 i[1 + \gamma \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_{\pi})], \quad (28)
 \end{aligned}$$

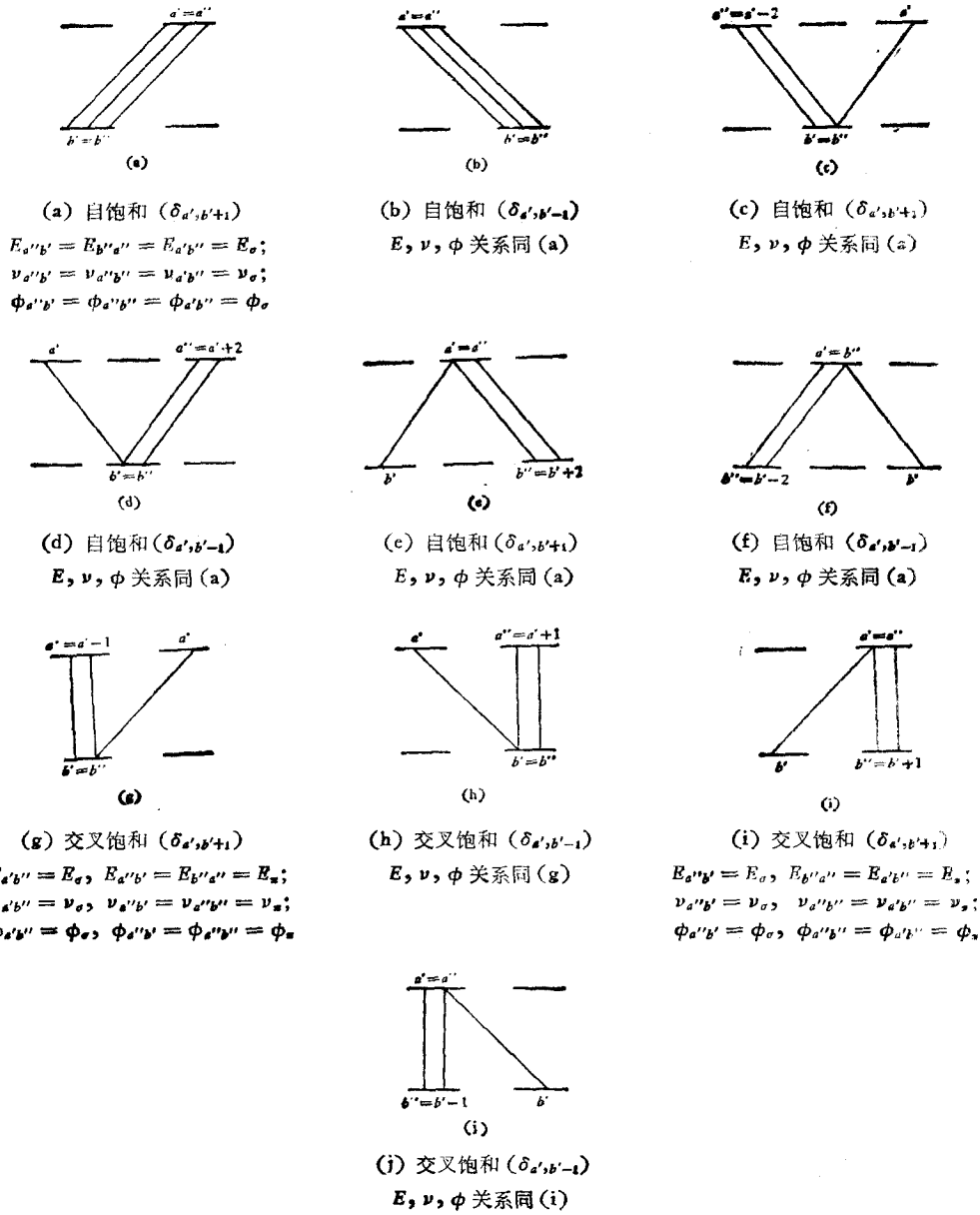


图 2

$$\begin{aligned} \tau_{\pi\sigma} + i\theta_{\pi\sigma} &= \frac{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}{p^2} (\vartheta_{\pi 0++} + \vartheta_{\pi --0} + \vartheta_{\pi ++0} + \vartheta_{\pi 0--}) \\ &= F_1 \frac{i\gamma_a \gamma_b}{8} \sum_{a'} \sum_{b'} \delta_{a'b'} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \\ &\quad \times \left\{ \left| \frac{p_{a'+1,b'}}{p} \right|^2 \left[\frac{1}{\gamma_b} \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} + \frac{1}{2} \delta_a - \nu_c \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{D}_a(-\delta_a) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \nu_c \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{p_{a',b'}}{p} \right|^2 \left[\frac{1}{\gamma_b} \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \frac{1}{2} \delta_a - \nu_0 \right) \right) \right. \\
& + \left. \mathcal{D}_a(\delta_a) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \nu_\pi \right) \right) \right] \\
& + \left| \frac{p_{a',b'-1}}{p} \right|^2 \left[\frac{1}{\gamma_a} \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} + \frac{1}{2} \delta_b - \nu_0 \right) \right) \right. \\
& + \left. \mathcal{D}_b(-\delta_b) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \nu_\pi \right) \right) \right] \\
& + \left| \frac{p_{a',b'+1}}{p} \right|^2 \left[\frac{1}{\gamma_a} \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \frac{1}{2} \delta_b - \nu_0 \right) \right) \right. \\
& + \left. \mathcal{D}_b(\delta_b) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \nu_\pi \right) \right) \right] \Bigg\}, \quad (29)
\end{aligned}$$

式中 $F_3 = \frac{\gamma_{ab}}{4\gamma} F_1$ 为三阶因子, $\delta_a = \frac{\mu_B g_a H}{h}$, $\delta_b = \frac{\mu_B g_b H}{h}$, $\nu_0 = \frac{1}{2} (\nu_\sigma + \nu_\pi)$.

对 $\mathcal{D}^{(3)}$ 或 $\rho_{a'b'}^{(3)}$ ($\delta_{a',b'+1} + \delta_{a',b'-1}$) 有贡献的场的组合情况如图 2 所示. 在图 2(a)–(f) 中, 只有 F_a , 导致自饱和项; 在图 2(g), (h) 中, σ 和 π 有共同的下能级; 在图 2(i), (j) 中, σ 和 π 有共同的上能级, 导致交叉饱和项. 三阶相对位相角 $\phi_{\sigma\mu\rho\tau} = 0$, 比较 (3), (4) 式和 (22), (23) 式, 考虑到 (20), (21) 式, 可求出图 2(a)–(j) 的复三阶总饱和系数. 进一步可求得

$$\begin{aligned}
\rho_\sigma + i\beta_\sigma &= \frac{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}{p^2} (\vartheta_{\sigma+++} + \vartheta_{\sigma----} + \vartheta_{\sigma-+-} + \vartheta_{\sigma-+-} + \vartheta_{\sigma+--} + \vartheta_{\sigma+--}) \\
&= F_1 \frac{i\gamma_a \gamma_b}{8} \sum_{a'} \sum_{b'} \\
&\times \left\{ \delta_{a',b'+1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^4 [\mathcal{D}_a(0) + \mathcal{D}_b(0)] [\mathcal{D}(0) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma)] \right. \\
&+ \delta_{a',b'-1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^4 [\mathcal{D}_a(0) + \mathcal{D}_b(0)] [\mathcal{D}(0) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma)] \\
&+ \delta_{a',b'+1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a'-2,b'}}{p} \right|^2 [\mathcal{D}_b(0) (\mathcal{D}(\delta_a) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \delta_a - \nu_\sigma)) \\
&+ \mathcal{D}_a(2\delta_a) (\mathcal{D}(\delta_a) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma))] \\
&+ \delta_{a',b'-1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a'+2,b'}}{p} \right|^2 [\mathcal{D}_b(0) (\mathcal{D}(-\delta_a) + \mathcal{D}(w_{a'b'} + \delta_a - \nu_\sigma)) \\
&+ \mathcal{D}_a(-2\delta_a) (\mathcal{D}(-\delta_b) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma))] \\
&+ \delta_{a',b'+1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a',b'+2}}{p} \right|^2 [\mathcal{D}_a(0) (\mathcal{D}(\delta_b) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \delta_b - \nu_\sigma)) \\
&+ \mathcal{D}_b(2\delta_b) (\mathcal{D}(\delta_b) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma))] \\
&+ \delta_{a',b'-1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a',b'-2}}{p} \right|^2 [\mathcal{D}_a(0) (\mathcal{D}(-\delta_b) + \mathcal{D}(w_{a'b'} + \delta_b - \nu_\sigma)) \\
&+ \mathcal{D}_b(-2\delta_b) (\mathcal{D}(-\delta_b) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_\sigma))] \Bigg\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{\sigma x} + i\theta_{\sigma x} &= \frac{2\hbar^2 \gamma_a \gamma_b}{p^2} (\vartheta_{\sigma 00+} + \vartheta_{\sigma -00} + \vartheta_{\sigma +00} + \vartheta_{\sigma 00-}) \\
&= F_1 \frac{i\gamma_a \gamma_b}{8} \sum_{a'} \sum_{b'} \\
&\times \left\{ \delta_{a', b'+1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a'-1, b'}}{p} \right|^2 \left[\mathcal{D}_b(0) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_a \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \frac{1}{2} \delta_a - \nu_0 \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{D}_a(\delta_a) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_0) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{a', b'-1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a'+1, b'}}{p} \right|^2 \left[\mathcal{D}_b(0) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_a \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} + \frac{1}{2} \delta_a - \nu_0 \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{D}_a(-\delta_a) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_a \right) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_0) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{a', b'+1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a', b'+1}}{p} \right|^2 \left[\mathcal{D}_a(0) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_b \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} - \frac{1}{2} \delta_b - \nu_0 \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{D}_b(\delta_b) \left(\mathcal{D} \left(\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_0) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{a', b'-1} \left| \frac{p_{a'b'}}{p} \right|^2 \left| \frac{p_{a', b'-1}}{p} \right|^2 \left[\mathcal{D}_a(0) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_b \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \mathcal{D} \left(w_{a'b'} + \frac{1}{2} \delta_b - \nu_0 \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{D}_b(-\delta_b) \left(\mathcal{D} \left(-\frac{1}{2} \delta_b \right) + \mathcal{D}(w_{a'b'} - \nu_0) \right) \right] \right\}. \quad (31)
\end{aligned}$$

五、 $J = 1 \rightarrow 2$ 跃迁情况

为了与实验作比较,很容易从公式(26)–(31)得到 $J = 1 \rightarrow 2$ 跃迁的一阶、三阶系数,再作如下近似:取朗德因子 $g_a = g_b$, 塞曼分裂 $\delta_a = \delta_b = g\mu_0 H/\hbar$, 并取参数 $\gamma_b = 3\gamma_a$, $\gamma_{ab} = 2\gamma_a$, $\gamma = 7\gamma_a$, $k\mu = 70\gamma_a$, $\delta = 30\gamma_a$, $\eta_x = 2$, $\eta_\sigma = 1.98$, 最后得到 $J = 1 \rightarrow 2$ 跃迁的 $\alpha, \beta, \theta, \sigma, \rho, \tau$ 和 I (光强) 随腔调谐 $\Omega - \omega_0$ 变化的关系曲线 (见图 3–9)。

六、理论结果的验证

作为理论的一个验证,我们把以上所得结果用于分析横向塞曼激光器的一个重要特

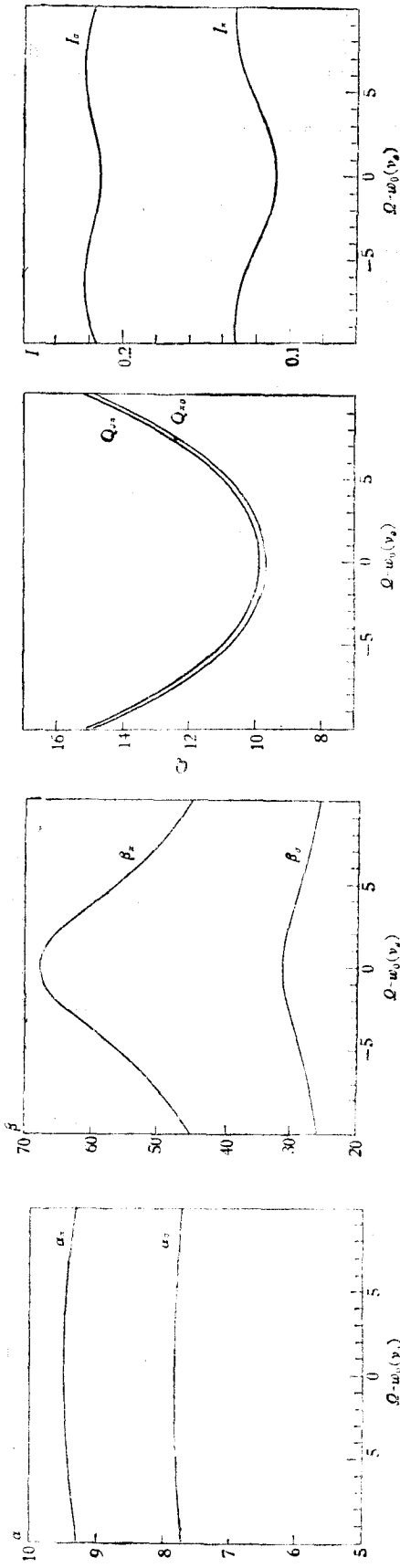


图3 线性增益系数 α_1, α_2 的理论调谐曲线

图4 自饱和系数 β_1, β_2 的理论调谐曲线

图5 交叉饱和系数 Q_{12}, Q_{21} 的理论调谐曲线

图6 光强参数 I_1, I_2 的理论调谐曲线

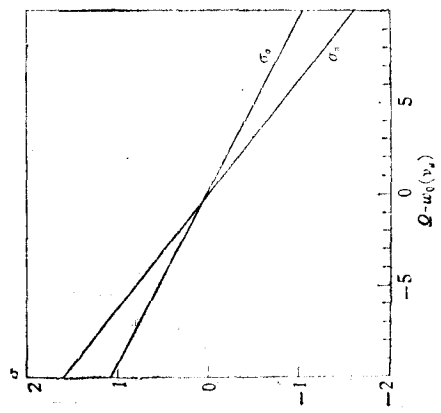


图7 耦合关系 σ_1, σ_2 的理论调谐曲线

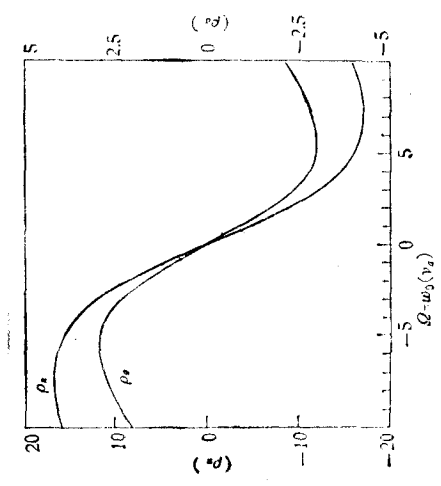


图8 自排下系数 ρ_1, ρ_2 的理论调谐曲线

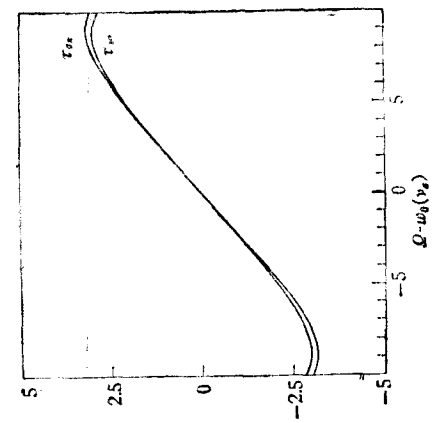


图9 交叉排斥系数 τ_{12}, τ_{21} 的理论调谐曲线

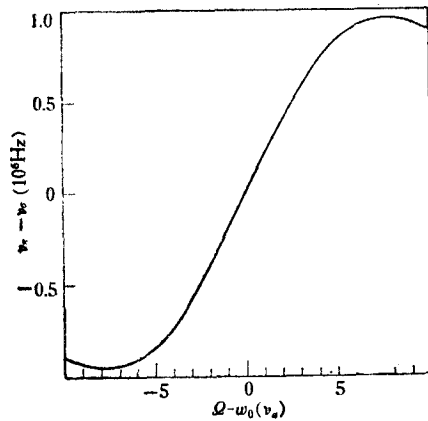


图 10

$$\eta = 2, F_1 = 10^6 \text{ Hz}, \nu_b = 3\nu_a, \gamma_{ab} = 2\nu_a, \\ \gamma = 7\nu_a, k\alpha = 70\nu_a, \delta = 30\nu_a$$

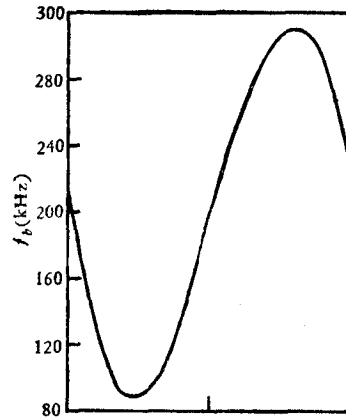


图 11

性——拍频调谐曲线。图 10 和图 11 分别为理论计算结果和实验结果。

由公式(25), π, σ 间的频差为

$$\nu_\pi - \nu_\sigma = F_1(\sigma_\pi - \sigma_\sigma + \rho_\sigma I_\sigma - \rho_\pi I_\pi + \tau_{\sigma\pi} I_\pi - \tau_{\pi\sigma} I_\sigma), \quad (32)$$

式中 $F_1 = \eta\nu/2Q$, η 为相对激发度, I_π 和 I_σ 为无量纲光强,

$$I_\pi = \frac{\alpha_\sigma \theta_{\pi\sigma} - \alpha_\pi \beta_\sigma}{\theta_{\sigma\pi} \theta_{\pi\sigma} - \beta_\sigma \beta_\pi}, \quad I_\sigma = \frac{\alpha_\pi \theta_{\sigma\pi} - \alpha_\sigma \beta_\pi}{\theta_{\sigma\pi} \theta_{\pi\sigma} - \beta_\sigma \beta_\pi}.$$

再作如下近似: 在(32)式等号右边, 取 $\nu_\pi \approx \nu_\sigma \approx \nu_0 \approx \Omega$ (ν_0 为 $H=0$ 时, 原子跃迁中心频率, Ω 为无源腔频率)。在上述给定参数下, 由公式(32)给出的拍频调谐曲线如图 10 所示。

图 10 表明, 拍频调谐曲线呈 S 形, 与座标原点奇对称, 拍频幅度为百千赫量级。同时, 正如计算结果所表明, 实验观测到, 对于不同的激光光强、总气压、总份比、腔损耗、气体温度、磁场强度等因素, 拍频幅度(因而曲线斜率)有所不同, 但均在百千赫量级, 并且曲线始终为 S 形。图 11 是在腔长为 24cm, 总气压为 2.9Tarr, 组分比为 4:1, 工作电流为 5mA, 磁场为 310Gs 的实验条件下, 由记录仪记录的拍频 f_b 随腔调谐变化的实验曲线, 它与理论结果基本吻合。限于本文篇幅, 实验装置和详细结果, 拟另文叙述。

参 考 文 献

- [1] R. H. Morris, J. B. Ferguson and J. S. Warniak, *Appl. Opt.*, **14**(1975), 2808.
- [2] J. B. Ferguson and R. H. Morris, *Appl. Opt.*, **17**(1978), 2924.
- [3] H. Takasaki, N. Umeda and M. Tsukiji, *Appl. Opt.*, **19**(1980), 435.
- [4] N. Umeda, M. Tsukiji and H. Takasaki, *Appl. Opt.*, **19**(1980), 442.
- [5] 高崎宏, 梅田伦弘, *O. Plus E*, **19**(1981), 66.
- [6] M. Sargent III and W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.*, **164**(1967), 436; 450.
- [7] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics*, Addison-Wesley, London, (1974), 391.
- [8] W. Culshaw and J. Kannelaud, *Phys. Rev.*, **145**(1966), 257.
- [9] W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.*, **134**(1964), A1429.

THEORETICAL ANALYSIS OF THE TRANSVERSE ZEEMAN LASER

BA EN-XU YANG XING-YU SHEN SHO-CHUN

(*Nankai University*)

ABSTRACT

By using Lamb's theory, the concrete calculations for the amplitude- and frequency-determining equations of laser field with arbitrary J values (total angular momentum of energy level) in the transverse magnetic field are made, the analytical expressions of the first- and third-order coefficients with arbitrary J values and $J=1 \rightarrow 2$ are obtained. As a concrete applicable example, the beat frequency tuning curve of 6328\AA He-Ne²⁰ transverse Zeeman laser is successfully explained.