

频率扫描法研究倍周期分岔与混沌现象

王运祥 和永寿 彭守礼

(云 南 大 学)

1983年4月4日收到

提 要

在一类非线性系统中,应用频率控制方法,对倍周期分岔与混沌行为进行了研究. 在 $V_0-\omega$ 外控参数平面上,频率扫描显示了分岔与混沌的整体结构: 正的和逆的倍周期分岔序列的对称性;分岔收敛于一点的封闭性. 本文中所建议的方法,将是一种研究分岔与混沌现象有效而快速的手段. 它不仅能定量测量收敛比 δ 和标度因子 α , 分段展开还能定性地观察阵发混沌和嵌套在混沌带中的各种窗口等. 分岔与混沌是一类非线性系统的频率响应.

一、引 言

非线性系统的倍周期分岔与混沌行为,引起了理论和实验研究的极大兴趣. Metropolis 等人^[1]的 U 序列, May^[2] 对 logistic 差分方程

$$X_{n+1} = \lambda X_n(1 - X_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

动力学特性的研究,特别是 Feigenbaum^[3] 从计算机实验中一维非线性映象的普遍规律与普适常数的发现,将这一课题的研究引向新的阶段. Manneville 和 Pomeau^[4] 研究了导致混沌的阵发性途径. 有关的实验研究也不断取得进展. Libchaber 与 Maurer^[5] 首先在湍流实验中证实频谱的标度性. Lindsay^[6] 用非线性 RLC 电路,在频率域观察了受迫振荡的周期倍增过程,首次测量了收敛比 δ . 场效应管的实验得到了类似的结果^[7]. Testa, Perez 和 Jeffries 用示波法得到外加电压为参量的分岔图,在时间域测量了标度因子 α 值^[8]. Rollins 和 Hunt 简化 RLC 电路,研究了非线性系统的一维不可逆映象特性^[9]. 郝柏林、张淑誉的分频采样法,使连续系统中倍周期分岔序列和混沌带结构的数值研究,达到了很高的分辨率^[10].

在实验研究中,非线性电路占有很重要的位置. 与计算机数值实验相比,测量精度虽然不够高,但它是真实的比较简单的非线性系统. 应用频域法、时域法、相平面法以及扫描示波等简易而有效的观察测量手段,不仅直接测量到真实系统的普适常数 δ 和 α 的数值,而且直观地显示出物理系统倍周期分岔与混沌的全局性结构图象. 不仅得到了与数值分析类似的结果,同时为进一步的研究提供了丰富的信息. 数值实验中,分频采样法具有高分辨率的优越性. 研究非线性受迫振子的实验中,频率控制法具有普遍意义. 频率扫描法可能是研究动力学系统分岔与混沌的一种有效而快速的手段.

二、电 路 模 型

我们研究的系统,如图 1 所示的受迫 RLC 振荡电路. 典型参数值为: 变容二极管 2CCIF 型, $R = 50\Omega$, $L = 100\mu\text{H}$. 变容管反向工作时,系统由一组非线性微分方程来描述,

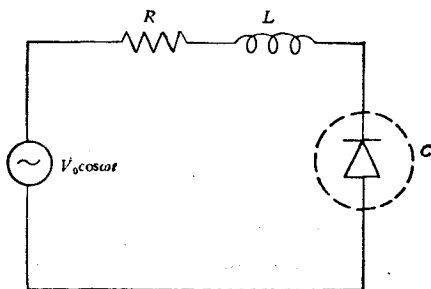


图 1 电路模型

$$\begin{aligned} L\dot{I} &= V_0 \cos \omega t - V_c^-(q) - RI, \\ \dot{q} &= I, \\ V_c^-(q) &= q/C(V_c) = q/C_0(1 + V_c^-/\varphi)^r, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $V_c^-(q)$ 表示变容管两端反向电压, $\varphi = 0.6\text{V}$, $C_0 = 144\text{pF}$, $V_0 \cos \omega t$ 为外加电压. 若取 $r = 0.5$, 则 $V_c^-(q) = \varphi - [(q - q_0)/2C_0\sqrt{\varphi}]^2$. q_0 表示 $V_c^- = \varphi$ 时变容管等效电容的电量. 在文献 [6, 8, 11] 中,曾选择电压 V_0 作为实现分岔的控制参量. 这对于非自治方程(2)是直观的. 但是电压覆盖区间有限,高频交流电压测量精度不高. 若将方程(2)变成自治系统

$$\begin{aligned} L\dot{I} &= -RI - V_c^-(q) + V_0 U, \\ \dot{q} &= I, \quad \dot{U} = -\omega Z, \quad \dot{Z} = \omega U, \end{aligned} \quad (3)$$

这时,在非线性微分方程组中,频率参数 ω 与电压 V_0 处于同等地位. 而频率的数字化测量精度高,容易精细地连续调整. 因此,用频率 ω 作为实现分岔的控制参量是有根据而且是有利的. 在实验中,频率在很宽范围内,可以连续地改变,能够完整地得到分岔与混沌的整体结构图象. 对于受周期外力驱动的一类非线性系统,这样处理有普遍意义. 当我们考查变容管正向导通时,也有类似的自治方程

$$\begin{aligned} L\dot{I} &= -RI - V_c^+(q) + V_0 U, \\ \dot{q} &= I, \quad \dot{U} = -\omega Z, \quad \dot{Z} = \omega U, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 V_c^+ 满足二极管方程 $I = I_0 \exp[qV_c^+(q)/kT]$, 其观测值在 φ 值附近. 我们已经注意到,变容管正向反向交替工作容易出现倍周期分岔与混沌现象. 从正向导通转变到反向截止时,变容管电荷存贮延迟量 τ_r 起重要的作用. 图 1 电路的工作状态可以分成正向导通、反向截止以及从正向转换到反向的中间过渡状态^[3]. 假定 $t = 0$ 时,从正向恒定电压 V_f 阶跃变化到反向恒定电压 V_r , 则中间过渡经历时间 t_1 满足 $\text{erf}(\sqrt{t_1/\tau}) = I^+/(I^+ + I^-)$. I^+ 表示正向电流, I^- 表示 $0 \leq t \leq t_1$ 内的反向电流, erf 表误差函数, τ 为载流子平均寿命. 反向截止状态的电流从 I^- 逐渐减少,即 $I = -I^*[\text{erf}(u) + \exp(-u/\sqrt{\pi u} - 1)]$, $u = \sqrt{t_2/\tau}$. 令 I 从 I^- 减少到 ϵI^- ($\epsilon < 1$) 时,经历的时间为 t_2 则延迟量 $\tau_r = t_1 + t_2$. 因此,变容管电荷存贮延迟 τ_r 与 I^+ , I^- 有关. 对变容管受迫振荡电路工作的物理机制,还有不同的看法^[9,12]. 这里还涉及到微分动力学系统与非线性一维映象之间的关系,有待进一步的研究.

三、频率控制的收敛比 δ 和标度因子 α

迄今为止,对非线性 RLC 电路的实验研究,都是用外激励电压 V_0 作为控制参数。实际上,使用频率控制也得到同样收敛率的分岔,即外控制参数 ω 在相继分岔中,有收敛比估值

$$\delta_n = (\omega_{n+1} - \omega_n) / (\omega_{n+2} - \omega_{n+1}). \quad (5)$$

取一适当电压 V_0 值,单调改变电压频率 ω 值,将得到正的和逆的分岔序列,这两个分岔序列都收敛于 4.6692…… 的普适极限值。表 1 为测量结果,频率升高得到相继为 2 分频,4

表 1 收敛比测量

	$f/2$	$f/4$	$f/8$	$\delta_1 = (\omega_2 - \omega_1) / (\omega_3 - \omega_2)$	$\delta_1^* = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (\omega_3^2 - \omega_2^2)$
正序分岔点频率 (Hz)	947890	1058292	1081242	4.8105	4.5128
反序分岔点频率 (Hz)	2432100	2126458	2063519	4.8561	4.4642

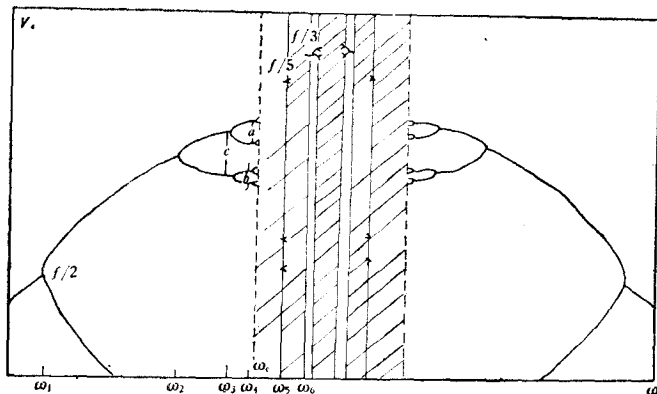


图 2 频率控制分岔图

$$\alpha = c/a = a/b; \delta = (\omega_3 - \omega_2) / (\omega_4 - \omega_3)$$

分频、8 分频的分岔,称为正序。用正序分岔点的三个相继频率,由 (5) 式算出收敛比 δ_1 , 用频率的平方则得 δ_1^* 。随着频率升高,2 分频序列周期倍增到混沌,然后是混沌带中嵌套的周期窗口。继续增加到某一频率后,过程将逆转,最后是 $f/8, f/4, f/2$, 这序列称为反序。于是,用频率作参数,可以得到变容管电压 V_0 的左右对称分岔与混沌结构 (见图 2)。这左右对称结构的出现,是由于谐振电路在谐振频率 $\omega_0^2 \cong 1/LC_0$ 左右对称失谐决定的。非线性 RLC 电路中分岔与混沌行为的发生,是外加电压 V_0 与变容管电压 V_c 相位移动而产生。整个分岔与混沌局限于谐振点附近的有限区域。

再看标度因子 α 。产生分岔时轨道分裂值^[3]

$$\phi^{(n+1)}(t) \equiv [X^{(n+1)}(t) - X^{(n+1)}(t + T_n)] \quad (6)$$

$$\approx 1/\alpha[X^n(t) - X^n(t + T_{n-1})] \quad 0 < t < T_{n-1}$$

$$\approx 1/\alpha^2[X^n(t) - X^n(t + T_{n-1})] \quad T_{n-1} < t < T_n$$

这里 X 看成 V_c , 测量变容管电压 V_c 在频率 ω 取不同值时, 两次相继分裂的 V_c 差值(如图 2) 得到

$$a/b = 2.35, \quad c/a = 2.61, \quad \text{趋近理论值 } \alpha = 2.5029 \dots \dots$$

标度因子 α 在时间域表现为 V_c 各波形幅值的分裂. 当以 V_0 或 ω 为控制参数时, 都可以直接从分岔图测到 $\alpha(V_c(t))$ 相继分岔差值比) 和 δ (相继分岔的频率 ω 差值比). 因此, 分岔图 2 不仅给出整个分岔混沌结构, 而且是测量 δ 和 α 的手段.

四、 V_0 - ω 控制参量平面图

为了考察 V_0 或 ω 与分岔混沌的关系, 由实验测出图 3 的参量曲线. 下面分别说明分频的发生同 V_0 或 ω 之间的关系.

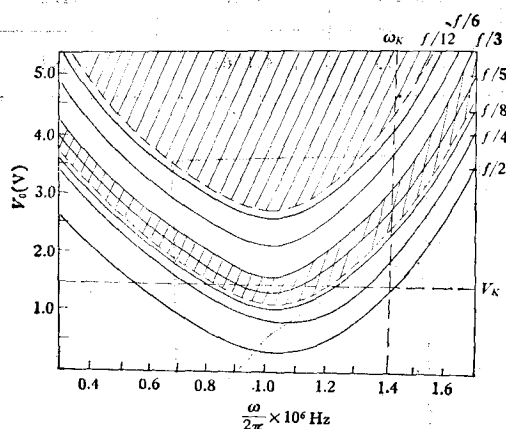


图 3 V_0 - ω 控制参数图

外频率扫描和外电压扫描, 得到图 3.

1. 取一适当 V_0 值, 连续改变频率 ω , 即进行外频率扫描. 则从 2 分频开始, 依次发生正向的倍周期分岔序列. 到一定 ω 值 (ω_0 附近) 时, 将转入逆向的分岔序列, 最后经 8 分频, 4 分频, 同样结束在 2 分频上.

2. 取一适当的 ω 值, 单调增加 V_0 值, 也发生从 2 分频开始的分岔混沌行为. 但一般实验条件下, 只观察到正序的分岔混沌行为. 这就是外电压扫描. 分别改变 V_0 和 ω 值, 重复作, 类似地可以测出其他分频曲线点, 即进行同样的

五、频率扫描分岔图

电压 V_0 一定, 连续改变频率 ω 值, 得到频率控制下的 V_c 波形分岔与混沌的整体结构. 这方法比之电压 V_0 扫描^[8], 更简单也更完整. 由图 3 可知, 电压 V_0 扫描得到的是 V_0 - ω 图的从下至上的连续显示, 而频率扫描得到的是 V_0 - ω 图的从左至右的连续显示.

使用锯齿波控制的线性变频振荡器, 通过宽频放大器放大, 作为 $V_0 \cos \omega t$ 加到 RLC 回路上; 又把该锯齿波接到 x 轴, 这时 x 轴等同于频率变化轴. 然后, 取出变容管电压 V_c 加到 y 轴上. 在示波器上显示出频率扫描分岔图, 如图 4 所示. 图中左右对称结构是差拍零点产生(这是扫频仪的特点). 每一半应形成图 2 的图形, 但是实验中通道低频不足, 有一半图形受到压缩. 从图上可以看到:

1. 分岔点左右 V_c 的波形, 因周期倍增而亮度不同, 故分岔轮廓清晰可见.

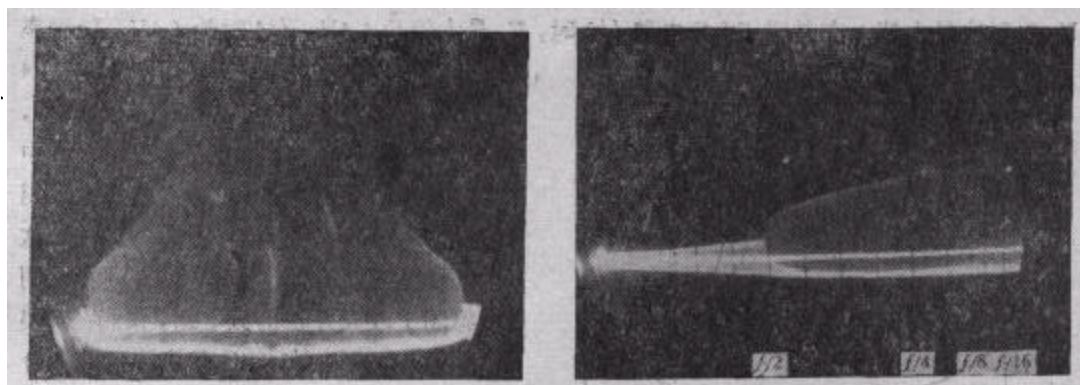


图4 频率控制分叉图(全景)

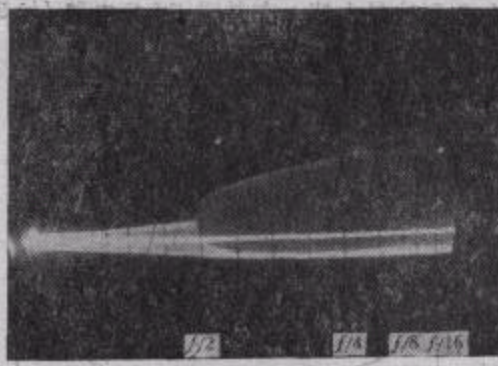


图5 2×2'' 分岔展开图

2. 混沌区 V_c 。波形幅值和相位在变化, 波形移动而迭加, 反映在分岔图上, 呈现出波浪状抖动。

3. 混沌区的周期窗口。由于分频后频率已比较低, 加之周期窗口波形对应周期解, 呈同步状态, 而窗口左右相嵌套的混沌解是不同步的, 因此, 可以看见窗口波形如梳状, 直立排列整齐。

4. 将扫描展开, 则每一区间都可以清楚地看到周期倍增和混沌行为。图 5 就是 $f/2$, $f/4$, $f/8$, $f/16$ 等展开图。还可以定量地测量每个窗口的周期倍增情形。例如 $f/3$ 测量到 $\delta_1 \approx 1.6$, $\delta_2 = 3$, $\alpha = 6$ 。

5. 阵发性混沌。在 $f/5$, $f/7$ 处, 展开后细致观察。在边界上可以看见, 时而周期, 时而混沌的阵发性行为。图 1 电路的 $f/3$ 处, 有明显滞后效应, 即随频率 ω 增加, 由混沌到 $f/3$; 反之, 随频率 ω 减少, 由 $f/3$ 回到混沌。但这两个转变并不发生在同一 ω 值处, 而是有一差值 $\Delta\omega$ 。电压控制下测量, 滞后量 ΔV_c 约有 0.05—0.1V 多, 因此不会发生与“切分岔”对应的阵发性混沌。但改变电路, 例如换成两个变容管 LC 回路耦合 (提高自由度), 得到较窄的 $f/3$ 窗口, 模式与图 1 的 $f/3$ 波形不同。这时, 就有明显的、与一维映像的切分岔相对应的阵发性混沌。

6. 改变电路形式, 或者改变 R , L 等回路参数值, 利用扫频分岔图, 立即看到整个分岔与混沌图景。例如, 表 2 中给出三种电路分岔、混沌序列的实验值。表中 * 表示混沌, 每一分频值对应列出相应的 V_c 最大值。如串联 RLC 电路 $f/2$ 之下的 2.4V 是该分频时

表 2 三种电路分岔与混沌序列和 V_c 最大值 (V)

RLC 串联	$f/2$	$f/4$	$f/8$	$f/16$	*	$f/5$	*	$f/3$	$f/6$	$f/12$	*								
	2.4	7.6	8.7	8.95		10.4		16	21	24									
RLC 并联	$f/2$	$f/4$	$f/2$	$f/4$	*	$f/2$	$f/4$	$f/8$	*	$f/5$	*	$f/3$	$f/6$	$f/3$	$f/6$	$f/12$	*	$f/4$	$f/5$
	4.4	6.4	4.4	6.4		10	12	14		15		17	19	17	19	21		28	50
双 RLC 耦合	$f/2$	*	$f/5$	*	$f/16$	*	$f/4$	*	$f/3$	*	$f/4$	$f/8$	*	$f/7$	*	$f/6$	$f/3$		
	2.8		3.8		5		6.4		7.5		18	18.6		26		28	33		

V_c 波形的最大值。在并联 RLC 电路 $f/2$ 时, V_c 最大值为 4.4V, $f/4$ 时为 6.4V, 随频率

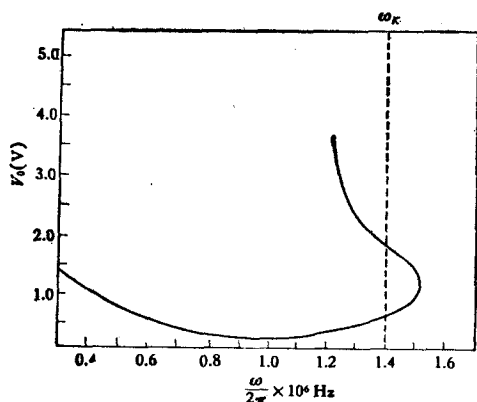


图 6 形变了的二分频曲线

线形状发生扭曲变化而产生, 固定 ω 值而变化 V_c 值, 与同一条分频参量曲线相交两次。

ω 增加(或 V_c 增加), V_c 又缩回 $f/2$ 的 4.4 V, $f/4$ 的 6.4V, 到混沌, 然后又出现 $f/2$, 相应的 V_c 值为 10V, 如此等等。由表 2 中的数值表明, 改变电路形式, 使某些区域明显地展开, 而某些区域明显地被压缩。这对于混沌区精细结构的研究是有利的。例如, 将图 1 改成并联谐振电路, 我们在 $f/3$ 之后看到 $f/4$ 和 $f/5$ 的比较宽的倍周期分岔序列。同时, 还看到 $f/2 \rightarrow f/4 \rightarrow f/2$ 以及 $f/3 \rightarrow f/6 \rightarrow f/3$ 等一分成二, 二又合成一的过程。这种分岔又复合的现象可以从图 6 中得到解释。这是由于 $V_c-\omega$ 参数曲线

六、讨 论

1. 频率扫描的分岔图, 揭示了周期倍增与混沌行为的更多的本质。当外加电压的 V_c 取一适当值, 连续改变其频率 ω 值时, V_c 在 ω 的某些区域有稳定的周期行为, 这是系统周期倍增的分频区域; 在另一些 ω 值的范围内, V_c 无周期性, 其幅值和相位在变化, 从而形成混沌。频率 ω 的变化, 本质上控制着 V_c 的相位变化。当其相位变到某一定值时, 无序的 V_c 又成为有序的稳定周期波形。由于 ω 的变化, 使 V_c 相对于外加电压的相位又移动到某一界限, V_c 无法维持原来的稳定而又进入混沌。这里说的相位变化是非线性的。上述实验中, 外驱动电压可以看成是一个线性振子, 电路本身是一个非线性振子, 两者耦合成一个受迫非线性振动的系统。该系统分频与混沌的状态, 是由两个振子振动同步与不同步引起的。分频是同步态, 混沌是不同步态。线性振子的振幅或频率改变, 将直接改变非线性振子的振动位相。分频与混沌形成复杂的嵌套。分岔与混沌图, 就是一类非线性系统的频率响应。它具有分区间的倍增多值性和某些区间的幅值和相位不定性。

2. 对不同的 V_c 值, 频率 ω 值连续变化而得到 $V_c-\omega$ 参数曲线图。由于实验条件限制, 不能使 V_c 足够大, 但有理由推测, $V_c-\omega$ 分频曲线上半部与下半部类似, 从而分频曲线有封闭结构, 最后, 整个结构收敛于一点。因此, 选择 V_c 或 ω 值, 使扫描通过该点附近, 将得到比较完整的模式。此点的两边结构类似互为逆反。周期倍增与混沌行为, 在 $V_c-\omega$ 平面上占据一有限区域, 这一区域被参数平面上二分频曲线包围。在 $V_c-\omega$ 平面图上, 基本非线性振子的分岔与混沌, 有一基本的形状和层次。参数 R, L 等的大小变化, 可以使曲线形状变化, 但其 $V_c-\omega$ 平面的拓扑结构似乎保持不变。

3. 频率控制下分岔与混沌行为的直接显示, 既能定性地观察全景, 又能定量的测量普适常数 δ 和 α 。扫描范围很宽(通常可达 300MHz); 又便于展开细节。必要时, 采用计算机数值分析, 作精细的研究。这样, 可以为研究一类非线性系统, 提供粗细结合, 互为补充

的分析手段. 频率扫描法的缺点是分辨率不够高. 一些窄的窗口, 在噪声掩盖下, 无法分辨. 频率、电压标度不够精细, 测量还与扫描线性有关. 若将系统谐振频率提高, 并且设置频率窗展开, 有利于提高精度.

感谢郝柏林研究员热情支持和有益的建议.

参 考 文 献

- [1] N. Metropolis, M. L. Stein and P. R. Stein, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **15**(1973), 25.
- [2] M. May, *Nature (London)*, **216**(1976), 459.
- [3] M. J. Feigenbam, *J. State. Phys.*, **19**(1978), 25.
- [4] P. Manneville, Y. Pomeau, *Phys. Lett. A*, **75**(1979), 1.
- [5] A. Libchaber and J. Maurer, *J. Phys. (Paris), Colloq.*, **41**(1980), c3—51.
- [6] P. S. Lindsay, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1349.
- [7] F. T. Arecchi and F. Lisi, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 94.
- [8] James Testa, Jose Perez and Carson Jeffries, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 714.
- [9] R. W. Rollins and E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1295.
- [10] 郝柏林、张淑誉, 物理学报, **32**(1983), 198.
- [11] 王运祥、和永寿、彭守礼, 自然杂志, **6**(1983), 233.
- [12] E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1054.
- [13] Shyn Wang, *Solid-State Electronics*, McGraw-Hill, (1966), 321.

FREQUENCY SWEEP METHOD FOR STUDY OF PERIOD-DOUBLING BIFURCATION AND CHAOTIC BEHAVIOR

WANG YUN-XING HE YONG-SHON PENG SHOU-LI

(Department of Physics, Yunnan University)

ABSTRACT

This paper deals with study of period-doubling bifurcation and chaotic behavior under the control of frequency. All structure of bifurcation and chaos can be shown on the V_0 - ω parameter plane by the method of frequency sweeping. The normal and inverse bifurcation sequences are fully symmetric. On the plane of the control parameters there is a point where the values merge to a unique value. The proposed method is simple and fast, and can be used to study the behavior of the chaotic dynamic systems. Not only can it be used to measure quantitatively the values of the convergence ratio g and the rescaling factor ν , but also to observe qualitatively some periodic windows which exists in the chaotic bands, as well as intermittent chaos. Bifurcation and chaos are the frequency response of the nonlinear systems.