

随机磁场对静电波驱动的速度扩散的影响

仇韵清 夏蒙芬

(北京大学物理系)

1983年4月29日收到

提 要

随机磁场改变了波与粒子之间的耦合关系,因而使波驱动的速度扩散受到影响.其结果是:波电场的横向分量可以对纵向速度扩散有贡献; $\epsilon \ll 1$ 情形,扩散系数的共振峰被展宽; $\epsilon \gg 1$ 情形,扩散系数的振荡效应被削弱.当随机磁场的关联时间与波的特征时间之间相对大小不同时,随机磁场产生影响的具体机制不完全相同,所造成的后果也有差别.对于接近于在垂直方向传播的波,随机磁场对速度扩散的影响一般是重要的.

一、引 言

在托卡马克等离子体的研究中,波驱动的速度扩散现象^[1]和随机磁场效应^[2]都是极为重要的基本问题.近来,人们开始注意到了这两种效应之间的相互影响^[2].但是,这些研究还是比较初步的,波的作用和随机磁场的作用是作为两种统计独立的效应来处理的,没有考虑随机磁场对波驱动的速度扩散系数的影响.

随机磁场可使粒子在垂直于平均磁场的方向发生空间扩散,这将改变粒子与波之间的耦合关系,从而影响波驱动的速度扩散.这就是本文所讨论的效应的基本物理机制.

在前文^[3]中,我们推广了“傅氏空间路径求和”方法,用以研究磁化等离子体中静电波驱动的速度扩散.在本文中,我们将进一步把随机磁场效应包含进来,以讨论随机磁场对静电波驱动的速度扩散的影响.

二、随机磁场对波-粒子耦合的影响

对于随机磁场,我们将采用下述模型^[4]:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z + \alpha_F(t, \mathbf{r}) B_0 \hat{e}_x \quad (1)$$

其中,右端第一项是平均磁场,第二项是磁场在垂直方向的随机分量.假定 α_F 的分布概率是高斯型的:

1) 夏蒙芬,仇韵清,私人通信.

$$\phi(\alpha_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_0^2}} \exp\left(-\frac{\alpha_F^2}{2\alpha_0^2}\right), \quad (2)$$

沿磁力线的关联长度为 L_s .

对于静电波, 本文采用的模型是¹⁾

$$\Phi = \Phi_0 \sum_{n=-N}^N \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - (\omega + n\omega_0)t] = \Phi_0 G\left(\frac{\omega_0 t}{2\pi}\right) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_z + k_{\perp} \mathbf{e}_x$, 函数 $G(\tau)$ 的定义是

$$G(\tau) \equiv 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos 2n\pi\tau, \quad (4)$$

波的谱宽为 $\Delta\omega = 2N\omega_0$, $N \gg 1$.

以下, 以等离子体中的电子为例进行讨论. 电子的运动同时受到随机磁场和静电波的作用. 我们将着重考虑随机磁场对电子与静电波的耦合关系的影响. 为了简单起见, 考虑电子回旋半径 $\rho_e \rightarrow 0$ 的极限情形, 即只计及电子沿磁力线的运动.

采用下述约化量来描写电子(质量记为 μ , 电荷为 $-e$)的运动:

$$\tau = \frac{\omega_0 t}{2\pi}, \quad Z = k_{\parallel} z - \omega t, \quad X = k_{\perp} x, \quad V = \frac{2\pi k_{\parallel} v_z}{\omega_0} - V_p, \quad V_p = 2\pi \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\epsilon = \frac{4\pi^2 e k_{\parallel}^2 \Phi_0}{\mu \omega_0^2}, \quad \beta(\tau) = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \alpha_F \left(\frac{2\pi\tau}{\omega_0}, \mathbf{r} \left(\frac{2\pi\tau}{\omega_0} \right) \right).$$

电子的运动方程可近似地表达为

$$\frac{dZ}{d\tau} = V, \quad (5)$$

$$\frac{dX}{d\tau} = (V + V_p)\beta(\tau), \quad (6)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = -[1 + \beta(\tau)]\epsilon G(\tau) \sin(Z + X). \quad (7)$$

在方程(5)–(7)中, β 反映了随机磁场的效应, X 的变化直接联系于随机磁场的存在. V 的方程(7)中, 与 β 有关的项描写波电场横向分量在磁力线方向的投影所引起的加速效应. 同时, 随机磁场还通过改变电子在波场中的值相而间接影响 V 的变化.

$\beta(\tau)$ 是具有有限关联时间的随机变量, 关联时间相应于电子穿越关联长度 L_s 的特征时间. 用约化量表示时, 关联时间为

$$\tau_s = \frac{k_{\parallel} L_s}{\bar{V} + V_p}, \quad (8)$$

其中 $\bar{V}$ 是 V 的平均值. 对高相速的窄谱波, 可以略去 $\bar{V}$ 项, 有

$$\tau_s = \frac{k_{\parallel} L_s}{V_p} = \frac{L_s}{\lambda_{\parallel}} \cdot \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (9)$$

其中 $\lambda_{\parallel} = 2\pi/k_{\parallel}$ 是纵向平均波长. 在 τ_s 时间内, $\beta(\tau)$ 基本上保持不变, 在超过 τ_s 时间时, $\beta(\tau)$ 发生随机性变化. 这个特征可表示为

$$\langle \beta(\tau_1) \beta(\tau_2) \rangle = \beta_0^2 \theta \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_s} \right). \quad (10)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 代表系综平均,

$$\beta_0^2 = \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \alpha_0^2, \quad (11)$$

函数 θ 的定义为

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |y| \leq 1, \\ 0 & \text{当 } |y| > 1. \end{cases} \quad (12)$$

(7) 式中的 $G(\tau)$ 是周期为 $\tau_1 = 1$ 的函数. $G(\tau)$ 的形态接近于 δ 函数, τ 取整数时出现峰值. 峰的特征宽度 $\tau_s = 1/2N$. τ_s 也正是谱宽为 $\Delta\omega = 2N\omega_0$ 的波的自相关特征时间.

随机磁场对电子与波之间耦合关系的影响取决于 τ_s 与 τ_s, τ_1 之间的相对大小, 在不同情况下, 其影响的方式是不同的, 以下分别进行讨论.

三、随机磁场对速度扩散系数的修正

由上节可看到, 波场中的电子运动方程包含了随机磁场效应, 从而将影响电子运动的动力学过程. 由于波驱动的速度扩散决定于波和电子之间的动力学耦合关系, 因此, 随机磁场的存在将导致对速度扩散系数的修正. 以约化量表示时, 速度扩散系数可表达为¹⁾

$$D = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \langle (V - V_0)^2 \rangle_{\tau}, \quad (13)$$

其中 $\langle \dots \rangle_{\tau}$ 代表 τ 时刻的系综平均, V_0 是初始时刻系综所具有的共同速度.

1. $\tau_s < \tau_s$ 情形

在这种情况下, 随机磁场的有限关联时间效应是不重要的, 随机磁场的效应可以作为纯粹的无规噪声处理.

X 的变化可用扩散过程描述, 近似地取 $V + V_p \sim V_p$. 并考虑到 X 的周期性, 则在 $\delta\tau = \tau_1 = 1$ 的时间间隔内 X 值从 $X_{\tau-1}$ 变为 X_{τ} 的转移概率密度可表为

$$P(X_{\tau}, X_{\tau-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{(X_{\tau} - X_{\tau-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma} \right], \quad (14)$$

其中

$$\sigma = 2\tau_s \beta_0^2 V_p^2. \quad (15)$$

V 的方程(7)中, 相应于 β 的项也是一个纯粹的扩散项. 可以直接求得相应于此项的速度扩散系数为

$$D_2 = \frac{e^2}{4} \cdot \beta_0^2 \cdot (4N\tau_s), \quad (16)$$

D_2 是波电场的横向(x 方向)分量在磁力线方向的投影所驱动的纵向速度扩散. 仅当存在随机磁场时, 横向分量才能驱动纵向速度扩散.

1) 夏蒙芬, 仇韵清, 私人通信.

在短关联时间极限 $\tau \ll \frac{1}{2N}$ 的条件下, 可以略去(7)式中电场纵向分量与横向分量的相互关联. 纵向分量对速度扩散系数的贡献仍采用傅氏空间路径求和方法求得.

当 $\sigma \ll 1$ 时, 得到波电场的纵向分量对速度扩散的贡献为

$$D_1 = \frac{\sigma^2}{4} \frac{1 - e^{-\sigma}}{1 - 2e^{-\sigma/2} \cos V_0 + e^{-\sigma}}. \quad (17)$$

当 $\sigma \ll 1$ 时, D_1 具有明显的共振结构, 其峰值出现在 $V_0 = 2\pi n$ 处 ($n = 0, \pm 1, \dots \pm N$), 峰的特征宽度为 $\sigma/\sqrt{2}$. 这种共振展宽效应是由于电子在随机磁场中作横向扩散而引起的.

在 $\sigma \gg 1$ 情形, 有

$$D_1 = \frac{\sigma^2}{4} \{1 - 2J_2(\sigma)e^{-\sigma} - 2J_1^2(\sigma)e^{-\sigma} + 2J_2^2(\sigma)e^{-2\sigma} + 2J_3^2(\sigma)e^{-3\sigma} + \dots\} \quad (18)$$

在这种大振幅波情形, 扩散系数随波振幅变化的特征与无随机磁场时相似, 即作衰减振荡. 但在(18)式中, σ 不再是一个代表外噪声效应的具有相当任意数值的参量. 在这里, σ 是由随机磁场和波决定的一个具有确定数值的物理量. 随机场越强, 则 σ 值越大, 这将使振荡效应削弱, 扩散系数更快地趋向于准线性值

$$D_{QL} = \frac{\sigma^2}{4} [1 + \beta_0^2(4N\tau_s)]. \quad (19)$$

在(19)式中, 已将 D_2 计入.

在 $\tau_s < \tau_a$ 情况下, 不论波振幅大小, 扩散系数均由两项组成:

$$D = D_1 + D_2.$$

2. $\tau_a < \tau_s < \tau_1$ 情形

这种情形与 $\tau_s < \tau_a$ 情形的区别在于: 在(7)式中, $\beta(\tau)$ 的关联时间大于 $G(\tau)$ 的特征宽度, 因而, 随机磁场的有限关联时间效应对 V 的变化是重要的. 在这种情形中, (7)式中的 $G(\tau)$ 可以近似地视为周期为 1 的 δ 函数. 取时间步长 $\delta\tau = \tau_1 = 1$, 由(7)式可得 V 的差分方程为

$$V_\tau = V_{\tau-1} - \sigma(1 + \beta_{\tau-1}) \sin(Z_{\tau-1} + X_{\tau-1}). \quad (20)$$

由于 $\tau_s < \tau_1$, 差分方程相继两步所涉及的 $\beta_{\tau-1}$ 与 β_τ 是互不关联的. 因此, 在进行傅氏空间路径求和时, 每一步都要各自对 β 作系综平均. 由(2)式及 β 定义, 这种系综平均可表示为

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\beta_0^2}\right) d\beta. \quad (21)$$

对于 $\sigma \ll 1$ 情形, 求得速度扩散系数为

$$D = \frac{\sigma^2}{4} \left\{ 1 + \beta_0^2 + C(\beta_0) \left[\frac{1 - e^{-\sigma}}{1 - 2e^{-\sigma/2} \cos V_0 + e^{-\sigma}} - 1 \right] \right\}, \quad (22)$$

其中

$$C(\beta_0) = \left[\operatorname{erf} \frac{1}{\beta_0 \sqrt{2}} + \beta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2\beta_0^2}} \right]^2$$

$$\begin{cases} \simeq 1 & \text{当 } \beta_0 \ll 1, \\ \simeq \frac{2}{\pi} \beta_0^2 & \text{当 } \beta_0 \gg 1. \end{cases} \quad (23)$$

当 $\beta_0 \ll 1$ 时,

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} \left[\frac{1 - e^{-\sigma}}{1 - 2e^{-\sigma/2} \cos V_0 + e^{-\sigma}} + \beta_0^2 \right]. \quad (24)$$

此式与 $\tau_s < \tau_a$ 情形相似, 但横向电场的贡献比(16)式给出的 D_2 大, 这是由于在 $G(\tau)$ 的特征宽度 τ_a 内随机磁场始终保持关联所致。(23)式中第一项也具有共振结构, 共振峰的展宽也是由随机磁场中电子的横向扩散决定的。

在 $\epsilon \gg 1$ 情形, 得到

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} [1 + \beta_0^2 - 2C(\beta_0) \langle J_2(|1 + \beta| \epsilon) \rangle e^{-\sigma} + \dots]. \quad (25)$$

当 $\beta_0 \ll 1$ 时, (24)式可近似表示为

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} [1 + \beta_0^2 - 2J_2(\epsilon) e^{-\sigma - \epsilon^2 \beta_0^2/2} + \dots]. \quad (26)$$

由(25)式可见, 在振荡项中出现了两个指数因子, $e^{-\sigma}$ 联系于随机磁场引起的空间扩散, $e^{-\epsilon^2 \beta_0^2/2}$ 则与有随机磁场时波的横向电场分量的加速效应有关. 这两种效应都干扰了电子在波场中的相干运动, 其结果使 D 中的振荡项变小, 使 D 更快地趋向其准线性极限值:

$$D_{QL} = \frac{\epsilon^2}{4} (1 + \beta_0^2). \quad (27)$$

这个准线性值与 $\tau_s < \tau_a$ 情形的(17)式不同。

3. $\tau_s \gg \tau_1$ 情形

在这种长关联时间极限下, 必须考虑电子在 X 方向运动的动力学过程. 由(6)式可写出描写电子 X 方向运动的差分方程:

$$X_\tau = X_{\tau-1} + \beta_{\tau-1}(V_\tau + V_P). \quad (28)$$

同时, 在求扩散系数时, 可以认为随机磁场在整个傅氏空间路径求和过程中都保持关联, 对 β 的系综平均要在求和后进行。

对 $\epsilon \ll 1$ 情形, 得到

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{n=-N}^N \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_0} \frac{(V_P + 2\pi n)^2}{(V_0 + V_P)^3} \exp \left[-\frac{(V_0 - 2\pi n)^2}{2\beta_0^2 (V_0 + V_P)^2} \right]. \quad (29)$$

当 $\beta_0(V_0 + V_P) \ll 2\pi$ 时, D 具有明显的共振结构, 峰的位置在

$$V_0 = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (30)$$

这种共振结构是与波和电子之间的线性共振效应相联系的. 在 $\tau_s \gg \tau_1$ 情形, 随机磁场也引起共振展宽, 这是由于随机磁场改变了线性共振条件. 共振峰的特征宽度为

$$\Delta V_0 \sim \beta_0(V_P + 2\pi n). \quad (31)$$

对 $\epsilon \gg 1$ 情形, 可求得

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} [1 + \beta_0^2 - 2\langle (1 + \beta)^2 J_2((1 + \beta)^2 \epsilon) \rangle + \dots]. \quad (32)$$

当 $\beta_0 \ll 1$ 时, (32) 式可近似地表为

$$D = \frac{\epsilon^2}{4} [1 + \beta_0^2 - 2J_2(\epsilon) e^{-2\beta_0^2 \epsilon^2} + \cdots]. \quad (33)$$

准线性极限与(26)式相同, 但振荡项与(25)式有所区别, 这种差异是由随机磁场关联时间长短不同而引起的.

四、结 论

随机磁场使电子在垂直于平均磁场的方向发生运动, 这种运动具有随机性特征, 又具有有限的关联时间. 随机磁场引起的电子横向运动改变了波与电子之间的耦合关系, 从而影响了静电波驱动的纵向速度扩散. 波电场的横向分量可对纵向速度扩散有贡献; 波振幅很小 ($\epsilon \ll 1$) 时, 使具有共振结构的扩散系数的共振峰展宽; 波振幅很大时 ($\epsilon \gg 1$), 使扩散系数随 ϵ 振荡的特征减弱, 扩散系数更快地趋于其准线性值. 但是, 当随机磁场的关联时间 τ_c 与波的特征时间 τ_a , τ_i 之间相对大小不同时, 这种影响是有差别的.

随机磁场对扩散系数的影响的大小与 τ_c , 特别是 β_0 值的大小有关. 当 β_0 与 1 可比时, 将导致重要的修正. 在一般实验条件下, $\alpha_0 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, 由 β_0 定义(11)式可看出, 当 $k_{\parallel}/k_{\perp} \sim \alpha_0 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ 时, 随机磁场的影响是重要的. 对于低杂波等接近于在横向传播的静电波, 出现这种条件是可能的.

参 考 文 献

- [1] 夏蒙芬、胡慧玲, 物理学报, **29**(1980), 1254.
- [2] 夏蒙芬、仇韵清, 物理学报, **31**(1982), 1670.

THE EFFECTS OF STOCHASTIC MAGNETIC FIELD ON THE VELOCITY DIFFUSION DRIVEN BY ELECTROSTATIC WAVES

QIU YUN-QING XIA MENG-FEN

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The stochastic magnetic field modifies the interaction of the waves with the electrons, and the wave-driven velocity diffusion may be effected. However, the mechanisms and the results are not all the same, if the value of correlation time of the stochastic magnetic field is different. In general, due to the effects of stochastic magnetic field, the transverse component of the electric field of waves can contribute to the longitudinal velocity diffusion, the resonant peaks of diffusion coefficient in the case of $\epsilon \ll 1$ are extended, and, in the case of $\epsilon \gg 1$, the oscillating effects of diffusion coefficient are weakened. For the waves propagating nearly perpendicular to the magnetic field the effects of stochastic magnetic field on the velocity diffusion driven by the waves may be important.