

# 小环径比锐边界等离子体的 扭曲模不稳定性

顾 永 年

(中国西南物理研究所)

1983年5月6日收到

## 提 要

本文研究了小环径比锐边界等离子体的扭曲模不稳定性,计算结果表明:外导体壳有一定的稳定作用,无论外导体壳存在与否,环状模数  $n$  为 1 的临界  $\beta$  值均为最小,即为最危险的扰动模式,随着环径比例数  $\epsilon$  的增大,临界  $\beta$  值开始时增大,在  $\epsilon = 0.7$  时达到极大值.  $\epsilon > 0.6$  时高  $\beta$  极限与低  $\beta$  极限下的临界  $\beta$  值几乎相等.

## 一、引 言

对锐边界等离子体的扭曲模不稳定性已进行了广泛的研究<sup>[1-4]</sup>. 这种模型除了相对简单外,还能较直接地给出等离子体稳定性与参量的依赖关系,同时,对  $m = 1$  的扭曲模来说,这种模型能给出一般电流分布情况下的归一化增长率的表式<sup>[5]</sup>.

文献[5]对任意环径比、任意截面形状的锐边界等离子体的扭曲模不稳定性进行了考察,但该文中所用的边界条件(26.b)式是不适当的,忽略了一部分环状效应的影响,而环状效应对等离子体稳定性的影响是很重要的. 文献[6]给出了正确的边界条件,并导出了无导体壳和存在导体壳两种情况下扭曲模稳定性的能量矩阵,示出了一些数值结果. 文献[7]考察了导体壳对圆环等离子体扭曲模的影响,文中认为在小环径比和存在导体壳时,环向模数  $n$  为 2 的扰动起重要作用,决定着稳定性临界  $\beta$  值. 文献[8]也指出了文献[5]的不适当的边界条件,给出了一些结果,但随着环径比的减小,等离子体稳定性临界  $\beta$  值总是增大的.

本文利用文献[6]中导出的公式,研究了小环径比锐边界等离子体的扭曲模不稳定性,计算结果表明:导体壳有一定的稳定作用,无论导体存在与否,环状模数为 1 的临界  $\beta$  值均为最小,即为最危险的扰动模式;随着环径比例数  $\epsilon$  的增大,临界  $\beta$  值开始时增大,在  $\epsilon = 0.7$  时达到极大值.  $\epsilon \geq 0.6$  时,高  $\beta$  极限和低  $\beta$  极限下的临界  $\beta$  值几乎相等.

## 二、计算稳定性的公式

对任意环径比、任意截面形状、任意  $\beta$  值的锐边界等离子体,平衡方程为

$$\hat{B}_0^2/B_1^2 = 2\mu_0 P/B_1^2 + (1 - B_0^2/B_1^2)/Y^2(\epsilon, \theta), \quad (1)$$

式中

$$Y(\epsilon, \theta) = (1 + \epsilon g(\theta) \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$\hat{B}_p$  为等离子体电流产生的磁场,  $P$  为等离子体压强,  $B_i, B_o$  分别为  $\theta = \pi/2$  中平面处的内、外纵向磁场,  $g(\theta)$  为形状因子, 坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  和单位制的选取与文献[6]相同.

等离子体外存在导体壳时, 稳定性能量矩阵  $W$  为

$$\begin{aligned} W = & -H + G^T \cdot [(I + A)^{-1} \cdot B] \cdot G \\ & + \hat{G}^T \cdot [(I - A) + A_2 \cdot (I + A_1)^{-1} \cdot A_3]^{-1} \\ & \cdot [B - A_2 \cdot (I + A_1)^{-1} \cdot B_3] \cdot \hat{G}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} H_{mp} = & 1/T \cdot \int_0^T \{ (\hat{B}_p^2/B_i^2 Q^2) [1 + 2(\dot{g}/g)^2 - \ddot{g}/g] \\ & + \epsilon (B_o^2/B_i^2 - 1) (g \sin \theta) / Y^6(\epsilon, \theta) \} \\ & \cdot J(v) Y^2(\epsilon, \theta) \cos(m-p)v \cdot dv, \end{aligned} \quad (4)$$

$$G_{mp} = n\epsilon/T \cdot \int_0^T JgQ/Y^2(\epsilon, \theta) \cdot \cos(m-p)v dv, \quad (5)$$

$$\hat{G}_{mp} = (B_o/B_i) G_{mp} - m/T \cdot \int_0^T (\hat{B}_p/B_i) Y^2(\epsilon, \theta) \cos(m-p)v dv, \quad (6)$$

$$A_{pm} = 1/T^2 \cdot \int_0^T \int_0^T D_A(v, v')_n \cos(mv' - pv) dv' dv + \hat{A}_{pm}, \quad (7)$$

$$B_{pm} = 1/T^2 \cdot \int_0^T \int_0^T D_B(v, v')_n \cos(mv' - pv) dv' dv + \hat{B}_{pm}, \quad (8)$$

$$A_{2pm} = 1/T^2 \cdot \int_0^T \int_0^T C_{A2}(v, v') \cos(mv' - pv) dv dv', \quad (9)$$

$$A_{3pm} = 1/T^2 \cdot \int_0^T \int_0^T C_{A3}(v_1, v') \cos(mv' - pv_1) dv_1 dv', \quad (10)$$

$$B_{3pm} = 1/T^2 \cdot \int_0^T \int_0^T C_{B3}(v_1, v') \cos(mv' - pv_1) dv_1 dv', \quad (11)$$

其中  $J(v)$  为  $\theta$  变换到  $v$  的雅可比,  $G^T, \hat{G}^T$  表示相应矩阵的转置,  $T = 2\pi$ ,

$$Q = (1 + (\dot{g}/g)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$$\hat{A}_{pm} = -S_p/T \cdot \int_0^T \epsilon J(v) / Y^2(\epsilon, \theta) \cdot (g \sin \theta) \cos(p-m)v dv, \quad (13)$$

$$\hat{B}_{pm} = 2S_p/T \cdot \int_0^T 1/Y^2(\epsilon, \theta) \cdot \cos(p-m)v dv, \quad (14)$$

$$S_p = \begin{cases} \ln 2 & p = 0, \\ 1/2|p| & p \neq 0. \end{cases}$$

当  $v' \approx v$  时,

$$\begin{aligned} D_A(v, v')_n = & -2\epsilon J(v') \frac{\partial}{\partial \theta'} (g(\theta') \sin(\theta')) T_n(k) / Y(\epsilon, \theta) Y(\epsilon, \theta') \\ & - \epsilon^2 J(v') \left( g^2(\theta') + g(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta'} (g(\theta') \sin(\theta - \theta')) \right) U_n(k) / Y^3(\epsilon, \theta) Y(\epsilon, \theta') \\ & - \epsilon J(v') \frac{\partial}{\partial \theta'} (g(\theta') \sin \theta') \ln |\sin(v - v')/2| / Y^2(\epsilon, \theta'), \end{aligned} \quad (15)$$

$$D_B(v, v')_n = P_n(k)/Y(\epsilon, \theta)Y(\epsilon, \theta') + 2 \ln |\sin(v - v')/2|/Y^2(\epsilon, \theta'). \quad (16)$$

当  $v' = v$  时,

$$D_A(v, v)_n = -2\epsilon J(v) \frac{\partial}{\partial \theta} (g(\theta) \sin \theta)/Y^2(\epsilon, \theta) \cdot [\ln 2 - \ln(\epsilon g Q J/Y^2(\epsilon, \theta)) - \sigma_n] - J(v) \cdot (1 + 2(\dot{g}/g)^2 - \ddot{g}/g)/Q^2, \quad (17)$$

$$D_B(v, v)_n = 4[\ln 2 - 1/2 \cdot \ln(\epsilon g Q J/Y^2(\epsilon, \theta)) - r_n]/Y^2(\epsilon, \theta), \quad (18)$$

$$\sigma_n = \begin{cases} 3/2 \\ 11/6 \\ 61/30 \end{cases}, \quad r_n = \begin{cases} 1 & n=1; \\ 4/3 & n=2; \\ 23/15 & n=3. \end{cases}$$

$C_{A_i}$  和  $C_{B_i}$  的表式为

$$C_{A_2}(v, v')_n = -2\epsilon_1 J_1(v'_1) \frac{\partial}{\partial \theta'_1} (g_1(\theta'_1) \sin \theta'_1) [T_n(k_2) + (\Delta R/R_1) \cdot U_n(k_2)/2D_R^2 Y^2(\epsilon, \theta)]/D_R Y(\epsilon, \theta) Y_1(\epsilon_1, \theta'_1) - (\epsilon_1^2 g_1^2(\theta'_1) + \epsilon_1 \epsilon_2 g(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta'_1} (g_1(\theta'_1) \sin(\theta - \theta'_1))) J_1(v'_1) \cdot U_n(k_2)/D_R^3 Y^3(\epsilon, \theta) Y_1(\epsilon_1, \theta'_1), \quad (19)$$

$$C_{A_3}(v_1, v')_n = -2D_R \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta'} (g(\theta') \sin \theta') J(v') [T_n(k_3) - (\Delta R/R_1) U_n(k_3)/2Y_1^2(\epsilon_1, \theta_1)]/Y_1(\epsilon_1, \theta_1) Y(\epsilon, \theta') - (\epsilon_2^2 g^2(\theta') + \epsilon_1 \epsilon_2 g_1(\theta_1) \frac{\partial}{\partial \theta'} (g(\theta') \sin(\theta - \theta')) J(v') \cdot U_n(k_3)/D_R Y_1^3(\epsilon_1, \theta_1) Y(\epsilon, \theta'), \quad (20)$$

$$C_{B_3} = D_R \cdot P_n(k_3)/Y_1(\epsilon_1, \theta_1) Y(\epsilon, \theta'), \quad (21)$$

$$Y_1(\epsilon_1, \theta_1) = (1 + \epsilon_1 g_1(\theta_1) \cos \theta_1)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\Delta R = R_1 - R, \quad D_R = (1 - \Delta R/R_1)^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_2 = \epsilon D_R^2,$$

$$k_i^2 = 2/(1 + \alpha_i),$$

$$\alpha = 1 + (\epsilon^2/2)(g^2(\theta) + g^2(\theta') - 2g(\theta)g(\theta') \cos(\theta - \theta'))/Y^2(\epsilon, \theta)Y^2(\epsilon, \theta'), \quad (23)$$

$$\alpha_2 = 1 + [\epsilon_1^2 g_1^2(\theta'_1) + \epsilon_2^2 g^2(\theta) - 2\epsilon_1 \epsilon_2 g_1(\theta'_1) \cos(\theta - \theta'_1) + 2(\Delta R/R_1)(\epsilon_1 g_1(\theta'_1) \cos \theta'_1 - \epsilon_2 g(\theta) \cos \theta) + (\Delta R/R_1)^2]/2D_R^2 Y^2(\epsilon, \theta) Y_1^2(\epsilon_1, \theta'_1), \quad (24)$$

在  $A_{pm}$ ,  $\alpha$  表式中, 用导体壳上的量, 即用脚标 1 的量代替等离子体界面上的量, 就可得出  $A_{1pm}$  和  $\alpha_1$ . 在  $\alpha_2$  表式中, 用  $\theta$  代替  $\theta'_1$ , 用  $\theta'$  代替  $\theta$ , 即为  $\alpha_3$  的表式. 以上表式中  $P_n(k_i)$ ,  $T_n(k_i)$ ,  $U_n(k_i)$  在  $n = 1, 2, 3$  时分别为

$$P_1(k_i) = 4[(2 - k_i^2)K(k_i)/2 - E(k_i)]/k_i,$$

$$P_2(k_i) = 4[(3k_i^4 + 16(1 - k_i^2))K(k_i)/2 - 4(2 - k_i^2)E(k_i)]/3k_i^3,$$

$$P_3(k_i) = 4[(-15k_i^6 + 158k_i^4 - 384k_i^2 + 256)K(k_i)/2$$

$$- (23k_i^4 + 128(1 - k_i^2))E(k_i)]/15k_i^5,$$

$$T_1(k_i) = [(4 - 3k_i^2)K(k_i) - (4 - k_i^2)E(k_i)]/2k_i, \quad (25)$$

$$T_2(k_i) = [(27k_i^4 - 88k_i^3 + 64)K(k_i) - (3k_i^3 - 56k_i^2 + 64)E(k_i)]/6k_i^3,$$

$$T_3(k_i) = [(-285k_i^6 + 1708k_i^5 - 2944k_i^4 + 1536)K(k_i) + (15k_i^6 + 2 \times (-358k_i^4 + 1088k_i^3 - 768)E(k_i)]/30k_i^5, \quad (26)$$

$$U_1(k_i) = [-k_i K(k_i) + k_i(2 - k_i^2)E(k_i)/2(1 - k_i^2)],$$

$$U_2(k_i) = [4(k_i^2 - 2)K(k_i)/k_i + (k_i^3 + 16(1 - k_i^2))E(k_i)/2k_i(1 - k_i^2)],$$

$$U_3(k_i) = [(-27k_i^4 + 128k_i^3 - 128)K(k_i) - (3k_i^6/2 - 67k_i^5 + 192k_i^4 - 128)E(k_i)/(1 - k_i^2)]/3k_i^5. \quad (27)$$

$K(k_i)$  和  $E(k_i)$  分别为第一类和第二类完全椭圆积分.

当导体壳放在无限远处, 则  $A_3$ ,  $B_3$  趋于零, 变为无导体壳的情况.

$$W_1 = -H + G^T \cdot [(I + A)^{-1} \cdot B \cdot]G + \hat{G}^T \cdot [(I - A)^{-1} \cdot B] \hat{G}. \quad (28)$$

临界  $q$  值、临界  $\beta$  值与平衡量的关系为

$$q = (B_o/B_i)/T \cdot \int_0^T \epsilon(B_i/\dot{B}_o)g \cdot Q/Y^4(\epsilon, \theta) \cdot d\theta, \quad (29)$$

$$\beta = 2\mu_0 P/B_i^2 / (2\rho_0 P/B_i^2 + \bar{\alpha}), \quad (30)$$

$$\beta_p = \beta / (1 - (1 - \beta)B_o^2/B_i^2), \quad (31)$$

$$\bar{\alpha} = \int_0^T g Q/Y^2(\epsilon, \theta) \cdot d\theta / \int_0^T g Q/Y^2(\epsilon, \theta) \cdot d\theta.$$

### 三、计算结果与讨论

对圆截面等离子体, 临界  $q$  值和临界  $\beta$  值与环径比的依赖关系分别示于图 1 和图 2. 可以看出, 随着环径比的减小, 临界  $q$  值迅速增大, 环向模数  $n = 1$  的临界  $q$  值总是比环向模数  $n = 2, 3$  的临界  $q$  值大. 临界  $\beta$  值随着环径比的减小而增大, 在环径比的倒数  $\epsilon$  为 0.7 时, 达到极大值, 随后较迅速地下降. 在  $\epsilon > 0.6$  时, 低  $\beta$  极限与高  $\beta$  极限下的两种临界  $\beta$  值几乎相等.

对不同环径比, 临界  $\beta$  值与外磁场相对值的依赖关系示于图 3. 可以看出, 对大环径比 ( $\epsilon = 0.4$ ), 稳定区域仅在外磁场相对值接近 1 的较窄的区域内, 随着外磁场相对值的减小, 临界  $\beta$  值很快下降. 在小环径比 ( $\epsilon = 0.9$ ) 时, 随着外磁场相对值的减小, 临界  $\beta$  值开始时增大, 到达极大值后又迅速下降.  $\epsilon = 0.9$  时临界  $\beta$  的最大值比  $\epsilon = 0.7$  时临界  $\beta$  的最大值小. 对不同环径比, 临界  $\beta$  值与  $q$  的依赖关系示于图 4, 曲线形状与文献 [8] 相似.

导体壳对等离子体稳定性的影响示于图 5 (等离子体的环径比倒数为  $\epsilon = 0.4$ , 导体壳的环径比倒数为  $\epsilon_1 = 0.6$ ). 可以看出, 无导体壳时 (用实线表示),  $n = 1$  的临界  $\beta$  值为最小, 有导体壳时 (用点划线表示), 导体壳对等离子体有一定的稳定作用, 但仍是  $n = 1$  的临界  $\beta$  值最小, 即环向模数为 1 的扰动是最危险的, 没有像文献 [7] 所示,  $\epsilon > 0.36$  时  $n = 2$  的模起重要作用, 并决定着稳定性临界  $\beta$  值. 这可能是文献 [7] 计算错误引起的. 在导体壳小半径不变的情况下, 导体壳大半径减小, 其稳定作用增大, 大半径增大, 其稳定作用无多大变化. 图 5 (b) 上的圆点示出了大半径减少 10% 时的临界  $\beta$  值.

最后值得指出, 为了保证计算的精度而又用较少的机时, 适当选取能量矩阵的阶数

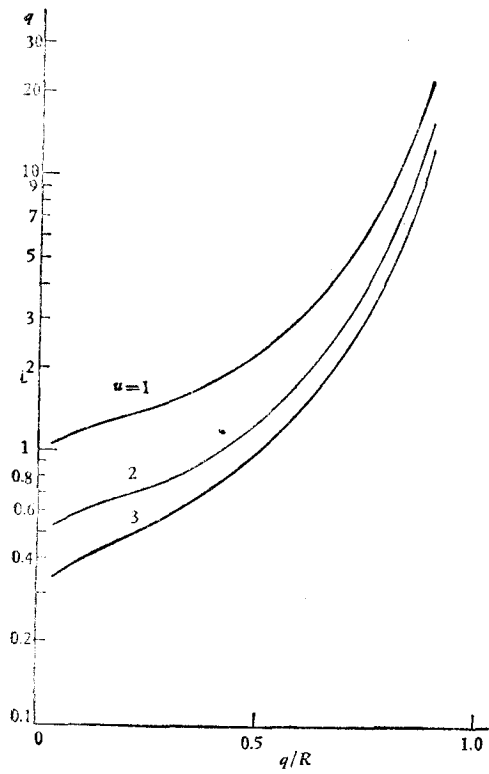


图 1 临界  $q$  值与环径比的依赖关系 ( $\beta_p = 1$ )

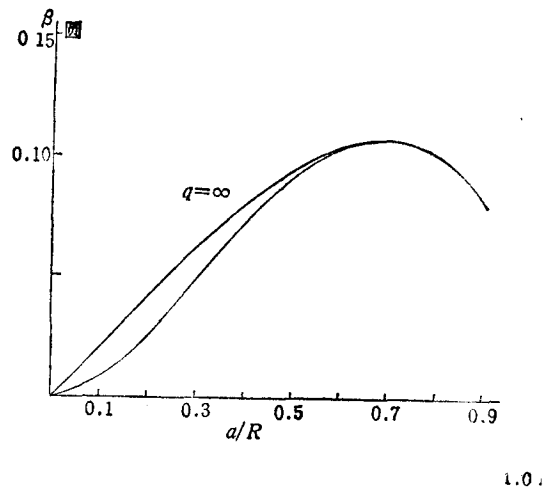


图 2 临界  $\beta$  值与环径比的依赖关系

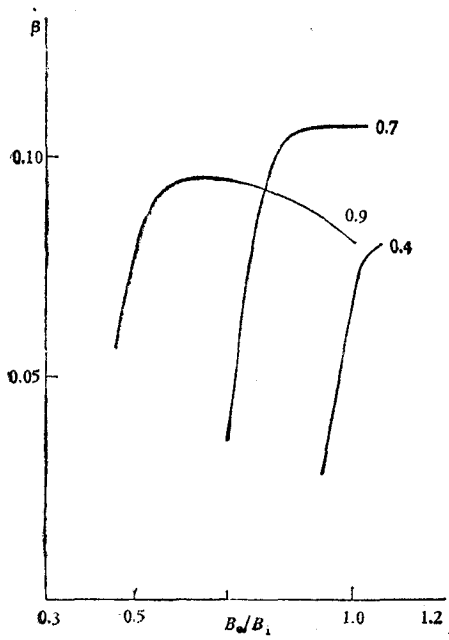


图 3

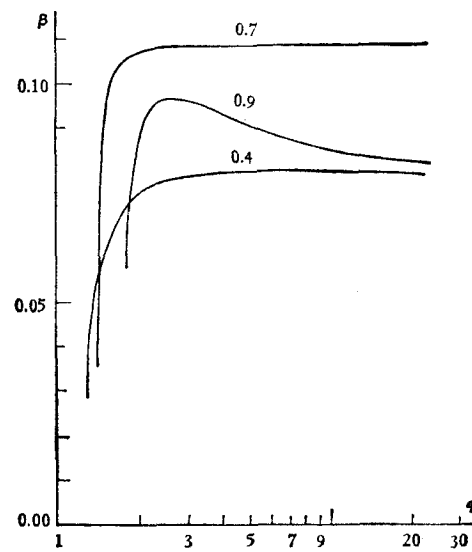


图 4

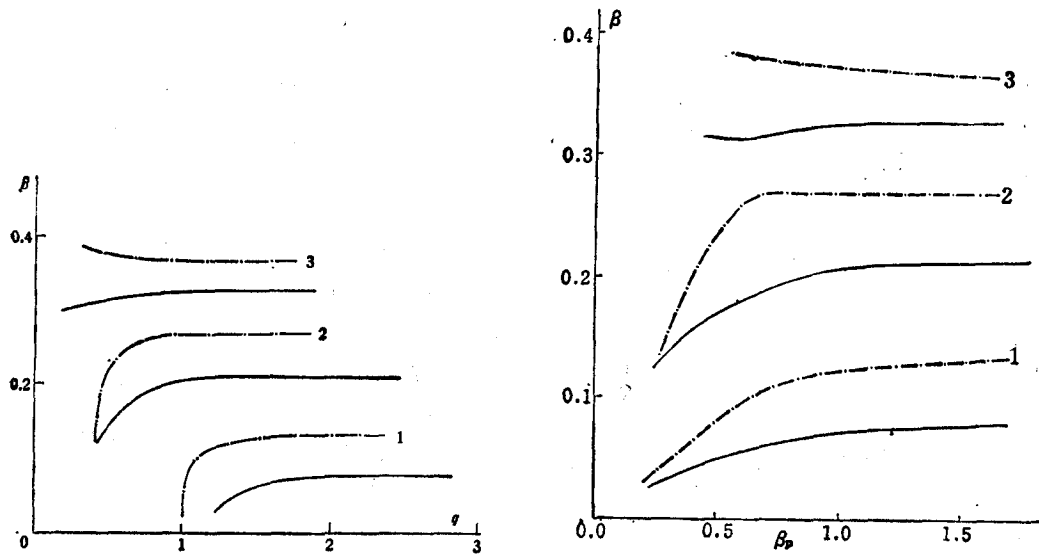


图5 (a) 临界 $\beta$ 值与 $q$ 的依赖关系 (b) 临界 $\beta$ 值与 $\beta_p$ 的依赖关系

$S_w$  和傅里叶变换的格点数是必要的。文献 [4] 已指出, 增大能量矩阵的阶数, 临界  $q$  值, 临界  $\beta$  值将趋于一个极限值。但当矩阵阶数增大时, 还要注意矩阵元本身的精度。例如, 对  $\epsilon = 0.5$ , 用 128 格点进行二维傅里叶变换, 取  $S_w$  为 31 时, 临界  $\beta$  值为  $9.033 \times 10^{-2}$ , 临界  $q$  值为 2.273; 而取  $S_w$  为 41 时, 临界  $\beta$  值为  $8.181 \times 10^{-2}$ , 临界  $q$  值为 2.340, 用 256 格点进行二维傅里叶变换时, 取  $S_w$  为 53 时, 临界  $\beta$  值为  $9.023 \times 10^{-2}$ , 临界  $q$  值为 2.275。可以看出, 在增加能量矩阵阶数时必须注意矩阵元的精度, 计算表明, 二维傅里叶变换的格点数须大于  $4(S_w - 1)$ , 即谐波的每个周期中需要有 8 个积分点。

本文的数值计算是在五机部计算中心的西门子 7.760 计算机上进行的。

### 参 考 文 献

- [1] J. P. Freidberg and F. A. Haas, *Phys. Fluids*, 17(1974), 440.
- [2] B. M. Marder, *Phys. Fluids*, 17(1974), 447.
- [3] B. M. Marder, *Phys. Fluids*, 17(1974), 634.
- [4] 顾永年、邱乃贤, 物理学报, 29(1980), 1367.
- [5] J. P. Freidberg and W. Grossmann, *Phys. Fluids*, 18(1975), 1494.
- [6] 顾永年、邱乃贤、谢中友, 核聚变与等离子体物理, 3(1983), 73.
- [7] M. Kito and T. Honma, *Phys. Fluids*, 21(1978), 272.
- [8] E. Rebhan and A. Salat, *Nucl. Fusion*, 20(1980), 839.
- [9] J. P. Goedbloed, *Nucl. Fusion*, 21(1981), 1316.

## KINK INSTABILITIES OF A SHARP BOUNDARY PLASMA WITH SMALL ASPECT RATIO

GU YONG-NIAN

*(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China)*

### ABSTRACT

Kink instabilities of a sharp boundary plasma with small aspect ratio are studied. The results of numerical calculations show that a conductive shell has a stabilizing effect to some extent and critical beta of toroidal mode number  $n=1$  is the minimum whether there is a conductive shell or not, i.e. the perturbation with  $n=1$  is the most dangerous one. With decrease of aspect ratio, the critical beta increases initially, when  $a/R=0.7$ , it appears as a maximum, when  $a/R \geq 0.6$ , the critical beta values of high beta limit and low beta limit are nearly equal.